УДК 517.958

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ*

В. П. Орлов, М. И. Паршин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.02.2014 г.

Аннотация: в ограниченной области на плоскости с достаточно гладкой границей изучается динамика термовязкоупругой сплошной среды. Рассматриваемая система является связанной системой, состоящей из уравнения движения и уравнения сохранения энергии. Для начально-граничной задачи динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда в плоском случае установлена нелокальная теорема существования слабого решения. Для доказательства вначале рассматривается начально-граничная задача для системы вязкоупругости типа Олдройда с переменной вязкостью. Затем рассматривается начально-граничная задача для уравнения сохранения энергии с переменным коэффициентом теплопроводности и правой частью, которая является лишь суммируемой. Разрешимость этих задач устанавливается путем сведения к операторным уравнениям, для разрешимости которых применяется принцип сжимающих отображений. Для разрешимости исходной системы термовязкоупругости устраивается итерационный процесс, заключающийся в последовательном решении вспомогательных задач. Подходящие априорные оценки дают сходимость последовательных приближений на достаточно малом временном промежутке.

Ключевые слова: термовязкоупругая среда, уравнения движения, начально-граничная задача, слабое решение, плоский случай.

WEAK SOLVABILITY OF ONE PROBLEM OF DYNAMICS OF THERMOVISKOELASTIC CONTINUUM

V. P. Orlov, M. I. Parshin

Abstract: In the plane bounded domain with sufficiently smooth boundary consider dynamic model of thermoviscoelasticity continuum. The considered system is the related system consisting of motion equation and energy conservation equation.The nonlocal existence theorem for the weak solution for an initial–boundary value problem for the dynamic model of thermoviscoelasticity of Oldroid type in the planar case is established. For the proof we firstly investigate the initialboundary problem for an Oldroyd type viscoelasticity system with variable viscosity. Then the initial-boundary problem for an energy conservation equation with variable coefficient of heat conductivity and the right part, which is only summable. Solvability of these problems is established by means of reduction to the operator equations which solvability provided by some fixpoint theorems. For the solvability of initial system of thermoviscoelasticity the iterative process consisting in the consecutive solution of auxiliary problems is constructed. Suitable apriori estimates provide the convergence of the iterative process on sufficiently small time interval.

Keywords: thermoviscoelastic medium, motion equation, initial-boundary value problem, weak solutions,planar case.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00041.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset R^2$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В $Q_T = [0,T] \times \Omega$ рассматривается начально-граничная задача

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \mathrm{Div}\,[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)] - \mu_0 \triangle v - \\ -\mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{1.2}$$

$$v|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\partial\theta/\partial t + v_i \partial\theta/\partial x_i - \chi \triangle \theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \\ \mu_2 \int_0^t \mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]ds : \mathcal{E}(v) + g \equiv G_1 + g \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega; \theta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } [0,T]; \tag{1.5}$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$, θ и p скорость, температура и давление среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ - тензор скоростей деформаций, $\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{ij}$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, $\mu_1(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**}$.

При $\theta = 0$ задача (1.1)—(1.3) является моделью Олдройда вязкоупругой среды (см. [1], [2]). Добавление в модели Олдройда температуры θ в коэффицент вязкости приводит к появлению уравнения (1.5) (уравнение баланса энергии (см. [3], с.12)).

В случае $\theta = 0$ и $\mu_1(s) = \mathrm{const}$ нелокальная сильная разрешимость для модели Олдройда ($v \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p \in W_2^{0,1}(Q_T)$) (1.1)—(1.3) установлена в [4]. Для более общей модели с нелинейной вязкостью аналогичный результат установлен в [5].

Для задачи (1.1)—(1.5) наличие переменной вязкости из-за недостаточной гладкости θ не позволяет установить ее сильную разрешимость. Нашей целью является доказательство слабой разрешимости задачи (1.1)—(1.5). При этом мы существенно опираемся на результаты работы [6] о слабой разрешимости уравнения баланса энергии.

