УДК 517.988.63

О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

М. И. Сухов

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 28.05.2013 г.

Аннотация: настоящая работа посвящена исследованию разрешимости задачи Коши для функционально–дифференциального включения нейтрального типа в функциональном пространстве Соболева $W_p^1[-h,T]$, $p > 1$. Построено эквивалентное интегральное включение, соответствующее исходной задаче. В пространстве $L_p[0,T]$, $p > 1$ введен эквивалентный интегральный оператор, соответствующий исследуемой задаче Коши для функционально - дифференциального включения нейтрального типа и найдены условия, при выполнении которых указанный оператор будет (k,χ)–уплотняющим, а также будет иметь неподвижную точку. Доказана теорема о существовании решения исходной задачи Коши для функционально – дифференциального включения нейтрального типа.

Ключевые слова: многозначное отображение, задача Коши, эквивалентный интегральный оператор, уплотняющий оператор, подлинейный рост, неподвижная точка.

ON THE FIXED POINT OF THE EQUIVALENT INTEGRAL OPERATOR TO THE CAUCHY PROBLEM FOR A FUNCTIONAL - DIFFERENTIAL INCLUSION OF NEUTRAL TYPE

M. I. Suhov

Abstract: The Cauchy problem for a functional - differential inclusion of neutral type in a functional space of Sobolev $W_p^1[-h,T]$, $p > 1$ is investigated. The equivalent integral inclusion corresponding to this problem is constructed. The equivalent integral operator corresponding to this initial problem in a space $L_p[0,T]$, $p > 1$ is introduced. The conditions for this operator to be (k,χ)–condensing are obtained. Applying fixed point theorem for the condensing multimaps the existense of a solution of the Cauchy problem for a functional–differential inclusion of neutral type is proved.

Keywords: multivalued map, Cauchy problem, equivalent integral operator, condensing operator, sublinear growth, fixed point.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время функционально–дифференциальные включения нейтрального типа (ФДВНТ) привлекают к себе все большее внимание. Это связано с их широким применением в различных прикладных сферах, таких как теория оптимального контроля, теория игр, математическая экономика и т. д. Начало систематическому изучению ФДВНТ было положено в середине XX столетия А. Д. Мышкисом [1], [2]. Задача Коши для ФДВНТ исследовалась также М. Киселевичем [3]. Остановимся более подробно на отличиях настоящей статьи от указанной работы М. Киселевича, где задача Коши для ФДВНТ рассматривается в пространстве абсолютно непрерывных функций с производной, принадлежащей пространству L_1 суммируемых функций. Мы же рассматриваем случай, когда производная искомой функции принадлежит пространству L_p $(p > 1)$. Такой взгляд позволяет применить теорию многозначных уплотняющих операторов [4] и упростить многие рассуждения из [3]. Статья организована следующим образом: В пункте I приведены сведения из теории мер некомпактности и уплотняющих операторов. В пункте II определена задача Коши для ФДВНТ, построено эквивалентное интегральное включение. В пункте III построен эквивалентный интегральный оператор и доказано, что он является уплотняющим. В пункте IV доказано существование неподвижной точки эквивалентного интегрального оператора и, таким образом, доказано существование решения задачи Коши для ФДВНТ.

I. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В РАБОТЕ

Определение 1. *Многозначным отображением F пространства X в пространство Y называется соответствие, при котором каждому элементу x из X сопоставляется некоторое непустое множество $F(x)$ принадлежащее пространству Y. Через $P(Y)$ обозначается совокупность всех непустых подмножеств пространства Y. Тогда данное соответствие можно представить в следующем виде:*

$$F : X \to P(Y).$$

Пусть (X, ρ_x) и (Z, ρ_z) метрические пространства. Через $K(Z)$ или $Kv(Z)$ обозначается совокупность непустых компактных или компактных выпуклых подмножеств пространства Z.

Определение 2. *Многозначное отображение $F : X \to K(Z)$ называется полунепрерывным сверху, если для каждого открытого множества V, принадлежащего пространству Z, такого что $F(x) \subset V$, $x \in X$существует окрестность U точки x для которой выполнено $F(U) \subset V$.*

Теорема 1. *Пусть $F : X \to K(Y)$ полунепрерывное сверху многозначное отображение. Если $A \subset X$ - относительно компактно, тогда $F(A)$ — также относительно компактно [4].*

Определение 3. *Пусть M некоторое множество в метрическом пространстве R и ε — некоторое положительное число. Множество A из R называется ε-сетью для M, если для любой точки x из M найдется хотя бы одна точка a из A такая, что $\rho(x, a) \leqslant \varepsilon$.*

Определение 4. *Пусть Ω - некоторое ограниченное множество. Мерой некомпактности Хаусдорфа множества Ω (обозначается $\chi(\Omega)$) назовем следующее выражение:*

$$\chi(\Omega) = \inf \varepsilon\{\textit{для которых существует конечная } \varepsilon\textit{-сеть множества } \Omega.\}$$

Теорема 2 (Критерий Хаусдорфа)**.** *Пусть X метрическое пространство. Для компактности множества K, лежащего в X необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы для любого положительного ε существовала конечная ε-сеть множества K.*

Определение 5. *Пусть A некоторое подмножество метрического пространства (Y, ρ). Через $W\varepsilon(A)$ обозначается ε-окрестность множества A такая, что $W\varepsilon(A) = \langle y : \rho(y, A) < \varepsilon\rangle$, где $\rho(y, A) = \inf_{x \in A} \rho(y, x)$ — расстояние от точки y до множества A.*

Определение 6. *Обозначим через $Cb(Y)$ совокупность всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства (Y, ρ). Тогда функция $h : Cb(Y) \times Cb(Y) \to R_+$, определенная как*

$$h(A, B) = \inf \varepsilon \left\langle \varepsilon : A \subset W\varepsilon(B), B \subset W\varepsilon(A) \right\rangle,$$

есть метрика на множестве $Cb(Y)$ и называется метрикой Хаусдорфа.

Определение 7. *Пусть χ — есть мера некомпактности Хаусдорфа и $0 \leqslant k < 1$. Многозначное отображение $F : X \to K(Y)$ назовем (k, χ)-уплотняющим, если $\chi(F(\Omega)) \leqslant k\chi(\Omega)$, для любого Ω из X.*

Определение 8. *Точка $x_0 \in X$ называется неподвижной для отображения $F : X \to P(Y)$, если $x_0 \in F(x_0)$.*

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА. ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Пусть $F : C[-h, T] \times Lp[-h, T] \to Kv(Lp[0, T])$ — некоторое многозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:
a1. Для любого фиксированного $y \in Lp[-h, T]$ отображение $F(x, y)$ — является полунепрерывным сверху.
a2. Для любого фиксированного $x \in C[-h, T]$ отображение $F(x, y)$ — является k-Липшицевым относительно метрики Хаусдорфа h на $Kv(Lp[0, T])$, $0 \leqslant k < 1$, т.Ёе.

$$h(F(x, y_1), F(x, y_2)) \leqslant k \left\| y_1 - y_2 \right\|.$$

a3. Отображение F удовлетворяет условию подлинейного роста т. е.

$$h(F(x, 0), 0) \leqslant C + \lambda \left\| x \right\| \text{ где } \quad \lambda > 0, C \in R.$$

Рассмотрим задачу Коши для функционально–дифференциального включения нейтрального типа

$$\begin{aligned} x'_{[0,T]} &\in F(x, x'), \\ x(s) &= \varphi(s), s \in [-h, 0], \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где через $x'_{[0,T]}$ обозначается сужение производной функции x на отрезок $[0, T]$.

Определение 9. *Решением задачи Коши для ФДВНТ (4.1) является некоторая функция x_0из пространства Соболева $W_p^0[-h, T], p > 1$ (т.е. $x_0 \in C[-h, T]$, $x'_0 \in L_p[-h, T]$) для которой выполнено:*

$$\begin{aligned} x'_{0[0,T]} &\in F(x_0, x'_0) \\ x_0(s) &= \varphi(s), s \in [-h, 0] \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Проведем некоторые построения.

Пусть функция $w \in Lp[0, T]$. По данной функции построим функцию $\widetilde{w} \in Lp[-h, T]$ следующим образом

$$\widetilde{w}(t) = \begin{cases} w(t) & t \in (0, T], \\ \varphi'(t) & t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Введем оператор $G : Lp[0, T] \to C[-h, T]$

$$G(w) = \varphi(4.1) + \int\limits_0^t \widetilde{w(s)ds}.$$

Теорема 3. *Задача Коши (4.1) эквивалентна интегральному включению*

$$w \in F(Gw, \widetilde{w}).$$

Доказательство. Заметим, что если некоторая функция x_0 является решением задачи Коши (4.1), тогда выполнены условия:

$$x'_{0[0,T]} \in F(x_0, x'_0)m, \qquad x_0(s) = \varphi(s), s \in [-h, 0].$$

Принимая во внимание построение функции $\widetilde{w}$ и оператора G, определив $x_0 = Gw$ получаем требуемое.

III. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Пусть множество $B \subset Lp[0,T]$ — ограниченно. Рассмотрим оператор $H : B \times B \to Kv(Lp[0,T])$, определенный равенством

$$H(x, y) = F(Gx, \widetilde{y}), \tag{4.3}$$

где F — многозначное отображение, определенное в пункте II настоящей статьи.

Теорема 4. *Для оператора H, определенного равенством (4.3) выполнено*

1) Для любого фиксированного $y \in B$ оператор $H(x, y)$ — является полунепрерывным сверху.

2) Для любого фиксированного $x \in B$ оператор $H(x, y)$ — является k-Липшицевым относительно метрики Хаусдорфа h на $Kv(Lp[0,T])$, $0 \leqslant k < 1$, т. е. $h(H(x, y_1), H(x, y_2)) \leqslant k\,\|y_1 - y_2\|$.

Доказательство. 1) $H(x, y) = F(Gx, \widetilde{y})$. Зафиксируем y. Пусть $u \subset G(B)$ и V — открытое множество, такое что $F(u, y) \subset V$. В силу условия a1 существует окрестность U точки u такая, что $F(U, y) \subset V$. Заметим, что существует $u_1 \in B$ такая, что $u = Gu_1$. Значит, $H(u_1, y) = F(Gu_1, y) = F(u, y) \subset V$. В силу взаимоoднозначности и непрерывности оператора G существует окрестность U_1 точки u_1, такая что $U = GU_1$. Тогда получаем $H(U_1, y) = F(GU_1, y) = F(U, y) \subset V$.

2) $h(H(x, y_1), H(x, y_2)) = h(F(Gx, \widetilde{y}_1), F(Gx, \widetilde{y}_2)) \leqslant k\,\|\widetilde{y}_1 - \widetilde{y}_2\| = k\,\|y_1 - y_2\|$ (в силу построения функций $\widetilde{y}$).

Требуемое доказано.

По оператору H построим новый оператор $\widetilde{H}$ следующим образом

$$\widetilde{H}(x) = H(x, x), \text{ где } x \in B. \tag{4.4}$$

Теорема 5. *Оператор $\widetilde{H}$, определенный равенством (4.4) является (k, χ)–уплотняющим относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ для произвольного множества $\Omega \subset B$, т. е. $\chi(\widetilde{H}(\Omega)) \leqslant k\chi(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset B$, $\varepsilon > 0$ и S — есть конечная $\chi(\Omega) + \varepsilon$-сеть для множества Ω. Покажем, что $H(\Omega, S)$ — есть относительно компактная $k(\chi(\Omega) + \varepsilon)$-сеть для $\widetilde{H}(\Omega)$.

Относительная компактность $H(\Omega, S)$ следует из следующего равенства

$$H(\Omega, S) = F(G(\Omega), \widetilde{S}),$$

где $\widetilde{S} = \langle \widetilde{a} : a \in S \rangle$ Ω — ограниченное множество в $Lp[0,T]$. В силу построения оператора G множество $G(\Omega)$ относительно компактно в пространстве $C[-h, T]$, $\widetilde{S}$–конечное множество.

Таким образом, из условия а1 и теоремы 1 из пункта I данной статьи следует относительная компактность $F(G(\Omega), \widetilde{S})$.

Пусть $z \in \widetilde{H}(\Omega)$, это значит, что $z \in H(x,x)$, где $x \in \Omega$. Возьмем y из S такой, что $\|x-y\| \leqslant \chi(\Omega)+\varepsilon$

Из условия а2 следует, что существует $z_1 \in H(x,y) \subset H(\Omega, S)$ такой, что

$$\|z-z_1\| \leqslant h(H(x,x), H(x,y)) \leqslant k\,\|x-y\| \leqslant k(\chi(\Omega)+\varepsilon).$$

Поскольку $H(\Omega, S)$ относительно компактна, то существует конечная $(k\varepsilon)$-сеть S_1 множества $H(\Omega,S)$. Таким образом S_1 является $k(\chi(\Omega)+2\varepsilon)$ конечной сетью для $\widetilde{H}(\Omega)$.

Имеем следующее неравенство $\chi(\widetilde{H}(\Omega)) \leqslant k(\chi(\Omega)+2\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $\chi(\widetilde{H}(\Omega)) \leqslant k\chi(\Omega)$. Таким образом, требуемое доказано.

IV. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФДВНТ

Теорема 6. *Пусть F – исходное многозначное отображение, определенное в пункте II настоящей работы, тогда*

1) если $\|x\| \leqslant R$, то $\widetilde{H}(x) \subseteq B[0,R]$. Где $B[0,R] \subset Kv(Lp[0,T])$ есть замкнутый шар с центром в нуле и радиусом равным R.

2) Существует неподвижная точка оператора $\widetilde{H}$, определенного равенством (4.4).

3) Исходная задача Коши (4.1) имеет решение.

Доказательство. 1) $\widetilde{H}(x) = H(x,x) = F(Gx, \widetilde{x})$

$$h(F(Gx,\widetilde{x}),0) \leqslant h(F(Gx,\widetilde{x}),F(Gx,0)) + h(F(Gx,0),0) \leqslant h(F(Gx,\widetilde{x}),F(Gx,0)) + C + \lambda\,\|Gx\|\,.$$

Заметим, что $h(F(Gx,\widetilde{x}),F(Gx,0)) \leqslant k\,\|\widetilde{x}\|$ (в силу условия Липшица а2.)

$$\|\widetilde{x}\| = \max(\|x\|\,, \|\varphi'\|).$$

Пусть $R \geqslant \max(\|x\|\,, \|\varphi'\|)$, тогда справедлива оценка $\|\widetilde{x}\| \leqslant R$.

Исходя из этого получаем $h(F(Gx,\widetilde{x}),F(Gx,0)) \leqslant kR$, отсюда, в свою очередь, следует

$$h(F(Gx,\widetilde{x}),0) \leqslant kR + C + \lambda\,\|Gx\|\,.$$

Введем в рассмотрение следующие нормы

$$\|F(Gx,\widetilde{x})\| = h(F(Gx,\widetilde{x}),0), \qquad \|x\|_* = \max_t \exp(-\eta t)\,\|x\|\,, \quad \eta > 0.$$

Рассмотрим шар радиуса R в новой норме. Пусть $R \geqslant \max(\|x\|_*\,, \|\varphi'\|_*)$. Тогда получаем

$$\|F(Gx,\widetilde{x})\|_* = \max_t \exp(-\eta t)\,\|F(Gx,\widetilde{x})\| \leqslant \max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda\,\|Gx\|) \leqslant$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda\,\|\varphi_0\| + \lambda \int\limits_0^t \|\widetilde{x}(s)\| \quad ds) =$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda\,\|\varphi_0\| + \lambda \int\limits_0^t \exp(\eta s)\exp(-\eta s)\,\|\widetilde{x}(s)\| ds) \leqslant$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda\,\|\varphi_0\| + \lambda \int\limits_0^t \exp(\eta s)\max_s \exp(-\eta s)\,\|\widetilde{x}(s)\| ds) =$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \lambda \int\limits_0^t \exp(\eta s) \|\widetilde{x}(s)\|_* ds) =$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \lambda \|\widetilde{x}(s)\|_* \int\limits_0^t \exp(\eta s) ds) =$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \frac{\lambda}{\eta} \|\widetilde{x}(s)\|_* (\exp(\eta t) - 1)) \leqslant$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \frac{\lambda}{\eta} \|\widetilde{x}(s)\|_* \exp(\eta t)) \leqslant$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \exp(\eta t)\frac{\lambda}{\eta} R).$$

Мы получили следующее

$$\|x\|_* \leqslant R, \quad \|F(Gx, \widetilde{x})\|_* \leqslant \max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \exp(\eta t)\frac{\lambda}{\eta} R).$$

Проведем оценку радиуса R

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \exp(\eta t)\frac{\lambda}{\eta} R) \leqslant R,$$

$$\max_t \exp(-\eta t)(kR + C + \lambda \|\varphi_0\|) + \max_t \exp(-\eta t) \exp(\eta t)\frac{\lambda}{\eta} R) \leqslant R.$$

Учитывая, что $\max_t \exp(-\eta t) = 1$ при $t = 0$, получаем

$$kR + C + \lambda \|\varphi_0\| + \frac{\lambda}{\eta} R \leqslant R, \quad C + \lambda \|\varphi_0\| \leqslant (1 - k - \frac{\lambda}{\eta}) R,$$

$1 - k > 0$, тогда, взяв $\eta > \frac{\lambda}{1-k}$, получаем необходимую оценку радиуса R

$$R \geqslant \frac{C + \lambda \|\varphi_o\|}{1 - k - \frac{\lambda}{\eta}}.$$

Итак, если $\|x\|_* \leqslant R$, то $\|F(Gx, \widetilde{x})\|_* \leqslant R$.

Переходя к исходной норме, получим

$$\max_t \exp(-\eta t) \|x\| \leqslant R, \quad \max_t \exp(-\eta t) \|F(Gx, \widetilde{x})\| \leqslant R,$$

т. е. $\|x\| \leqslant R$, $\|F(Gx, \widetilde{x})\| \leqslant R$.

2) В теореме 5 пункта III данной работы было показано, что оператор $\widetilde{H}(x) = H(x, x)$ является (k, χ)–уплотняющим относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ для произвольного множества $\Omega \subset B$.

Принимая во внимание результат пункта 1) текущей теоремы получаем, что оператор $\widetilde{H}(x) = H(x, x)$ имеет неподвижную точку w_0 [4], т.е. $w_0 \in \widetilde{H}(w_0)$.

3) Очевидно, что функция w_0 из пункта 2) текущей теоремы является решением интегрального включения $w_0 \in F(Gw_0, \widetilde{w}_0)$.

Применяя теорему 3 пункта II данной статьи, заключаем: функция $x_0 = Gw_0$ является решением задачи Коши (4.1) т.е.

$$x'_{0[0,T]} \in F(x_0, x'_0), \quad x_0(s) = \varphi(s), s \in [-h, 0].$$

Требуемое доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом // М.–Л.: Гостехиздат, 1951. — 255 с.

[2] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений // М: КомКнига, 2005. — 214 с.

[3] Michal Kisielewicz. Differential inclusions and Optimal control. Polish Scientific Publishers, 1990. — 240p.

[4] M. Kamenskii', V. Obukhovskii', P. Zecca. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. ISSN0 941-813 XWalterdeGruyterBerlinNewYork, 2001. — 231p.

[5] Басова М.М. Общая краевая задача для функционально – дифференциальных включений с бесконечным запаздыванием / М.М. Басова, В.В. Обуховский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2007. — № 1. — С. 121–129.

[6] Обуховский В.В. О задаче Коши для функционально – дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве / В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 192–209.

[7] Гельман Б.Д. Многозначные сжимающие отображения и их приложения / Б.Д. Гельман // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 74–86.

[8] Гельман А.Б. Об одном классе многозначных отображений с некомпактными образами / А.Б. Гельман // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 162–169.

REFERENCES

[1] Myshkis A.D. Linear differential equations with retarded argument. [Myshkis A. D. Linejnye differencial'nye uravneniya s zapazdyvayushhim argumentom]. Moscow–Leningrad: Gostexizdat, 1951. 255 p.

[2] Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovsky V.V. Introduction to the theory of multifunctions and dierential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij i differencial'nyx vklyuchenij]. Moscow: KomKniga, 2005, 214 p.

[3] Michal Kisielewicz. Differential inclusions and Optimal control. Polish Scientific Publishers, 1990, 240 p.

[4] Kamenskii M.M., Obukhovskii V.V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. ISSN0 941-813 XWalterdeGruyterBerlinNewYork, 2001, 231 p.

[5] Basova M.M., Obukhovskii V.V. The General boundary value problem for functional differential inclusions with infinite delay. [Basova M.M., Obuxovskij V.V. Obshhaya kraevaya zadacha dlya funkcional'no – differencial'nyx vklyuchenij s beskonechnym zapazdyvaniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2007, no. 1, pp. 121–129.

[6] Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G. On the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with impulsive characteristics in a banach space. [Obuxovskij V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funkcional'no – differencial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s impul'snymi xarakteristikami v banaxovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192–209.

[7] Gelman B.D. Multivalued contraction maps and their applications. [Gel'man B.D. Mnogoznachnye szhimayushhie otobrazheniya i ix prilozheniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 1, pp. 74–86.

[8] Gelman B.D. About one class of multivalued mappings with non-compact images. [Gel'man A.B. Ob odnom klasse mnogoznachnyx otobrazhenij s nekompaktnymi obrazami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 162–169.

Сухов Максим Иванович, аспирант кафедры высшей математики Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: 2009okt@mail.ru

Suhov Maxim Ivanovich, Postgraduate student, the Department of higher mathematics, the Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 2009okt@mail.ru