УДК 517.972

О МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Ю. Сухарев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 05.03.2014 г.

Аннотация: рассматривается задача Коши для однородного уравнения Шрёдингера со случайным коэффициентом, заданным характеристическим функционалом. В результате преобразований из исходной стохастической задачи получена детерминированная задача с частными и вариационными производными. С использованием преобразования Фурье найдена формула решения детерминированной задачи. Далее получены формулы математического ожидания и второй моментной функции решения исходной задачи. Рассмотрен случай, когда коэффициент в уравнении Шрёдингера распределён по гауссовскому закону распределения, и найдена формула математического ожидания в этом случае.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, вариационная производная, моментные функции, случайный процесс.

ON THE MOMENT FUNCTIONS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HOMOGENOUS SCHRÖDINGER EQUATION WITH A RANDOM COEFFICIENT

A. U. Sukharev

Abstract: we consider the Cauchy problem for the homogenous Schrödinger equation with a random coefficient, defined by a characteristic functional. As a result of transformations, the determinate problem with partial and variational derivatives was obtained from the original stochastic problem. The formula for the solution of the determinate problem was derived by using the Fourier transform. Then we got the formulas for the expected value and second moment function for the solution of the original problem. The case was considered when the coefficient in the Schrödinger equation is normally distributed; the formula for the expected value was derived in this case.

Keywords: Schrödinger equation, variational derivative, moment function, random process.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть R — вещественная ось, C — комплексная плоскость, $[t_0, t_1] = T \subset R$, $L_1(T)$ — пространство суммируемых на отрезке T функций, $F_x[f](\xi)$ — преобразование Фурье [1] по переменной x, F_ξ^{-1} — обратное преобразование Фурье по переменной ξ, знак $\overset{x}{*}$ обозначает свертку функций по переменной x.

Пусть X — банахово пространство функций на отрезке T, и $y : X \to C$. Если дифференциал Фреше [7, с. 480] $dy(x_0, h)$ этого функционала в точке x_0 имеет вид

$$dy(x_0, h) = \int\limits_T \varphi(t, x_0) h(t)\, dt,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $\varphi : T \times X \to C$, то $\varphi(t, x_0)$ называется вариационной производной [2, стр. 13] функционала y в точке x_0 и обозначается $\frac{\delta y(x_0)}{\delta x(t)}$.

Пусть Ω — пространство элементарных событий. Случайным процессом будем называть семейство случайных величин $\varepsilon\,(t) = \varepsilon\,(t, \omega)$, $t \in R$, $\omega \in \Omega$, причём каждая из случайных величин есть функция от элементарного исхода ω. В дальнейшем случайный процесс обозначается просто $\varepsilon\,(t)$, при этом мы будем считать, что названия случайный процесс и случайная функция — синонимы.

Задача Коши для уравнения Шрёдингера имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = i\varepsilon(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \;\; T = [t_0, t_1]; \\ u(t_0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

где u — искомая функция, $\varepsilon(t)$, $u_0(x)$ — независимые случайные процессы, т.е. при $t \in T$, $x \in R$ случайные величины $\varepsilon(t)$ и $u_0(x)$ независимы.

Будем считать, что случайный процесс ε задан характеристическим функционалом [2, с. 192], т.е. известно

$$\varphi(v) = M\left[\exp\left(i\int\limits_T \varepsilon(s)v(s)ds\right)\right],$$

где M — знак математического ожидания по функции распределения процесса ε, $v \in L_1(T)$.

Требуется найти моментные функции решения задачи (1), (2).

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

Введем обозначения:

$$z(v, w) = \exp\left(i\int\limits_T \varepsilon(s)v(s)ds + i\int\limits_T\int\limits_R u(s_1, s_2)w(s_1, s_2)ds_1 ds_2\right),$$

$$Y(v, w) = Mz(v, w),$$

где $w \in L_1(T \times R)$, $Y : L_1(T) \times L_1(T \times R) \to C$, M — знак математического ожидания по функции распределения процессов ε, u_0.