Отметим, что при исследовании слабой разрешимости задачи (1.1)—(1.5) в правой части (1.4) появляются слагаемые из $L_1(Q_T)$, что вызывает существенные трудности (см. напр. [7] и имеющуюся там библиографию). Исследованию других моделей термовязкоупругих сред посвящена обширная литература (см. напр. [8], [9], [10] и имеющуюся там библиографию).

Работа организована так. В разделе 2 приводятся основные обозначения и определения. В разделе 3 мы формулируем главный результат. Раздел 4 посвящен доказательству основного результата работы - теоремы 3.1 и разбит на ряд подразделов, посвященных доказательству различных вспомогательных результатов и непосредственно доказательству теоремы 3.1.

Возникающие в неравенствах и цепочках неравенств константы, не зависящие от существенных параметров, обозначаются одной буквой M. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ниже мы используем пространства Соболева $L_p(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$, $L_p(Q_T)$, $W_p^{k,m}(Q_T)$ для скалярных, векторнозначных или матричнозначных функций (из контекста это всегда ясно), $H_p^\beta(\Omega)$ — пространства Бесселевых потенциалов ([13], с.79). Нормы в $L_2(\Omega)$, $W_2^l(\Omega)$, $L_2(Q_T)$, $W_2^{k,m}(Q_T)$ обозначаются как $|\cdot|_0$, $|\cdot|_l$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_{k,m}$ соответственно. Пусть $\mathcal{V} = \{u : u \in C_0^\infty(\Omega, R^n), \mathrm{div}\, u = 0\}$. Здесь $C_0^\infty(\Omega, R^n)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на Ω с компактным носителем. Мы обозначаем через $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $W_p^m(\Omega)$ $(m > 0)$, $W_{p,0}^m(\Omega) = W_p^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, $m > 1/p$. Далее,

$W_p^{-m}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}_{p'}^{m}(\Omega))'$, $m > 0$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < +\infty$, знак $'$ обозначает сопряжение пространства. Ниже H и V являются замыканием $\mathcal{V}$ по норме $|\cdot|_0$ и $|\cdot|_1$ соответственно ([14], с.20).

3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Определение 3.1. *Слабым решением задачи (1.1)-(1.5) называется пара* (v, θ), *где*

$$v \in L_2(0,T;V) \cap W_1^1(0,T;V') \cap C_w(0,T;H) \equiv U(0,T), \tag{3.1}$$

$$\theta \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \cap W_1^1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)) \cap C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)) \equiv \Upsilon,\ 1 < p < +\infty, \tag{3.2}$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{gathered} d(v,\varphi)/dt - (v_i v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + \mu_1(\theta)(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + \\ \mu_2\left(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\right) = \langle f, \varphi\rangle \end{gathered} \tag{3.3}$$

при всех $\varphi \in V$ *в смысле распределений на [0,T] при п.в.* t,

$$\begin{gathered} d(\theta,\varphi)/dt - (v_i\theta, \partial\varphi/\partial x_i) + \chi(\partial\theta/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_i) = \\ \langle g,\varphi\rangle + (\widetilde{\mu}_1(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \varphi) + \mu_2\left(\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x) : \mathcal{E}(v)(t,x))\,ds, \varphi\right), \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $\widetilde{\mu}_1(\theta) = \mu_0 + \mu_1(\theta)$, *в смысле распределений на* $[0,T]$ *для любых* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *при п.в.* t, *и условиям (1.3) и (1.5).*

Знак $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в (3.3) и (3.4) означает двойственность между V' и V и между $W_p^{-1}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ соответственно. Здесь и ниже $(u,w) = \int_\Omega u(x)w(x)\,dx$ для скалярных, векторнозначных или матричнозначных функций (из контекста это всегда ясно), $C_w(0,T;E)$ обозначает пространство слабо непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве E.

Теорема 3.1. *Пусть функция* $\mu_1(s) \in C^2(-\infty,+\infty)$, *монотонно возрастает и*

$$0 < m_1^* < \mu_1(\theta) < m_1^{**},\ s \in (-\infty,+\infty), \tag{3.5}$$

$f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega))$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *существует по крайней мере одно слабое решение задачи (1.1)-(1.5).*

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

Доказательство теоремы 3.1 проведем в ряд этапов.

4.1. Разрешимость вспомогательных задач

Рассмотрим сначала задачу

$$\partial v/\partial t + v_i \partial v/\partial x_i - \operatorname{Div}[m(t,x)\,\mathcal{E}(v)] + \nabla p = f; \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{4.2}$$

$$v|_{t=0} = v^0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.3}$$

Слабое решение задачи (4.1)-(4.3) определим как $v \in U(0,T)$, удовлетворяющую (3.3) при замене $\widetilde{\mu}_1(\theta)$ на $m(t,x)$ и $\mu_0 = \mu_2 = 0$.

Лемма 4.1. *Пусть $f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, функция $m(t,x)$ измерима и ограничена на Q_T,*

$$0 < K_1 \leqslant m(t,x) \leqslant K_1^*. \tag{4.4}$$

Тогда задача (4.1)-(4.3) имеет единственное слабое решение и справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|v\|_{U(0,T)} \equiv \|\partial v/\partial t\|_{L_2(0,T;V'(\Omega))} + \|v\|_{0,1} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|v(t,x)|_0 \leqslant \\ M_1(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь M_1 зависит от $\|m\|_{L^\infty(Q_T)}$.

Пусть v_i являются решениями задач (4.1)-(4.3) при $f_i \in L_2(0,T;V')$. Тогда

$$\|v_1 - v_2\|_{U(0,T)} \leqslant M_1'\|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;V')},\ M_1' = M_1'(\|m\|_{L^\infty(Q_T)}). \tag{4.6}$$

Доказательство первого утверждения леммы 4.1 см. [16]. Доказательство второго утверждения леммы проводится стандартным образом по схеме доказательства единственности для системы Навье-Стокса (см. напр. [14],с. 234-236).

Рассмотрим задачу

$$\partial\theta/dt + v_i\partial\theta/\partial x_i - \chi\triangle\theta = m(\widehat{\theta})\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + \widehat{g} + g, \tag{4.7}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.8}$$

где $m(\theta) = \mu_0 + \widetilde{m}u_1(\theta)$.

Слабое решение задачи (4.7)-(4.8) определим как $\theta \in \Upsilon$, удовлетворяющую (3.4) при при замене $\widetilde{\mu}_1(\theta)$ на $m(\widehat{\theta})$ и $\mu_2 = 0$.

Лемма 4.2. *Пусть $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\widehat{g} \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$, $\theta^0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$, $\widehat{\theta} \in \Upsilon$, $v \in U(0,T)$. Тогда задача (4.7)-(4.8) имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|\theta\|_\Upsilon \equiv \|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} + \|\theta\|_{L_p(0,T;W_p^1(\Omega))} + \sup\nolimits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\theta(t,x)\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)} \leqslant \\ M_2(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|\widehat{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|v\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Утверждение леммы (4.2) при $m = \text{const}$ и $\widehat{g} = 0$ вытекает из [6]. Доказательство леммы (4.2) проходит и для случая, когда $m = \mu_0 + \mu_1(\widehat{\theta})$, $\widehat{\theta} \in \Upsilon$ и $\widehat{g} \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$. В этом случае $m \in L^\infty(Q_T)$, причем $\|m\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant \mu_0 + \sup_{s\geqslant 0}\mu_1(s) < +\infty$, и все априорные оценки, использованные при доказательстве в случае $m = \text{const}$, сохраняются, а $\widehat{g} \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$, так же, как слагаемое $\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$ из правой части (4.9). Константа M_2 не зависит от $\widehat{\theta}$.

Включение $\theta \in C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega))$ устанавливается с помощью оценки (4.9) и леммы 1.4 (см.[14], с.211).

4.2. Построение аппроксимирующих задач

Рассмотрим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0,1,2,\ldots$ определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения для v и θ из (1.3) и (1.5). Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда v^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\begin{aligned}\partial v^{n+1}/\partial t + v_i^{n+1}\partial v^{n+1}/\partial x_i - \mu_0\triangle v^{n+1} - \operatorname{Div}[\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})] - \\ \mu_2\textstyle\int_0^t \operatorname{Div}[\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)]ds + \nabla p^{n+1} = f;\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\operatorname{div} v^{n+1} = 0 \text{ на } Q_T; \tag{4.11}$$

$$v^{n+1}|_{t=0} = v^0, v^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.12}$$

а θ^{n+1} находится как слабое решение задачи

$$\begin{gathered}\partial\theta^{n+1}/\partial t + v_i^{n+1}\partial\theta^{n+1}/\partial x_i - \chi\triangle\,\theta^{n+1} = (\mu_0 + \mu_1(\theta^n))\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) + \\ +\mu_2\int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1}(s,x)ds : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g;\end{gathered} \tag{4.13}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta^0; \theta^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0; \tag{4.14}$$

Слабым решением задачи (4.10)-(4.12) называется функция $v^{n+1} \in U(0,T)$, удовлетворяющая соотношениям (4.11), (4.12) и

$$\begin{gathered}d(v^{n+1},\varphi)/dt - (v_i^{n+1}v^{n+1}, \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}) + (\mu_0\mathcal{E}(v^{n+1}) + (\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}), \mathcal{E}(\varphi)) + \\ \mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f,\varphi\rangle\end{gathered} \tag{4.15}$$

при всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на [0,T] при п.в. t.

Слабым решением задачи (4.13)-(4.14) называется функция $\theta^{n+1} \in \Upsilon$, удовлетворяющая соотношениям (4.14) и

$$\begin{gathered}d(\theta^{n+1},\varphi)/dt - (v_i^{n+1}\theta^{n+1}, \partial\varphi/\partial x_i) + \chi(\partial\theta^{n+1}/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_i) = \\ \langle g,\varphi\rangle + (\widetilde{\mu}_1(\theta^n) : \mathcal{E}(v^{n+1}),\varphi) + \mu_2(\int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds : \mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)), \mathcal{E}(\varphi))\end{gathered} \tag{4.16}$$

в смысле распределений на $[0,T]$ для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ при п.в. t.

Теорема 4.1. *В условиях теоремы 3.1 последовательные приближения определены, и справедливы равномерные по n оценки*

$$\|v^n\|_{U(0,T)} \leqslant M_3, \|\theta^n\|_\Upsilon \leqslant M_4, n = 0,1,2,... \tag{4.17}$$

Доказательство теоремы 4.1. Установим сначала разрешимость задачи

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + v_i\partial v/\partial x_i - \mu_0\triangle v - \operatorname{Div}[m(t,x)\mathcal{E}(v)] - \\ \mu_2\int_0^t \operatorname{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds + \nabla p = f;\end{gathered} \tag{4.18}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \text{ на } Q_T; \tag{4.19}$$

$$v|_{t=0} = v^0, v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.20}$$

где $m(t,x)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1. Для этого докажем сначала априорную оценку решений задачи (4.18)-(4.20).

Лемма 4.3. *Пусть v является слабым решением задачи (4.18)-(4.20). Тогда справедливо неравенство*

$$\|\partial v/\partial t\|_{0,-1} + \sup_t |v(t,.)|_0 + \|v\|_{0,1} \leqslant M_4(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0), \tag{4.21}$$

где M_4 зависит от $\|m\|_{L^\infty(Q_T)}$.

Доказательство леммы 4.3. Покажем сначала, что v удовлетворяет тождеству

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}|v(\tau,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,\tau;L_2(\Omega))} + \|m^{1/2}(t,x)\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,\tau;L_2(\Omega))} + \\ \tfrac{1}{2}\mu_2|\int_0^\tau \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds|_0^2 = \tfrac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^\tau\langle f,v\rangle\,ds,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Слабое решение задачи (4.18)-(4.20) удовлетворяет (3.3) с заменой $\mu_1(\theta)$ на $m(t,x)$. Из определения слабого решения следует, что $\frac{d}{dt}(v,\varphi) = \langle\frac{d}{dt}v,\varphi\rangle$ (см.[17], с.78). Кроме того

$\frac{d}{dt}\langle v,\varphi\rangle=\frac{1}{2}|v|_0^2$ (см.[14], с.209). Пользуясь этими соотношениями, подставим $v(t,x)$ в подправленное (3.3) вместо φ. Рассмотрим третье слагаемое J, полученное при такой подстановке: $J=\int_0^\tau(\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds,\mathcal{E}(v)(t,x))\,dt$. Используя элементарные преобразования имеем:

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\frac{d}{dt}(\int\limits_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds,\int\limits_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds)\,dt=\frac{1}{2}|\int\limits_0^\tau\mathcal{E}(v)(t,x)dt|_0^2. \tag{4.23}$$

Остальные слагаемые, полученные при такой подстановке, преобразуются стандартным образом (см. напр. [14]). Из (4.23) с учетом этого вытекает соотношение (4.22). Используя (4.22) и проводя стандартные выкладки (см. напр. [17], с.73) с учетом (3.5), получаем (4.21).

Лемма 4.3 доказана.

Установим теперь разрешимость задачи (4.18)-(4.20).

Лемма 4.4. *В условиях теоремы 3.1 задача (4.18)-(4.20) имеет слабое решение, и справедлива оценка*

$$\|v\|_{U(0,T)}\leqslant M_4(\|f\|_{0,-1}+|v^0|_0). \tag{4.24}$$

Доказательство леммы 4.4. При $\mu_2=0$ и измеримой и ограниченной $m(t,x)$, удовлетворяющей $0<k_1\leqslant m(t,x)\leqslant k_2$, разрешимость задачи (4.18)-(4.20) и оценка (4.21) установлены в 4.1.Обозначим через $R(f,v^0,m)$ оператор, ставящий в соответствие (f,v^0,m) слабое решение v задачи (4.18),(4.20) при $\mu_2=0$, так что $v=R(f,v^0,m)$.

Перепишем (4.18) в виде

$$\partial v/\partial t+v_i\partial v/\partial x_i-\mu_0\triangle v-\mathrm{Div}\,[m(t,x)\,\mathcal{E}(v)]+\nabla p=w, \tag{4.25}$$

$$w=f+\mu_2\int\limits_0^t\mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds. \tag{4.26}$$

$v=R(f,v^0,m)$. Используя оператор R, перепишем (4.26) в виде

$$w=K(w),\ K(w)\equiv f+\mu_2\int\limits_0^t\mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(R(w,v^0,m))(s,x)]\,ds. \tag{4.27}$$

Установим разрешимость уравнения (4.27) с помощью принципа сжимающих отображений.

Покажем сначала, что при достаточно малом T оператор K преобразует в себя шар $S(r)=\{w:\|w\|_{0,-1}\leqslant r\}$ достаточно большого радиуса r. Действительно, полагая $v=R(w,v^0,m)$, имеем

$$\begin{gathered}\|K(w)\|_{0,-1}\leqslant\|f\|_{0,-1}+M\|\textstyle\int_0^t\mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds\|_{0,-1}\leqslant\|f\|_{0,-1}+\\ M\|\textstyle\int_0^t|v(s,x)|_1\,ds\|_{L_2(0,T)}\leqslant\|f\|_{0,-1}+MT\|v\|_{0,1}.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Из (4.5) вытекает, что

$$\|v\|_{0,1}=\|(R(w,v^0,m))\|_{0,1}\leqslant M_1(\|w\|_{0,-1}+|v^0|_0).$$

Следовательно, для $w\in S(r)$

$$\|K(w)\|_{0,-1}\leqslant\|f\|_{0,-1}+M_6T(\|w\|_{0,-1}+|v^0|_0)\leqslant\|f\|_{0,-1}+M_6T(r+|v^0|_0). \tag{4.29}$$

Здесь M_6 не зависит от m.

Из (4.29) вытекает, что найдется такое достаточно малое T_1, что при $T \leqslant T_1$ оператор K преобразует в себя шар $S(r)$ достаточно большого радиуса r.

Покажем теперь, что найдется такое достаточно малое T_2, что при $T \leqslant T_2$ оператор K является сжимающим на шаре $S(r)$. Пусть $w_1, w_2 \in S(r)$. Тогда

$$K(w_1) - K(w_2) = \mu_2 \int\limits_0^t \mathrm{Div}\,[\mathcal{E}(R(w_1, v^0, m) - R(w_2, v^0, m))(s,x)]\,ds.$$

Полагая $v^1 = R(w_1, v^0, m),\ v^2 = R(w_2, v^0, m)$ и пользуясь (4.6), имеем

$$\|R(w_1, v^0, m) - R(w_2, v^0, m)\|_{U(0,T)} \leqslant M_1' \|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;V')}.$$

С помощью этого неравенства и соображений, использованных при выводе (4.29), получаем, что

$$\|K(w_1) - K(w_2)\|_{0,-1} \leqslant M_6 T \|w_1 - w_2\|_{0,-1}.$$

Отсюда вытекает, что найдется такое достаточно малое T_2, что при $T \leqslant T_2$ справедливо неравенство

$$\|K(w_1) - K(w_2)\|_{0,-1} \leqslant q\|w_1 - w_2\|_{0,-1}, \tag{4.30}$$

где $0 < q < 1$.

Таким образом, найдется такое $T_0 \leqslant \min(T_1, T_2)$, что при $T = T_0$ для оператора K выполняются условия принципа сжимающих отображений. Следовательно, при $T = T_0$ уравнение (4.27) однозначно разрешимо. Отсюда и из (4.5) с учетом леммы 4.1 вытекает разрешимость задачи (4.18)-(4.20).

Оценка (4.24) следует из (4.5) и (4.29).

Лемма 4.4 при $T = T_0$, T_0 мало, доказана.

В случае произвольного T, нужно рассмотреть последовательность задач

$$\begin{gathered}\partial v^k/\partial t + v_i^k \partial v^k/\partial x_i - \mu_0 \triangle v^k - \mathrm{Div}\, v^k[m(t,x)\,\mathcal{E}(v^k)] - \\ + \mu_2 \textstyle\int_0^t \mathrm{Div}\, v^k[\mathcal{E}(v^k)(s,x)]\,ds + \nabla p^k = f;\ \mathrm{div}\, v^k = 0 \text{ на } Q_T;\end{gathered} \tag{4.31}$$

$$v^k(T_k, x) = w^k(x),\ x \in \Omega;\ v^k(t,x) = 0,\ T_k \leqslant t \leqslant T_{k+1},\ x \in \partial\Omega, \tag{4.32}$$

где $T_k = kT_0,\ k = 1, 2, \ldots, [T/T_0],\ w^k(x) = v^{k-1}(T_k, x),\ v^0(t,x) = v^0(x)$. Без ограничения общности считаем T/T_0 целым.

Решения задач (4.31)-(4.32) ищутся в классах $U(T_k, T_{k+1})$, определяемых аналогично $U(0,T)$, с заменой $(0,T)$ на (T_k, T_{k+1}). Легко видеть, что оценка (4.21) решения задачи (4.18)-(4.20) на $[0,T]$ справедлива и для решений задач (4.31)-(4.32) с заменой $[0,T]$ на $[T_k, T_{k+1}]$ и v^0 на w^k.

В частности, из этой оценки следует равномерная ограниченность $|w^k(t,x)|_0$. Отсюда следует, что задачи (4.31)-(4.32) однозначно разрешимы на соответствующих отрезках $[T_k, T_{k+1}]$.

Определим $v(t,x)$ при $t \in [0,T]$ как функцию, равную $v^k(t,x)$ на $[T_k, T_{k+1}]$. Очевидно $v(t,x)$ является решением задачи (4.18)-(4.20) на $[0,T]$ и удовлетворяет оценке (4.21).
Лемма 4.4 доказана.

Установим теперь разрешимость задачи (4.10)-(4.12).

Лемма 4.5. *Пусть $f \in L_2(0,T;V')$, $v^0 \in H$, $\theta^{n+1} \in \Upsilon$. Тогда задача (4.10)-(4.12) имеет слабое решение, и справедлива оценка*

$$\|v^{n+1}\|_{U(0,T)} \leqslant M_7(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0). \tag{4.33}$$

Доказательство леммы 4.5. