УДК 517.95

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕДООПРЕДЕЛЕННОЙ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. С. Филипковская

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступила в редакцию 30.04.2014 г.

Аннотация: доказана теорема существования глобального решения недоопределенной системы дифференциально-алгебраических уравнений. Векторная форма системы имеет вид полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с сингулярным характеристическим пучком операторов. Нелинейная правая часть уравнения может не удовлетворять ограничениям типа глобального условия Липшица. Предварительно рассмотрена каноническая форма сингулярного пучка операторов и связанное с ней блочное представление, используемое в доказательстве основной теоремы. В качестве приложения исследована математическая модель электрической цепи с нелинейными элементами, получены условия гладкой эволюции состояний на бесконечном интервале времени.

Ключевые слова: сингулярный пучок, регулярный блок, каноническая форма, дифференциально-алгебраическое уравнение, глобальное решение, электрическая цепь.

THE GLOBAL SOLVABILITY OF THE SINGULAR SET OF DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

M. S. Filipkovskaya

Abstract: the existence theorem of the global solution of the underdetermined system of differential-algebraic equations is proved. The system vectorial form has the form of the semi-linear differential-algebraic equation with the singular characteristic operator pencil. The nonlinear right part of the equation may not satisfy the constraints of the global Lipschitz condition type. The canonical form of a singular operator pencil and the block representation associated with it used in the proof of the main theorem are preliminarily considered. The mathematical model of an electric network with nonlinear elements is researched as an application, conditions of the smooth evolution of states on an infinite time interval are obtained.

Keywords: singular pencil, regular block, canonical form, differential-algebraic equation, global solution, electric circuit.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений, векторная форма которой имеет вид вырожденного дифференциально-алгебраического уравнения (ДАУ) с выделенной линейной частью и сингулярным характеристическим пучком операторов (см. п. 1). Дифференциальное уравнение называется вырожденным, когда необратим оператор при производной. Предполагается, что система уравнений недоопределенна, т. е. число уравнений меньше числа неизвестных.

Дифференциально-алгебраические уравнения возникают в радиотехнике, математической физике, экономике, системах управления, при математическом моделировании механических систем и других процессов. В теории управления такие уравнения называют дескрипторными, есть и другие названия: вырожденные, сингулярные, алгебро-дифференциальные. В настоящей статье, как и в [1], под сингулярным ДАУ понимается ДАУ с сингулярным характеристическим пучком операторов.

Исследованием локальной разрешимости ДАУ занимались многие авторы ([2], [3] и библиографии в них). Глобальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной изучалась в [4]. Существуют теоремы о глобальной разрешимости вырожденных полулинейных ДАУ, одним из требований которых является глобальная липшицевость нелинейной функции в правой части, однако подобные ограничения реально не выполняются во многих прикладных задачах, несмотря на то, что глобальное решение для них существует.

Целью работы является получение условий глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений. Эта проблема важна для теории динамических систем и приложений, поскольку наличие глобального по времени решения гарантирует достаточно длительное время жизни соответствующей реальной системы.

В пункте 3 доказывается основная теорема о существовании глобального решения сингулярного дифференциально-алгебраического уравнения и затем дается несколько замечаний относительно полученного решения. Предварительно рассматривается каноническая форма сингулярного пучка операторов и связанное с ней блочное представление, используемое в доказательстве основной теоремы. В пункте 4 исследуется модель нелинейного радиотехнического фильтра.

1. ПРИВЕДЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ПУЧКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ. БЛОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ КОМПОНЕНТЫ

Пусть даны линейные ограниченные операторы $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, которым соответствуют $(m \times n)$-матрицы A, B.

Введем комплексные расширения $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ операторов A, B, действующие из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Пучок $\lambda A + B$ является регулярным, если множество $\rho(\widehat{A}, \widehat{B}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda\widehat{A} + \widehat{B})^{-1} \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)\ \}$ регулярных точек соответствующего комплексного пучка $\lambda\widehat{A} + \widehat{B}$ нетривиально ($L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ — пространство ограниченных линейных операторов из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$). В противном случае, т. е. при $\rho(\widehat{A}, \widehat{B}) = \varnothing$, пучок называется сингулярным.

Рассмотрим сингулярный пучок операторов, у которого ранг (см. определение в [5]) $r(A, B) = rg(\lambda A + B) = m$ и $m < n$. Это значит, что у соответствующего пучка матриц $\lambda A + B$ столбцы линейно зависимы и уравнение

$$(\lambda A + B)x = 0 \tag{1}$$

имеет хотя бы одно ненулевое решение. Достаточно рассмотреть лишь те решения $x(\lambda)$, которые являются полиномами от λ:

$$x(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \lambda^i x_i, \ \ x_i \neq 0, \ i = \overline{1, k},$$

где $k \leqslant m$ — степень решения $x(\lambda)$. Условие $(\lambda A + B)x(\lambda) = 0$ равносильно набору равенств

$$Bx_0 = 0, \ Bx_1 = Ax_0, ..., \ Bx_k = Ax_{k-1}, \ Ax_k = 0.$$

Системы векторов $\{x_i\}_{i=0}^k$, $\{Bx_i\}_{i=1}^k$ линейно независимы и образуют базисы, относительно которых матрица индуцированного пучка $\lambda A_X + B_Y = \lambda A + B : X \to Y$, где $X = Lin\{x_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{R}^n$, $Y = Lin\{Bx_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^m$, будет канонической сингулярной клеткой Кронекера $L_k = (l_{ij})$ размера $k \times (k+1)$, у которой все элементы нулевые, кроме $l_{ii} = \lambda$, $l_{i,i+1} = 1$, $i = \overline{1,k}$ [5]. Матрицы A_X, B_Y одноименных индуцированных операторов будут иметь блочный вид: $A_X = (E_k\ 0)$, $B_Y = (0\ E_k)$, где E_k — единичная матрица размера $k \times k$.

Среди всех решений уравнения (1) выберем линейно независимые. Если в выбранном наборе имеются решения, не зависящие от λ, то возьмем их в качестве новых базисных векторов в $\mathbb{R}^n$, тогда соответствующие столбцы матрицы $\lambda A + B$, определяющей оператор $\lambda A + B$ в новом базисе, будут состоять из нулей. Оставшиеся линейно независимые решения уравнения (1) обозначим через $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda), \ldots$, $x_d(\lambda)$. Отметим, что линейно независимые решения уравнения (1) определяются с точностью до скалярных множителей. Коэффициенты при степенях λ решений $\{x_i(\lambda)\}_{i=1}^d$ являются линейно независимыми векторами и их можно взять в качестве новых базисных векторов в $\mathbb{R}^n$.

Согласно [5] сингулярный пучок матриц $\lambda A + B$ размера $m \times n$ и ранга $r(A,B) = m$ $(m < n)$ всегда может быть приведен к каноническому квазидиагональному виду

$$\begin{pmatrix} 0 & L_{k_1} & & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & L_{k_d} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda\widetilde{A} + \widetilde{B} \end{pmatrix},$$

где количество первых нулевых столбцов совпадает с количеством линейно независимых постоянных решений уравнения (1), канонические сингулярные клетки Кронекера L_{k_j} расположены в порядке возрастания степеней k_j $(0 < k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_d, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_d \leqslant m)$, соответствующих линейно независимым решениям $x_j(\lambda)$, $j = \overline{1,d}$, $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$ — регулярный пучок.

Ясно, что выбирая базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ необходимым образом, можно получить блочное представление сингулярного пучка матриц $\lambda A + B$, имеющее вид

$$\begin{pmatrix} \lambda\widetilde{A}_s + \widetilde{B}_s & 0 \\ 0 & \lambda\widetilde{A}_r + \widetilde{B}_r \end{pmatrix}$$

где $\lambda\widetilde{A}_s + \widetilde{B}_s$ — чисто сингулярный пучок, т. е. от него нельзя отделить регулярный блок, а $\lambda\widetilde{A}_r + \widetilde{B}_r$ — регулярный пучок. Причем матрица $\widetilde{A}_s = (\widetilde{A}_{s1}\ 0)$ такова, что блок $\widetilde{A}_{s1}$ обратим.

Существуют разложения пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ в прямые суммы подпространств

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r, \tag{2}$$

относительно которых индуцированные пучки $\lambda A_s + B_s = \lambda A + B : X_s \to Y_s$ и $\lambda A_r + B_r = \lambda A + B : X_r \to Y_r$ являются чисто сингулярным и регулярным соответственно. Введем две пары взаимно дополнительных проекторов $S : \mathbb{R}^n \to X_s$, $P : \mathbb{R}^n \to X_r$ и $F : \mathbb{R}^m \to Y_s$, $Q : \mathbb{R}^m \to Y_r$ на подпространства из разложений (2), $E_{\mathbb{R}^n} = S + P$, $E_{\mathbb{R}^m} = F + Q$. Пары подпространств (X_s, Y_s), (X_r, Y_r) инвариантны относительно операторов A, B, то есть $QA = AP$, $QB = BP$, $FA = AS$, $FB = BS$.

Сингулярное пространство X_s разлагается в прямую сумму подпространств $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$ таких, что операторы пучка $\lambda A_s + B_s$ имеют блочные представления

$$A_s = (A_{s1}\ 0) : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s, \quad B_s = (B_{s1}\ B_{s2}) : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s, \tag{3}$$

где для оператора $A_{s1} \in L(X_{s_1}, Y_s)$ существует обратный $A_{s1}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$. Отметим, что $A_s = FA|_{X_s}$, $B_s = FB|_{X_s}$ — сужение соответственно операторов FA, FB на подпространство X_s. Обозначим через $\widetilde{S}_k : X_s \to X_{s_k}$ проекторы на подпространства X_{s_k} и через $S_k = \widetilde{S}_k S : \mathbb{R}^n \to X_{s_k}$, $k = 1, 2$, — расширения операторов $\widetilde{S}_k$ с подпространства X_s на пространство $\mathbb{R}^n$, $S = S_1 + S_2$, $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) + Bx(t) = f(t, x), \quad t \geqslant 0 \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \geqslant 0), \tag{5}$$

где x, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывная функция, $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейные ограниченные операторы, которым соответствуют $(m \times n)$-матрицы A, B.

Влияние левой части уравнения (4) определяется свойствами характеристического пучка операторов $\lambda A + B$. Предполагается, что сингулярный пучок $\lambda A + B$ имеет ранг $r(A, B) = m$ и $m < n$. Тогда пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ допускают разложения (см. п. 1)

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r, \tag{6}$$

такие, что пучок $\lambda A + B$ расщепляется на сингулярную компоненту $\lambda A_s + B_s = \lambda A + B : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s$, операторы которой имеют блочные представления (3), и регулярную компоненту

$$\lambda A_r + B_r = \lambda A + B : X_r \to Y_r. \tag{7}$$

Как в п. 1, вводятся проекторы из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ на соответствующие подпространства в разложениях (6).

Предполагается, что $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1, то есть для выполнено ограничение

$$\exists C_1 > 0 \; \exists C_2 > 0 : \left\| (\lambda A_r + B_r)^{-1} \right\| \leqslant C_1, \; |\lambda| \geqslant C_2. \tag{8}$$

Тогда существуют две пары взаимно дополнительных спектральных проекторов $\widetilde{P}_k : X_r \to X_k$, $\widetilde{Q}_k : Y_r \to Y_k$, $k = 1, 2$ $\;(E_{X_r} = \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2,\; E_{Y_r} = \widetilde{Q}_1 + \widetilde{Q}_2)$, которые являются вещественными операторами, могут быть вычислены контурным интегрированием и расщепляют пространства X_r, Y_r в прямые суммы подпространств [2]:

$$X_r = X_1 \dot{+} X_2, \quad Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2. \tag{9}$$

Операторы индуцированных пучков $\lambda A_k + B_k = \lambda A_r + B_r : X_k \to Y_k$, $k = 1, 2$ таковы, что

$$A_2 = 0, \quad \exists A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1), \quad \exists B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2),$$

Обозначим через $P_k = \widetilde{P}_k P : \mathbb{R}^n \to X_k$, $Q_k = \widetilde{Q}_k Q : \mathbb{R}^m \to Y_k$ расширения проекторов $\widetilde{P}_k$, $\widetilde{Q}_k$, $k = 1, 2$, $P = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$, при этом для расширенных проекторов сохраняются свойства исходных: $Q_k A = A P_k$, $Q_k B = B P_k$, $k = 1, 2$.

Относительно разложения

$$\mathbb{R}^n = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_1 \dot{+} X_2, \quad X_{s_k} = S_k \mathbb{R}^n, \; X_k = P_k \mathbb{R}^n, \; k = 1, 2, \tag{10}$$

любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы

$$x = x_{s_1} + x_{s_2} + x_1 + x_2, \quad x_{s_k} = S_k x \in X_{s_k}, \; x_k = P_k x \in X_k, \; k = 1, 2. \tag{11}$$

Предположим, $\dim X_{s_1} = p$, $\dim X_{s_2} = l$, $\dim X_1 = a$, $\dim X_2 = d$, $p + l + a + d = n$. Пусть $\{s_i\}_{i=1}^{p}$, $\{s_{p+i}\}_{i=1}^{l}$, $\{p_i\}_{i=1}^{a}$, $\{p_{a+i}\}_{i=1}^{d}$ — базисы подпространств $X_{s_1},\ X_{s_2},\ X_1,\ X_2$ соответственно. Способ выбора базисов пространств $X_1,\ X_2$ описан в [6], а базисов $X_{s_1},\ X_{s_2}$ — в п. 1 с тем условием, что операторы сингулярной компоненты удовлетворяют (3). Объединение базисов подпространств $X_{s_k},\ X_k,\ k = 1, 2$, является базисом пространства $\mathbb{R}^n$ и для любого вектора $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ из разложения $\widehat{x} = \sum\limits_{i=1}^{p} w_i\, s_i + \sum\limits_{i=1}^{l} \xi_i\, s_{p+i} + \sum\limits_{i=1}^{a} z_i\, p_i + \sum\limits_{i=1}^{d} v_i\, p_{a+i}$ по этому базису вытекает представление: $\widehat{x} = (w^T, \xi^T, z^T, v^T)^T$, где $w = (w_1, \ldots, w_p)^T \in \mathbb{R}^p$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)^T \in \mathbb{R}^l$, $z = (z_1, \ldots, z_a)^T \in \mathbb{R}^a$, $v = (v_1, \ldots, v_d)^T \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^d$.

Введем операторы $S_p : \mathbb{R}^p \to X_{s_1},\ S_l : \mathbb{R}^l \to X_{s_2},\ P_a : \mathbb{R}^a \to X_1,\ P_d : \mathbb{R}^d \to X_2$, для которых, очевидно, существуют обратные операторы $S_p^{-1} : X_{s_1} \to \mathbb{R}^p,\ S_l^{-1} : X_{s_2} \to \mathbb{R}^l,\ P_a^{-1} : X_1 \to \mathbb{R}^a,\ P_d^{-1} : X_2 \to \mathbb{R}^d$. Тогда $w = S_p^{-1} S_1 x$, $\xi = S_l^{-1} S_2 x$, $z = P_a^{-1} P_1 x$, $v = P_d^{-1} P_2 x$ и компоненты вектора x в разложении (11) имеют вид

$$x_{s_1} = S_p\, w, \quad x_{s_2} = S_l\, \xi, \quad x_1 = P_a\, z, \quad x_2 = P_d\, v. \tag{12}$$

В статье [6] введены следующие два определения.

Определение 1. *Аддитивным разложением единицы* E_y в s-мерном линейном пространстве Y назовем любую систему одномерных проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^{s}$, $\Theta_k : Y \to Y$ $(\Theta_k^2 = \Theta_k)$ таких, что $\Theta_i\, \Theta_j = 0$ при $i \neq j$ и $E_Y = \sum\limits_{k=1}^{s} \Theta_k$.

Определение 2. Оператор-функция $\Phi(x) : D \to L(X, Y)$, $D \subset X$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $conv\{x_1, x_2\}$ векторов $x_1,\ x_2 \in D$, если для любого набора векторов $\{\widetilde{x}_k\}_{k=1}^{s} \subset conv\{x_1, x_2\}$ и некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^{s}$ в s-мерном пространстве Y оператор $\Lambda = \sum\limits_{k=1}^{s} \Theta_k \Phi(\widetilde{x}_k) \in L(X, Y)$ является обратимым так, что $\Lambda^{-1} \in L(Y, X)$.

Представим отображение $\Phi(x) : D \to L(X, Y)$ в виде матрицы в базисах s-мерных пространств X, Y:

$$\Phi\,(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \cdots & \Phi_{1s}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(x) & \cdots & \Phi_{ss}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда определение 2 может быть сформулировано следующим образом: оператор-функция $\Phi(x)$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $conv\{x_1, x_2\}$ векторов $x_1,\ x_2 \in D$, если для любого набора векторов $\{\widetilde{x}_k\}_{k=1}^{s} \subset conv\,\{x_1, x_2\}$ обратим оператор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\widetilde{x}_1) & \cdots & \Phi_{1s}(\widetilde{x}_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(\widetilde{x}_s) & \cdots & \Phi_{ss}(\widetilde{x}_s) \end{pmatrix}.$$

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Введем многообразие $L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n : BP_2 x = Q_2 f(t, x)\}$.

Здесь и далее используются проекторы и блочные представления операторов пучка $\lambda A + B$, определенные в п. 1, 2.

Теорема 1. *Пусть функция $f(t, x)$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $m < n$, характеристический пучок*

$\lambda A+B$ уравнения (4) имеет ранг $r(A,B)=m$ и его регулярная компонента (7) удовлетворяет (8). Пусть

$$\forall t \geqslant 0\, \forall x_{s_1} \in X_{s_1}\, \forall x_1 \in X_1\, \exists x_{s_2} \in X_{s_2}\, \exists u \in X_2 : (t, x_{s_1}+x_{s_2}+x_1+u) \in L_0, \tag{13}$$

и для любых u_1, $u_2 \in X_2$ таких, что $(t, x_{s_1}+x_{s_2}+x_1+u_k) \in L_0$, $k=1,2$, функция

$$\Phi(u)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x_{s_1}+x_{s_2}+x_1+u))-B\right]P_2 \in C(\,X_2, L(X_2,Y_2)\,) \tag{14}$$

является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{u_1,u_2\}$.

Предположим, что проекции Ff, $Q_1 f$ допускают представления:

$$\begin{gathered} Ff(t,x)=K_1(t)S_1x+K_2(t)S_2x+K_3(t)P_1x+\psi_1(t,x)+g_1(t), \\ Q_1f(t,x)=D_1(t)S_1x+D_2(t)S_2x+D_3(t)P_1x+\psi_2(t,x)+g_2(t), \end{gathered} \tag{15}$$

где $K_i(t) \in C([0,\infty), L(X_{s_i},Y_s))$, $D_i(t) \in C([0,\infty), L(X_{s_i},Y_1))$, $i=1,2$, $K_3(t) \in C([0,\infty), L(X_1,Y_s))$, $D_3(t) \in C([0,\infty), L(X_1,Y_1))$, $\psi_1(t,x) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, Y_s)$, $\psi_2(t,x) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, Y_1)$, $\frac{\partial}{\partial x}\psi_i(t,x)$, $i=1,2$ непрерывны на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $g_1(t) \in C([0,\infty),Y_s)$, $g_2(t) \in C([0,\infty),Y_1)$.

Пусть существуют самосопряженные положительные операторы $H_i=H_i^*>0$, $i=1,2$, $H_1 \in L(X_{s_1})$, $H_2 \in L(X_1)$ и для каждого $T>0$ найдется число $R_T>0$ такие, что

$$(H_1S_1x, A_{s1}^{-1}\psi_1(t,x))+(H_2P_1x, A_1^{-1}\psi_2(t,x)) \leqslant 0, \quad \begin{aligned} &\forall (t,x) \in L_0 : 0 \leqslant t \leqslant T, \\ &\|S_1x+P_1x\| \geqslant R_T. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0,x_0) \in L_0$ существует решение $x(t)$ задачи Коши (4), (5) на $t_0 \leqslant t < \infty$.

Доказательство. Применяя к уравнению (4) проекторы F, Q_1, Q_2, получим эквивалентную (4) систему из трех уравнений

$$\frac{d}{dt}(FASx)+FBSx=Ff(t,x), \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}(AP_1x)+BP_1x=Q_1f(t,x), \tag{18}$$

$$Q_2f(t,x)-BP_2x=0. \tag{19}$$

Сужая операторы из уравнений (17), (18), (19) на пространства соответственно X_s, X_1, X_2 из разложений (6), (10) и учитывая (3), получим эквивалентную систему:

$$\left\{\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}(A_{s1}x_{s_1})+B_{s1}x_{s_1}+B_{s2}x_{s_2}=Ff(t,x), \\ \tfrac{d}{dt}(A_1x_1)+Q_1Bx_1=Q_1f(t,x), \\ Q_2f(t,x)-B_2x_2=0. \end{gathered}\right. \tag{20}$$

Умножая уравнения системы (20) слева на $S_p^{-1}A_{s1}^{-1}$, $P_a^{-1}A_1^{-1}$, $P_d^{-1}B_2^{-1}$ соответственно и делая замену (12), получим эквивалентную (20) систему:

$$\frac{dw}{dt}+S_p^{-1}A_{s1}^{-1}B_{s1}S_p\,w=S_p^{-1}A_{s1}^{-1}F\widetilde{f}(t,w,\xi,z,v)-S_p^{-1}A_{s1}^{-1}B_{s2}S_l\,\xi, \tag{21}$$

$$\frac{dz}{dt}+P_a^{-1}A_1^{-1}Q_1BP_a\,z=P_a^{-1}A_1^{-1}Q_1\widetilde{f}(t,w,\xi,z,v), \tag{22}$$

$$P_d^{-1}B_2^{-1}Q_2\widetilde{f}(t,w,\xi,z,v)-v=0, \tag{23}$$

где $\widetilde{f}(t,w,\xi,z,v)=f(t,S_p\,w+S_l\,\xi+P_a\,z+P_d\,v)$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi(t,w,\xi,z,v)=P_d^{-1}B_2^{-1}Q_2\widetilde{f}(t,w,\xi,z,v)-v.$$

Оно непрерывно по совокупности переменных и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial\Psi(t,w,\xi,z,v)}{\partial(w,\xi,z)}=P_d^{-1}B_2^{-1}\frac{\partial Q_2f(t,x)}{\partial x}\left(S_p\;\,S_l\;\,P_a\right),$$

$$\frac{\partial\Psi(t,w,\xi,z,v)}{\partial v}=P_d^{-1}\left[B_2^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(Q_2f(t,x))-P_2\right]P_d=P_d^{-1}B_2^{-1}\Phi(P_d\,v)P_d,$$

где $\Phi(P_d\,v)=\Phi(u)$ — оператор-функция (14), $u=P_d\,v\in X_2$.

Поскольку функция $\Phi(u)$ является базисно обратимым оператором на $conv\{u_1,u_2\}$ для любых $u_i\in X_2$ таких, что $(t,x_{s_1}+x_{s_2}+x_1+u_i)\in L_0$, $i=1,2$, существует аддитивное разложение единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^d$ в Y_2 такое, что оператор $\Lambda_1=\sum\limits_{k=1}^{d}\Theta_k\Phi(\widetilde{u}_k)\in L(X_2,Y_2)$ является обратимым для любого набора векторов $\{\widetilde{u}_k\}_{k=1}^d\subset conv\{u_1,u_2\}$. С помощью обратимого оператора $N=P_d^{-1}B_2^{-1}:Y_2\to\mathbb{R}^d$ введем в $\mathbb{R}^d$ систему одномерных проекторов $\widehat{\Theta}_k=N\Theta_kN^{-1}$, которые образуют аддитивное разложение единицы $\{\widehat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Выберем любые $v_i\in\mathbb{R}^d$ такие, что
$(t,w,\xi,z,v_i)\in\widetilde{L}_0=$
$=\Big\{(t,w,\xi,z,v)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^a\times\mathbb{R}^d:P_d^{-1}B_2^{-1}Q_2\widetilde{f}(t,w,\xi,z,v)-v=0\Big\}$,
$i=1,2$, и любые $\widetilde{v}_k\in conv\{v_1,v_2\}$, $k=\overline{1,d}$. Поскольку $(t,w,\xi,z,v)\in\widetilde{L}_0\Leftrightarrow(t,x)\in L_0$ и для векторов $u_i=P_d\,v_i$, $\widetilde{u}_k=P_d\widetilde{v}_k$ обратим оператор Λ_1, то обратим и действующий в $\mathbb{R}^d$ оператор

$$\Lambda_2=\sum_{k=1}^{d}\widehat{\Theta}_k\frac{\partial}{\partial v}\Psi(t,w,\xi,z,\widetilde{v}_k)=\sum_{k=1}^{d}\widehat{\Theta}_kP_d^{-1}B_2^{-1}\Phi(P_d\,\widetilde{v}_k)P_d=N\Lambda_1P_d.$$

Таким образом, для любых v_i таких, что $(t,w,\xi,z,v_i)\in\widetilde{L}_0$, $i=1,2$, функция $W(v)=\frac{\partial}{\partial v}\Psi(t,w,\xi,z,v)$ является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{v_1,v_2\}$ и, следовательно, для любой точки $(t,w,\xi,z,v)\in\widetilde{L}_0$ существует обратный оператор $\left[\frac{\partial\Psi(t,w,\xi,z,v)}{\partial v}\right]^{-1}$.

Из условия (13) и эквивалентности уравнений (19) и (23) следует, что для любых точек t, w, z можно выбрать ξ и v так, что $(t,w,\xi,z,v)\in\widetilde{L}_0$.

Пусть (t_*,w_*,z_*) — некоторая точка из $[0,\infty)\times\mathbb{R}^{p+a}$. Выберем $\xi_*\in\mathbb{R}^l,v_*\in\mathbb{R}^d$ так, чтобы $(t_*,w_*,\xi_*,z_*,v_*)\in\widetilde{L}_0$. В силу теорем о неявной функции [7], существуют окрестности $U=U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(w_*)\times U_{\delta_3}(\xi_*)\times U_{\delta_4}(z_*)$, $U_\varepsilon(v_*)$ и единственная функция $v=v(t,w,\xi,z)\in C(U,U_\varepsilon(v_*))$, непрерывно дифференцируемая по (w,ξ,z), такая, что $\Psi(t,w,\xi,z,v(t,w,\xi,z))=0$, $(t,w,\xi,z)\in U$ и $v(t_*,w_*,\xi_*,z_*)=v_*$. Данное утверждение выполнено для всех точек $(t,w,z)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^{p+a}$ и точек ξ, v из некоторых областей соответственно $D_\xi\subset\mathbb{R}^l$, $D_v\subset\mathbb{R}^d$, таких, что $S_l^{-1}S_2x_0\in D_\xi$, $P_d^{-1}P_2x_0\in D_v$. Определим глобальную функцию $v=\eta(t,w,\xi,z):[0,\infty)\times\mathbb{R}^p\times D_\xi\times\mathbb{R}^a\to D_v$ в точке (t_*,w_*,ξ_*,z_*) как $\eta(t_*,w_*,\xi_*,z_*)=v(t_*,w_*,\xi_*,z_*)$. Докажем, что

$$\forall(t,w,\xi,z)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^{p+a}\times D_\xi\,\exists!\,v\in D_v:(t,w,\xi,z,v)\in\widetilde{L}_0\tag{24}$$

Существование v доказано выше, необходимо доказать единственность.

Рассмотрим точки $(t,w,\xi,z,v_i)\in\widetilde{L}_0$, $i=1,2$, т. е. $\Psi(t,w,\xi,z,v_i)=0$. Для функции Ψ ее проекции $\Psi_k(t,w,\xi,z,v)=\widehat{\Theta}_k\Psi(t,w,\xi,z,v)$, $k=\overline{1,d}$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $R_k = \widehat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$, изоморфных $\mathbb{R}$. По теореме о среднем (формула конечных приращений [7]): $\Psi_k(t,w,\xi,z,v_2) - \Psi_k(t,w,\xi,z,v_1) = \frac{\partial}{\partial v}\Psi_k(t,w,\xi,z,\widetilde{v}_k)(v_2-v_1) = 0$, $\widetilde{v}_k \in conv\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1,d}$, следовательно,

$$\widehat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v}\Psi_k(t,w,\xi,z,\widetilde{v}_k)(v_2-v_1) = 0, \quad k = \overline{1,d}. \tag{25}$$

Суммируя выражения (25) по k, получаем: $\Lambda_2(v_2 - v_1) = 0$, значит, $v_2 = v_1$.

Так как в некоторой окрестности каждой точки $(t_*, w_*, \xi_*, z_*) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^{p+a} \times D_\xi$ существует единственное решение $v = \nu(t,w,\xi,z)$ неявного уравнения (23), непрерывное по совокупности переменных t, w, ξ, z вместе со своими частными производными по w, ξ, z, то функция $v = \eta(t,w,\xi,z)$ в этой окрестности совпадает с $\nu(t,w,\xi,z)$ и является решением уравнения (23) с соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v = \eta(t,w,\xi,z)$ единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция $v = \mu(t,w,\xi,z)$, обладающая в некоторой точке $(t_*, w_*, \xi_*, z_*) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^{p+a} \times D_\xi$ теми же свойствами, что и $v = \eta(t,w,\xi,z)$, то, в силу (24), $\eta(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = \mu(t_*, w_*, \xi_*, z_*) = v_*$, следовательно, $\eta(t,w,\xi,z) = \mu(t,w,\xi,z)$ на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^{p+a} \times D_\xi$.

Выберем любую непрерывную функцию $\varphi(t) : [0,\infty) \to D_\xi$, удовлетворяющую начальному условию $\varphi(t_0) = S_l^{-1} S_2\, x_0$, подставим $\xi = \varphi(t)$ в функцию η и обозначим $q(t,w,z) = \eta(t,w,\varphi(t),z)$.

Подставим $v = q(t,w,z)$ и $\xi = \varphi(t)$ в (21), (22):

$$\frac{dw}{dt} = S_p^{-1} A_{s1}^{-1}[-B_{s1} S_p\, w + F\widetilde{f}(t,w,\varphi(t),z,q(t,w,z)) - B_{s2} S_l\, \varphi(t)], \tag{26}$$

$$\frac{dz}{dt} = P_a^{-1} A_1^{-1}[-Q_1 B P_a\, z + Q_1 \widetilde{f}(t,w,\varphi(t),z,q(t,w,z))], \tag{27}$$

Запишем систему (26), (27) в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[-N_2\omega + G(t,\omega)], \tag{28}$$

где $\omega = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$, $N_1 = \begin{pmatrix} S_p^{-1}A_{s1}^{-1} & 0 \\ 0 & P_a^{-1}A_1^{-1} \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} B_{s1}S_p & 0 \\ 0 & Q_1 B P_a \end{pmatrix}$, обозначение для q сохраняется, т. е. $q(t,\omega) = q(t,w,z)$, и $G(t,\omega) = \begin{pmatrix} F\widetilde{f}(t,\omega,\varphi(t),q(t,\omega)) - B_{s2}S_l\,\varphi(t) \\ Q_1\widetilde{f}(t,\omega,\varphi(t),q(t,\omega)) \end{pmatrix}$.

В силу свойств функций Ff, $Q_1 f$ вида (15) и η, φ, функция $G(t,\omega)$ непрерывна по совокупности переменных t, ω и непрерывно дифференцируема по ω на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^{p+a}$. Следовательно, на некотором интервале $t_0 \leqslant t < \varepsilon$ существует единственное решение $\omega(t)$ задачи Коши для уравнения (28) с начальным условием

$$\omega(t_0) = \omega_0, \quad \omega_0 = (w_0, z_0)^T, \tag{29}$$

$(t_0, w_0, \varphi(t_0), z_0, q(t_0,w_0,z_0)) \in \widetilde{L}_0$. Заметим, что если начальная точка $(t_0, x_0) \in L_0$ и $x_0 = S_p\, w_0 + S_l\, \varphi(t_0) + P_a\, z_0 + P_d\, q(t_0,w_0,z_0)$, то начальная точка $(t_0, w_0, \varphi(t_0), z_0, q(t_0,w_0,z_0)) \in \widetilde{L}_0$.

Обозначим $\widehat{\psi}_i(t,\omega) = \psi_i(t, (S_p,\, P_a)\omega + S_l\,\varphi(t) + P_d\, q(t,\omega))$, $i = 1,2$,
$e(t) = \begin{pmatrix} (K_2(t) - B_{s2})S_l\,\varphi(t) + g_1(t) \\ D_2(t)S_l\,\varphi(t) + g_2(t) \end{pmatrix}$, $N_3(t) = \begin{pmatrix} K_1(t)S_p & K_3(t)P_a \\ D_1(t)S_p & D_3(t)P_a \end{pmatrix}$, $\widehat{\psi}(t,\omega) = \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1(t,\omega) \\ \widehat{\psi}_2(t,\omega) \end{pmatrix}$. С учетом новых обозначений и представления (15) уравнение (28) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \widehat{\psi}(t,\omega)].$$

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0, \infty)$ введем срезку функции $\widehat{\psi}(t,\omega)$ по переменной t: $\widehat{\psi}_T(t,\omega) = \begin{cases} \widehat{\psi}(t,\omega), & 0 \leqslant t \leqslant T \\ \widehat{\psi}(T,\omega), & t > T \end{cases}$.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1[(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \widehat{\psi}_T(t,\omega)], \quad t \geqslant 0, \tag{30}$$

и функцию $V(x_{s_1} + x_1) = \frac{1}{2}\left[(H_1 x_{s_1}, x_{s_1}) + (H_2 x_1, x_1)\right] = \frac{1}{2}[(H_1 S_p\, w, S_p\, w) + (H_2 P_a\, z, P_a\, z)] = \frac{1}{2}\left(\widehat{H}\omega, \omega\right) = \widehat{V}(\omega)$, где $\widehat{H} = \begin{pmatrix} S_p^* H_1 S_p & 0 \\ 0 & P_a^* H_2 P_a \end{pmatrix}$ и H_1, H_2 — операторы из (16). Ясно, что $\widehat{H} = \widehat{H}^* > 0$. Градиент функции $\widehat{V}$ равен $grad\,\widehat{V}(\omega) = \widehat{H}\omega$.

Из (16) следует, что для каждого $T > 0$ найдется число $\widehat{R}_T > 0$ такое, что

$$\left(\widehat{H}\omega, N_1\widehat{\psi}(t,\omega)\right) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \|\widehat{\psi}(t,\omega)\| \geqslant \widehat{R}_T. \tag{31}$$

Так как $\widehat{H} = \widehat{H}^* > 0$, то существуют $\widehat{H}^{-1}$ и легко показать, что $\|\omega\|^2 \leqslant \left\|\widehat{H}^{-1}\right\| \left(\widehat{H}\omega, \omega\right)$. Тогда $\left|\left(\widehat{H}\omega, N_1[N_3(t) - N_2]\omega\right)\right| \leqslant \left\|\widehat{H}\right\| \|N_1\| \, \|N_3(t) - N_2\| \left\|\widehat{H}^{-1}\right\| \left(\widehat{H}\omega, \omega\right)$. Выбирая $\widehat{R}_T \geqslant \sqrt{\left\|\widehat{H}^{-1}\right\|}$, получим оценку:

$$\left|\left(\widehat{H}\omega, N_1 e(t)\right)\right| \leqslant \left\|\widehat{H}\right\|^{1/2} \|N_1\| \, \|e(t)\| \left(\widehat{H}\omega, \omega\right), \quad \|\omega\| \geqslant \widehat{R}_T.$$

Увеличивая, если необходимо, радиус $\widehat{R}_T$ в условие (31) так, чтобы выполнялось неравенство $\widehat{R}_T \geqslant \sqrt{\left\|\widehat{H}^{-1}\right\|}$, получаем оценку для производной функции $\widehat{V}(\omega)$ в силу системы (30) [8], которая выполнена при всех ω таких, что $\|\omega\| \geqslant \widehat{R}_T$ и всех $t \geqslant 0$:

$$\dot{\widehat{V}}\Big|_{(30)} = \left(\widehat{H}\omega, N_1[(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \widehat{\psi}_T(t,\omega)]\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left(\widehat{H}\omega, N_1(N_3(t) - N_2)\omega\right)\right| + \left|\left(\widehat{H}\omega, N_1 e(t)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|N_1\| \left(\left\|\widehat{H}\right\| \|N_3(t) - N_2\| \left\|\widehat{H}^{-1}\right\| + \left\|\widehat{H}\right\|^{1/2} \|e(t)\|\right) \left(\widehat{H}\omega, \omega\right) = k(t)\widehat{V}(\omega),$$

где $k(t) = 2\|N_1\| \left(\left\|\widehat{H}\right\| \|N_3(t) - N_2\| \left\|\widehat{H}^{-1}\right\| + \left\|\widehat{H}\right\|^{1/2} \|e(t)\|\right)$ — непрерывная функция при $t \geqslant 0$. Так как неравенство $\dot{v} \leqslant G(t,v)$, $t \geqslant 0$, где $G(t,\widehat{V}) = k(t)\widehat{V}$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения [9], то по лемме 1 из [8] каждое решение $\omega(t) = (w(t), z(t))^T$ уравнения (28) неограниченно продолжаемо.

Проверим, что для выбранной ранее функции $\xi = \varphi(t)$ локальное решение $\omega(t)$, $t \in [t_0, \varepsilon)$ $(t_0 \geqslant 0)$ уравнения (28) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $t_0 \leqslant t < \infty$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $\omega(t)$ задачи Коши (28), (29) единственно на некотором интервале $t_0 \leqslant t < \varepsilon$. Предположим, что решение не единственно на $t_0 \leqslant t < \infty$. Тогда существует $t_* \geqslant \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $\omega(t)$, $\widehat{\omega}(t)$ с общим значением $\omega_* = \omega(t_*) = \widehat{\omega}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, ω_*) в качестве начальной (в силу свойств функций q, φ точка $(t_*, w_*, \varphi(t_*), z_*, q(t_*, w_*, z_*)) \in \widetilde{L}_0$), тогда на некотором интервале $t_* \leqslant t < \varepsilon_1$ должно существовать единственное решение уравнения (28) с начальным значением $\omega(t_*) = \omega_*$, что противоречит предположению.

Найденные непрерывно дифференцируемые компоненты $w(t)$, $z(t)$ глобального решения $\omega(t)$ уравнения (28) определены на всей полуоси $t_0 \leqslant t < \infty$. Следовательно, функция $x(t) = S_p\, w(t) + S_l\, \varphi(t) + P_a\, z(t) + P_d\, q(t, w(t), z(t))$ будет решением уравнения (4) на $[t_0, \infty)$. $\square$

Замечание 1. По построению гладкость решения $x(t)$ следующая: компоненты $S_1x(t), P_1x(t)$ непрерывно дифференцируемы, а $S_2x(t)$, $P_2x(t)$ — непрерывны.

Решение $x(t)$ не является единственным, поскольку зависит от выбранной функции $\xi = \varphi(t)$, которую можно считать функциональным параметром. Если пространство $X_s = 0$, то компонента $\xi = S_l^{-1}S_2x$ отсутствует и единственность решения вытекает из доказательства теоремы.

Для случая, когда $m = n$ и $\lambda A + B$ является регулярным пучком индекса 1, сингулярные пространства $X_s = 0$, $Y_s = 0$ и в статье [6] доказана теорема о существовании и единственности глобального решения задачи Коши (4), (5).

Замечание 2. Условие базисной обратимости оператор-функции $\Phi(u)$ (14) на любой выпуклой оболочке $conv\{u_1, u_2\}$ можно заменить на требование обратимости в любой точке $(t, x_{s_1} + x_{s_2} + x_1 + u) \in L_0$, если вместо условия (13) потребовать, чтобы

$$\forall t \geqslant 0\, \forall x_{s_1} \in X_{s_1}\, \forall x_1 \in X_1\, \exists x_{s_2} \in X_{s_2} \exists!\, u \in X_2 : (t, x_{s_1} + x_{s_2} + x_1 + u) \in L_0.$$

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЦЕПЯМ

Рассмотрим задачу для четырехполюсного радиотехнического фильтра с нелинейными сопротивлением φ и проводимостью h, линейными сопротивлениями r_1, r_2 и инерционными элементами — индуктивностью L и емкостью C (см. рис. 1). Ток $I(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ задан, параметры L, C, r_1, r_2 являются положительными и вещественными.

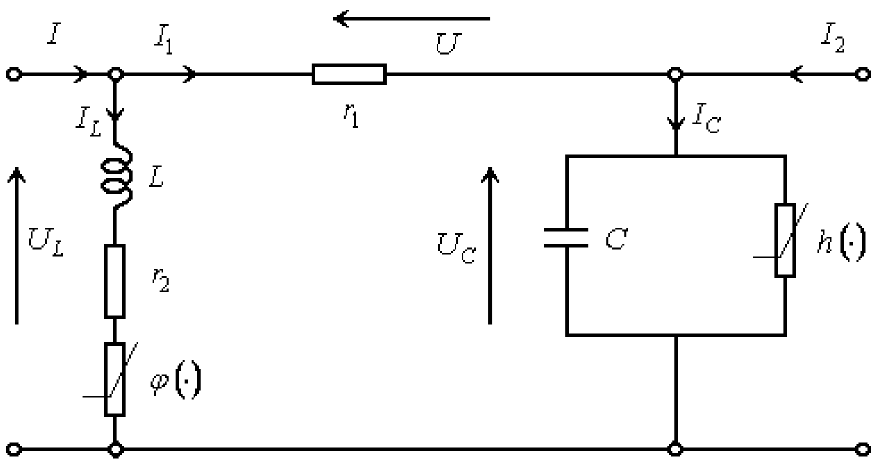

Рис. 1. *Схема электрической цепи*

Уравнения Кирхгофа и связей на элементах цепи имеют вид:

$$I_1 + I_L = I, \quad I_1 + I_2 = I_C, \quad U_L = U + U_C.$$

$$U = r_1 I_1, \quad U_L = L\frac{dI_L}{dt} + r_2 I_L + \varphi(I_L), \quad I_C = C\frac{dU_C}{dt} + h(U_C)$$

Обозначив $x_1 = I_L$, $x_2 = U_C$, $x_3 = I_1$, $x_4 = I_2$, получим систему из трех уравнений, описывающую модель цепи:

$$L\frac{dx_1}{dt} + r_2\, x_1 - x_2 - r_1\, x_3 \;=\; -\varphi(x_1), \tag{32}$$

$$C\frac{dx_2}{dt} - x_3 - x_4 \;=\; -h(x_2), \tag{33}$$

$$x_1 + x_3 \;=\; I(t). \tag{34}$$

Векторная форма системы (32)–(34) имеет вид

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t,x)\,, \tag{35}$$

где $A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} r_2 & -1 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t,x) = \begin{pmatrix} -\varphi(x_1) \\ -h(x_2) \\ I(t) \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Пусть $\varphi(x_1),\ h(x_2) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, тогда $f(t,x) \in C\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3\right)$ и $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^4$. Ранг пучка $\lambda A + B$ равен 3.

Анализируя решение уравнения (1), находим пространства $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} = Lin\{s_i\}_{i=1}^3$, $X_{s_1} = Lin\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_{s_2} = Lin\{s_3\}$, $X_r = Lin\{p\}$, $Y_s = Lin\{g_i\}_{i=1}^2$, $Y_r = Lin\{q\}$ из разложений (6), где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем проекторы $S = S_1 + S_2 : \mathbb{R}^4 \to X_s$, $S_k : \mathbb{R}^4 \to X_{s_k}$, $k = 1,2$, $P : \mathbb{R}^4 \to X_r$, $F : \mathbb{R}^3 \to Y_s$, $Q : \mathbb{R}^3 \to Y_r$, введенные в п. 1, относительно базисов пространств $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $A_s = FA|_{X_s}$ из представления (3) имеет вид $A_s = (A_{s1}\ 0) = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix}$. Так как $L \neq 0$, $C \neq 0$, оператор $A_{s1} : X_{s_1} \to Y_s$ имеет обратный $A_{s1}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$. Матрица A_{s1}^{-1} одноименного оператора, расширенного на пару пространств $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, примет вид:

$$A_{s1}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA = 0$, оператор $A_r = QA|_{X_r} = A_2$ также нулевой. Если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$ и, значит, оператор $B_r = QB|_{X_r} = B_2$ обратим. Очевидно, пучок $\lambda A_r + B_r$ (7) регулярный и удовлетворяет (8). Пространства из разложений (9) таковы: $X_r = X_2,\ Y_r = Y_2,\ X_1 = 0,\ Y_1 = 0$, операторы $P_2 = P,\ Q_2 = Q,\ Q_1 = 0,\ P_1 = 0$.

Вычислим проекции вектора $x:\quad z = P_1 x = 0$

$$w = S_1 x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix},\ \xi = S_2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix},$$

$$u = P_2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 + x_3 \\ -(x_1 + x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \\ -v \end{pmatrix},\ v = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что выбранные для проекций обозначения не совпадают с соответствующими обозначениями из п. 2.

Найдем

$$Q_2 f(t,x) = \begin{pmatrix} -r_1 I(t) \\ 0 \\ I(t) \end{pmatrix}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - B\right] P_2 = -BP_2.$$

Уравнение $BP_2 x = Q_2 f(t,x)$ эквивалентно уравнению (34), которое можно записать в виде

$$v = I(t). \tag{36}$$

Согласно условию (13) необходимо, чтобы $\forall t \geqslant 0\, \forall w \in X_{s_1}\, \forall z \in X_1\, \exists \xi \in X_{s_2} \exists u \in X_2$ такие, что выполнено (36) или, что равносильно, $\forall t \geqslant 0\ \exists v \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (36). Поскольку функция $I(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ задана, то, очевидно, условие (13) выполнено.

Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$, а сужение проектора Q_2 на Y_2 является единицей в Y_2, аддитивным разложением единицы в Y_2 будет сужение Θ_1 проектора Q_2 на одномерное подпространство его образов. Ясно, что сужение Λ оператора $\widehat{\Lambda} = -Q_2 BP_2 = -QB$ на одномерное подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2. Следовательно, для любых $u = v,\ u = w \in X_2$, удовлетворяющих (36), функция (14) является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{v, w\} \subset X_2$.

Представим проекцию $Ff(t,x)$ $(Q_1 f(t,x) = 0)$ в виде (15):

$$Ff(t,x) = \psi_1(t,x) + g_1(t), \quad \psi_1(t,x) = \begin{pmatrix} -\varphi(x_1) \\ -h(x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} r_1 I(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$K_i(t),\ i = \overline{1,3}$, — нулевые матрицы.

Найдем $A_{s1}^{-1}\psi_1(t,x) = \begin{pmatrix} -L^{-1}\varphi(x_1) \\ -C^{-1}h(x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$. Выберем $H_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix}$. Очевидно, что $H_1 = H_1^* > 0,\ \ (H_1 S_1 x, A_{s1}^{-1}\psi_1(t,x)) = -\varphi(x_1)\, x_1 - h(x_2)\, x_2$.

Предположим, что для любого конечного интервала $0 \leqslant t \leqslant T$ найдется $R_T > 0$ такое, что

$$-\varphi(x_1)\, x_1 - h(x_2)\, x_2 \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 : \|S_1 x\| = \sqrt{3x_1^2 + x_2^2} \geqslant R_T \tag{37}$$

Тогда выполнено условие (16) теоремы 1.

Итак, пусть для любого $T > 0$ существует $R_T > 0$ такое, что функции $\varphi(x_1)$, $h(x_2) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ удовлетворяют условию (37). Тогда по теореме 1 для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^4$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению (34), существует решение $x(t)$ уравнения (35) на полуоси $t_0 \leqslant t < \infty$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Рассмотрим частные случаи. Пусть

$$\varphi(y) = \alpha_1 y^{2k-1},\ h(y) = \alpha_2 y^{2r-1},\ k,\ r \in \mathbb{N},\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2,\ y \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Заметим, что подобные нелинейные сопротивления и проводимости встречаются в реальных радиотехнических системах. Очевидно, для нелинейных функций вида (38) выполнены условия теоремы 1, как и для функций

$$\varphi(y) = \alpha_1 y^{\frac{1}{2k+1}},\ h(y) = \alpha_2 y^{\frac{1}{2r+1}},\quad k,\ r \in \mathbb{N},\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2,\ y \in \mathbb{R}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказана теорема, при выполнении условий которой глобально разрешимо ДАУ с сингулярным пучком операторов в случае, когда соответствующая система дифференциально-алгебраических уравнений недоопределена. В дальнейшем планируется рассмотреть случай переопределенной системы и обобщенный случай, когда имеется произвольный сингулярный пучок операторов $\lambda A + B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и размерности n, m пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ не связаны неравенствами.

Рассмотрено приложение к нелинейным радиотехническим цепям. Получены ограничения, которые обеспечивают гладкую эволюцию системы в течение сколь угодно большого временного периода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Руткас А. Г. Разрешимость полулинейных дифференциальных уравнений с сингулярностью / А. Г. Руткас // Украинский математический журнал. — 2008. — Т. 60, № 2. — С. 225–239.

[2] Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями / Л. А. Власенко. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006. — 273 с.

[3] Зубова С. П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве / С. П. Зубова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 192–198.

[4] Баскаков А. Г. О существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной / А. Г. Баскаков, М. К. Чернышов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2002. — № 2. — С. 44–49.

[5] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[6] Руткас А. Г. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — № 1 (111). — С. 135–145.

[7] Шварц Л. Анализ. Т. 1. / Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — 822 с.

[8] Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике / М. С. Филипковская // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. — 2012. — № 1015, Вип. 19. — С. 306–319.

[9] Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. — М.: Мир, 1964. — 168 с.

[10] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин — М.: Наука, 1974. — 331 с.

REFERENCES

[1] Rutkas A. G. Solvability of semilinear dierential equations with singularities. [Rutkas A. G. Razreshimost' polulinejnyx differencial'nyx uravnenij s singulyarnost'yu]. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal — Ukrainian mathematical journal*, 2008, Vol. 60, no. 2, pp. 225–239.

[2] Vlasenko L.A. Evolutionary models with implicit and degenerate differential equations. [Vlasenko L.A. E'volyucionnye modeli s neyavnymi i vyrozhdennymi differencial'nymi uravneniyami]. Dnepropetrovsk: System technologies, 2006, 273 p.

[3] Zubova S.P. On the Solvability Of the Cauchy Problem for the Descriptor Quasi-Regular Equations in Banach Spaces. [Zubova S. P. O razreshimosti zadachi Koshi dlya deskriptornogo psevdoregulyarnogo uravneniya v banaxovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 20113, no. 2, pp. 192–198.

[4] Baskakov A.G., Chernyshov M.K. On Existence Of Bounded Solutions Of Differential Equations With The Irreversible Operator In The Derivative. [Baskakov A.G., Chernyshov M.K. O sushhestvovanii ogranichennyx reshenij differencial'nyx uravnenij s neobratimym operatorom pri proizvodnoj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2002, no. 2, pp. 44–49.

[5] Gantmacher F.R. The Theory of matrices. [Gantmaxer F.R. Teoriya matric]. Moscow: Nauka, 1988, 552 p.

[6] Rutkas A.G., Filipkovskaya M.S. Continuation of solutions of a class of differential-algebraic equations. [Rutkas A.G., Filipkovskaya M.S. Prodolzhenie reshenij odnogo klassa differencial'no-algebraicheskix uravnenij]. *Zhurnal vychislitel'noj i prikladnoj matematiki — Journal of computational and applied mathematics*, 2013, no. 1 (111), pp. 135–145.

[7] Schwartz L. Analysis. Vol. 1. [Shvarc L. Analiz. T. 1]. Moscow: Mir, 1972, 822 p.

[8] Filipkovskaya M.S. The continuation of solutions of semilinear differential-algebraic equations and applications in nonlinear electronics. [Filipkovskaya M. S. Prodolzhenie reshenij polulinejnyx differencial'no-algebraicheskix uravnenij i prilozheniya v nelinejnoj radiotexnike]. *Visnik XNU im. V. N. Karazina. Ser. Matematichne modelyuvannya. Informacijni texnologiï. Avtomatizovani sistemi upravlinnya — Bulletin of the henna ei. C. N. Karazin. Sir. Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems*, 2012, no. 1015, iss. 19, pp. 306–319.

[9] La Salle J., Lefsetz C. Stability analysis of the direct method of Lyapunov. [La-Sall' Zh., Lefshec S. Issledovanie ustojchivosti pryamym metodom Lyapunova]. Moscow: Mir, 1964, 168 p.

[10] Pontryagin P.S. Ordinary differential equations. [Pontryagin L.S. Obyknovennye differencial'nye uravneniya]. Moscow: Nauka, 1974, 331 p.

Филипковская М. С., аспирант кафедры математического моделирования и программного обеспечения, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина
E-mail: fmarias@mail.ru
Тел.: +380 097 7179551

Filipkovskaya M. S., postgraduate of the mathematical modeling and software development department, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov, Ukraine
E-mail: fmarias@mail.ru
Tel.: +380 097 7179551