Умножим уравнение (1) на $z(v, w)$ и возьмём математическое ожидание полученного равенства:

$$M\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}z(v,w)\right) = iM\left(\varepsilon(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}z(v,w)\right). \tag{4.1}$$

Заметим, что

$$\frac{\delta Y(v,w)}{\delta v(t)} = iM(\varepsilon(t)z(v,w)), \quad \frac{\delta Y(v,w)}{\delta w(t,x)} = iM(u(t,x)z(v,w)).$$

Таким образом, равенство (4.1) можно формально записать с помощью отображения Y в виде

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Y(v,w)}{\delta w(t,x)} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta Y(v,w)}{\delta w(t,x)}$$

или
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Y(v,w)}{\delta w(t,x)} = \frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta Y(v,w)}{\delta w(t,x)}. \tag{4.2}$$

Умножая (2) на $z(v,w)$ и переходя к средним значениям, получаем
$$\left.\frac{\delta Y(v,w)}{\delta w(t,x)}\right|_{t=t_0} = iM(u_0(x)z(v,w)). \tag{4.3}$$

Таким образом, для Y получена детерминированная задача (4.2), (4.3), причём коэффициенты уравнения (4.2) не зависят от статистических характеристик процессов ε и u_0.

Если известно Y, то можно найти моментные функции задачи (1), (2). Например,
$$Mu(t,x) = \frac{1}{i}\left.\frac{\delta Y(v,w)}{\delta w(t,x)}\right|_{v=0,w=0},$$
$$M\left(u(t,x),\varepsilon(s)\right) = -\left.\frac{\delta^2 Y(v,w)}{\delta w(t,x)\delta v(s)}\right|_{v=0,w=0}.$$

Таким образом, важно найти решение задачи (4.2), (4.3) в малой окрестности точки $(0,0)$ переменных v и w.

3. СТЕПЕННОЙ РЯД ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

Будем искать решение задачи (4.2), (4.3) в виде степенного ряда
$$Y = Y_0(v)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\int\ldots\int Y_k(v,s_1,\ldots,s_k,x_1,\ldots,x_k)w(s_1,x_1)\ldots w(s_k,x_k)\,ds_1\ldots ds_k\,dx_1\ldots dx_k,$$
где интегралы по переменным $s_1,\ldots,s_k$ вычисляются по промежутку T, а по переменным $x_1,\ldots,x_k$ — по R, отображения Y_k симметричны по переменным (s_i,x_i), $i=1,2,\ldots,k$. Полагая в этом равенстве $w=0$, из определения Y и φ получаем
$$Y(t,x,v,0) = \varphi(v) = Y_0(v).$$

Подставим разложение для Y в уравнение (4.2), получим
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\partial}{\partial t}Y_k(v,t,s_2,\ldots,s_k,x,x_2,\ldots,x_k)\times$$
$$\times\, w(s_2,x_2)\ldots w(s_k,x_k)\,ds_2\ldots ds_k\,dx_2\ldots dx_k =$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y_k(v,t,s_2,\ldots,s_k,x,x_2,\ldots,x_k)\times$$
$$\times\, w(s_2,x_2)\ldots w(s_k,x_k)\,ds_2\ldots ds_k\,dx_2\ldots dx_k.$$

Приравнивая степени по переменной w, получим
$$\frac{\partial}{\partial t}Y_k(v,t,s_2,\ldots,s_k,x,x_2,\ldots,x_k)\,w(s_2,x_2)\ldots w(s_k,x_k) =$$
$$=\frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y_k(v,t,s_2,\ldots,s_k,x,x_2,\ldots,x_k)\,w(s_2,x_2)\ldots w(s_k,x_k)$$
при $k=1,2,\ldots$ и при всех $w(s_2,x_2),\ldots,w(s_k,x_k)\in L_1(T\times R)$. Это равносильно равенствам
$$\frac{\partial}{\partial t}Y_k(v,t,s_2,\ldots,s_k,x,x_2,\ldots,x_k) = \frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y_k(v,t,s_2,\ldots,s_k,x,x_2,\ldots,x_k) \tag{4.4}$$

при $k = 1, 2, \ldots$.

Вычислим вариационную производную$(k-1)$-го порядка по w от выражения (4.3) в точке $(v, 0, t_0, \ldots, t_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Учитывая независимость случайного процесса u_0от ε, получим

$$i^k Y_k(vt_0, \ldots, t_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = i^k M\left(u_0(x_1) \ldots u_0(x_k)\, e_1(v, 0)\right) =$$
$$= i^k M\left(u_0(x_1) \ldots u_0(x_k)\right) \varphi(v) \; k = 1, 2, \ldots,$$

т.е.

$$Y_k(v, 0, t_0, \ldots, t_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = M\left(u_0(x_1) \ldots u_0(x_k)\right) \varphi(v) \; k = 1, 2, \ldots. \tag{4.5}$$

Получили набор детерминированных задач (4.4), (4.5) для нахождения коэффициентов Y_k.

Если $Y(v, w)$ — характеристический функционал случайных процессов ε и u, то

$$Y_k(0, t_0, \ldots, t_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = i^{-k} \left.\frac{\delta^k Y(v,w)}{\delta w(s_1,x_1) \ldots \delta w(s_k,x_k)}\right|_{v=0,w=0} =$$
$$M\left(u(s_1, x_1) \ldots u(s_k, x_k)\right).$$

Последнее является основанием для следующего определения.

Определение. Пусть $Y_k(v, s_1, \ldots, s_k, x_1, \ldots, x_k)$ является симметрическим по переменным $(s_i, x_i) i = 1, 2, \ldots, k$, решением в смысле обобщённых функций (в классическом смысле) задачи (4.4), (4.5); тогда $Y_k(0, s_1, \ldots, s_k, x_1, \ldots, x_k)$ называется *моментной функцией k-го порядка* решения задачи (1), (2) в смысле обобщённых функций (в классическом смысле).

4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОБЫЧНЫМИ И ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Уравнения (4.4) одного типа. Исследуем этот тип уравнений. Рассмотрим задачу с начальным условием

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x,v)}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta v(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t, x, v); \\ y(t_0, x, v) = y_0(x, v). \end{cases}$$

$$v \in L_1(T) t \in T x \in R;$$

$$y : L_1(T) \times T \times R \to C.$$

Будем обозначать как $\chi(\tau t \cdot)$ характеристическую функцию отрезка $[\tau t]$, то есть $\chi(\tau t s) = 1$ при $s \in [\tau t]$ и $\chi(\tau t s) = 0$ в противном случае.

В формулировке следующей теоремы отображение y_0 и его производные вычисляются в точках $(xv - \xi^2 \chi(t_0 t \cdot))$.

Теорема 1. *Пусть существует окрестность $U(r)$ нуля радиуса r в $L_1(T)$ такая, что при всех $v \in U(r)$ функции*

$$|y| \left|\frac{\delta y_0}{\delta v(t)}\right| \left|F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v(t)}\right](\xi)\right| \left|\xi^2 F_x[y_0](\xi)\right| \left|\xi F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v(t)}\right](\xi)\right| \left|\xi^2 F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v(t)}\right](\xi)\right|$$

при $t \in T$ ограничены суммируемыми на R функциями. Тогда

$$y(t, x, v) = F_\xi^{-1}\left[F_x\left[y_0(x, v - \xi^2 \chi(t_0, t, \cdot))\right](\xi)\right](x) \tag{4.6}$$

является решением задачи (8), (9).

Доказательство. Предположим, что существует преобразование Фурье по переменной x задачи (8), (9). Применяя преобразование Фурье к уравнениям (8), (9), получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F_x[y(t, x, v)](\xi) = \frac{\delta}{\delta v(t)} (-i\xi)^2 F_x[y(t, x, v)](\xi); \\ F_x[y(t_0, x, v)](\xi) = F_x[y_0(x, v)](\xi). \end{cases}$$

Эта задача имеет вид
$$\begin{cases} \frac{\partial Y(t,v)}{\partial t} = -\xi^2 \frac{\delta Y(t,v)}{\delta v(t)}\,; \\ Y(t_0,v) = Y_0(v)\,. \end{cases}$$

Такая задача изучена в [3]. Если существует вариационная производная $\frac{\delta Y_0(v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot))}{\delta v(t)} t \in T$, то $Y(t,v) = Y_0(v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot)$ является решением задачи (11), (12).

Воспользовавшись этим результатом, находим решение задачи (11), (12).

$$F_x\left[y(t,x,v)\right](\xi) = F_x\left[y_0(x, v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot))\right](\xi).$$

Для получения формулы (4.6) нужно применить к последнему равенству обратное преобразование Фурье.

Подставим (4.6) в уравнение (11). Предположения теоремы о существовании суммируемых мажорант обеспечивают существование вариационной производной по v, а также обеспечивает дифференцируемость под знаками интегралов. При этом получается тождество, что и доказывает теорему.

5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ

Для нахождения математического ожидания решения задачи (1), (2) выпишем задачу (4.4), (4.5) при $k=1$:
$$\frac{\partial}{\partial t} Y_1(v,t,x) \;=\; \frac{\delta}{\delta v(t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(v,t,x) \tag{4.7}$$
$$Y_1(vt_0,x) \;=\; M u_0(x)\,\varphi(v). \tag{4.8}$$

Теорема 2. *Пусть функция $M\,u_0(x)$ суммируема на R, и выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда*

$$Y_1(t,x,v) = M\,u_0(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}\left[\varphi(v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot))\right](x) \tag{4.9}$$

является решением задачи (4.7), (4.8).

Доказательство. По формуле (4.6) получаем решение задачи (4.7), (4.8)

$$Y_1(t,x,v) = F_\xi^{-1}\left[F_x\left[Mu_0(x)\,\varphi(v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot))\right](\xi)\right](x).$$

Далее,

$$F_x\left[Mu_0(x)\,\varphi(v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot))\right](\xi) = F_x\left[M\,u_0(x)\right]\,(\xi)\;\cdot\varphi(v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot)).$$

Поскольку обратное преобразование Фурье от произведения равно свёртке обратных преобразований Фурье от сомножителей, то получаем формулу (4.9). Теорема доказана.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2*

$$M\,u(t,x) = M\,u_0(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}\left[\varphi(-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot))\right](x) \tag{4.10}$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Доказательство получается подстановкой $v=0$ в формулу (4.9).

6. СЛУЧАЙ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА ε

Рассмотрим случай гауссовского процесса ε, который задан характеристическим функционалом
$$\varphi_\varepsilon(v) = \exp\left(i\int M\varepsilon(s)v(s)ds - \frac{1}{2}\iint b(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)ds_1ds_2\right).$$

Теорема 4. *Пусть* $P(t)=\int\limits_{t_0}^{t} M\varepsilon(s)ds>0$ *при всех* $t\in T$. *Тогда*

$$M\,u(t,x)=\sqrt{\frac{\pi}{2P(t)}}\left((1-i)\cos\frac{x^2}{4P(t)}+(1+i)\sin\frac{x^2}{4P(t)}\right)\overset{x}{*}$$

$$\overset{x}{*}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)^k\frac{d^{4k}}{dx^{4k}}Mu_0(x) \tag{4.11}$$

является математическим ожиданием задачи (1), (2).

Доказательство. Для нахождения $M\,u(t,x)$ воспользуемся формулой (4.10). При этом

$$F_\xi^{-1}[\exp(i\int M\varepsilon(s)(-\xi^2\chi(t_0,t,s))ds-\frac{1}{2}\iint b(s_1,s_2)(-\xi^2\chi(t_0,t,s_1))(-\xi^2\chi(t_0,t,s_2))ds_1ds_2)](x)=$$

$$=F_\xi^{-1}\left[\exp\left(-i\xi^2\int\limits_{t_0}^{t}M\varepsilon(s)ds-\frac{\xi^4}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\right](x)=$$

$$=F_\xi^{-1}\left[\exp\left(-i\xi^2\int\limits_{t_0}^{t}M\varepsilon(s)ds\right)\right](x)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\exp\left(-\frac{\xi^4}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\right](x)$$

Обозначим $P(t)=\int\limits_{t_0}^{t}M\varepsilon(s)ds$. По условию теоремы $P(t)>0$. Тогда

$$\begin{aligned}&F_\xi^{-1}\left[\exp\left(-i\xi^2\int\limits_{t_0}^{t}M\varepsilon(s)ds\right)\right](x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\xi^2P(t)+ix\xi\right)d\xi=\\&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\left(\xi^2P(t)-x\xi\right)\right)d\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\xi^2P(t)-x\xi\right)d\xi-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\xi^2P(t)-x\xi\right)d\xi\end{aligned} \tag{4.12}$$

Чтобы найти значения интегралов в (4.12), воспользуемся формулами [4, с. 411]:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\cos\left(ax^2+2bx\right)dx=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{b^2}{a}+\sin\frac{b^2}{a}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{a}},$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\sin\left(ax^2+2bx\right)dx=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{b^2}{a}-\sin\frac{b^2}{a}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{a}}a>0.$$

Получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\xi^2P(t)-x\xi\right)d\xi-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\xi^2P(t)-x\xi\right)d\xi=$$

$$\left(\cos\frac{x^2}{4P(t)}+\sin\frac{x^2}{4P(t)}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2P(t)}}-i\left(\cos\frac{x^2}{4P(t)}-\sin\frac{x^2}{4P(t)}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2P(t)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2P(t)}}\left((1-i)\cos\frac{x^2}{4P(t)}+(1+i)\sin\frac{x^2}{4P(t)}\right). \tag{4.13}$$

Далее находим [5, с. 145]

$$F_\xi^{-1}\left[\exp\left(-\frac{\xi^4}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\right](x)=F_\xi^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)^k\xi^{4k}\right](x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)^k\left(-i\frac{d}{dx}\right)^{4k}\delta(-x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)^k\frac{d^{4k}}{dx^{4k}}\delta(x)$$

Далее,

$$Mu_0(x)\overset{x}{*}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)^k\frac{d^{4k}}{dx^{4k}}\delta(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)^k\frac{d^{4k}}{dx^{4k}}Mu_0(x)\tag{4.14}$$

Подставив (4.13) и (4.14) в (4.10), получим (4.11). Теорема доказана.

7. ВТОРАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ

Выпишем задачу (4.4), (4.5) для Y_2:

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_2(v,t,s_2,x,x_2)\;=\;\frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y_2(v,t,s_2,x,x_2)\tag{4.15}$$

$$Y_2(v,t_0,t_0,x,x_2)\;=M\left(u_0(x)\,u_0(x_2)\right)\,\varphi(v)\,.\tag{4.16}$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1 для нахождения $Y_2(v,t,s_2,x,x_2)$, нужно знать начальное условие $Y_2(v,t_0,s_2,x,x_2)$, однако выполнено только условие (4.16). Оказывается, условие симметричности Y_2 по переменным (t,x), (s_2,x_2) позволяет найти Y_2.

Теорема 5. *Если характеристический функционал $\varphi(v)$ имеет вариационные производные до третьего порядка включительно, $Mu_0(x)$ и $M\left(u_0(x)\,u_0(x_1)\right)$ локально суммируемы, то*

$$Y_2(v,t,s_2,x,x_2)=F_\eta^{-1}\left[F_x\left[F_\xi^{-1}\left[F_{x_2}\left[M\left(u_0(x_2)u_0(x)\right)\;\times\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\times\varphi(v-\xi^2\chi(t_0,s_2,\cdot)-\eta^2\chi(t_0,t,\cdot))\right](\xi)\right](x_2)\right]\;(\eta)\right](x)\tag{4.17}$$

является симметрическим по переменным $(t,x),(s_2,x_2)$ решением задачи (4.15), (4.16) в обобщённом смысле.

Доказательство. Положим в уравнении (4.15) $s_2=t_0$. Получим задачу для $Y_2(v,t,t_0,x,x_2)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_2(v,t,t_0,x,x_2)\;=\;\frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y_2(v,t,t_0,x,x_2),$$

$$Y_2(v,t_0,t_0,x,x_2)\;=M\left(u_0(x)\,u_0(x_2)\right)\,\varphi(v)\,.$$

Применяя для неё теорему 1, находим:

$$Y_2(v,t_0,t,x_2,x) = Y_2(v,t,t_0,x,x_2) = F_\xi^{-1}\left[F_x\left[M\left(u_0(x)u_0(x_2)\right)\varphi(v-\xi^2\chi(t_0,t,\cdot))\right](\xi)\right](x).$$

Пользуясь тем, что Y_2 симметрично по переменным $(t,x),(s_2,x_2)$, получаем начальное условие для уравнения (4.15)

$$Y_2(v,t_0,s_2,x,x_2) = F_\xi^{-1}\left[F_{x_2}\left[M\left(u_0(x_2)u_0(x)\right)\varphi(v-\xi^2\chi(t_0,s_2,\cdot))\right](\xi)\right](x_2).$$

Снова воспользовавшись теоремой 1, получим выражение (4.16).

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 5. Тогда*

$$M\left(u(t,x)\,u(s_2,x_2)\right) = F_\eta^{-1}\Big[F_x\Big[F_\xi^{-1}\left[F_{x_2}\left[M\left(u_0(x_2)u_0(x)\right)\right.\right.\ \times$$
$$\times\varphi(-\xi^2\chi(t_0,s_2,\cdot)-\eta^2\chi(t_0,t,\cdot))\big](\xi)\big](x_2)\Big](\eta)\Big](x). \quad (4.18)$$

является второй моментной функцией (в смысле обощённых функций) решения задачи (1), (2).

Доказательство получаем из формулы (4.17) при подстановке $v = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрена задача Коши для уравнения Шредингера, получены формулы математического ожидания и второй моментной функции решения, а также рассмотрен случай гауссовского случайного коэффициента.

Выражаю благодарность своему научному руководителю, профессору В.Г. Задорожнему, за помощь в написании работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

[2] Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. — М.-Ижевск: РХД, 2006. — 316 с.

[3] Задорожний В.Г. О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами / В.Г. Задорожний, Л.Н. Строева // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 35, № 3. — С. 377–385.

[4] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.

[5] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965. — 328 с.

[6] Задорожний В.Г. Моментные функции решения уравнения переноса и диффузии / Т.В. Беседина, В.Г. Задорожний // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 15–25.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

REFERENCES

[1] Vladimirov V.S. Generalized functions in mathematical physics. [Vladimirov V.S. Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike]. Moscow: Nauka, 1976, 320 p.

[2] Zadorozhniy V.G. Methods of variational analysis. [Zadorozhnij V.G. Metody variacionnogo analiza]. Moscow-Izhevsk: RChD, 2006, 316 p.

[3] Zadorozhniy V.G., Stroyeva L.N. On moment functions of the solution of the initial value problem of the first-order linear differential equation with random coefficients. [Zadorozhnij V.G., Stroeva L.N. O momentnyx funkciyax resheniya nachal'noj zadachi linejnogo differencial'nogo uravneniya pervogo poryadka so sluchajnymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential equations*, 2000, Vol. 35, no. 3, pp. 377–385.

[4] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. [Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij]. Moscow: Physmathgiz, 1963, 1100 p.

[5] Shilov G.E. Mathematical analysis. Second special course. [Shilov G.E. Matematicheskij analiz. Vtoroj special'nyj kurs]. Moscow: Nauka, 1965, 328 p.

[6] Besedina T.V., Zadorozhniy V.G. Moment functions of the solution of the translation and diffusion equation. [Besedina T.V., Zadorozhnij V.G. Momentnye funkcii resheniya uravneniya perenosa i diffuzii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 15–25.

[7] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. [Kolmogorov A.N., Fomin S.V. E'lementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza]. Moscow: Nauka, 1976, 544 p.

Сухарев А. Ю., аспирант кафедры нелинейных колебаний Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: iplinir@gmail.com
Тел.: +7(920)419–51–47

Sukharev A. U., postgraduate student of the department of Nonlinear Oscillations, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: iplinir@gmail.com
Tel.: +7(920)419–51–47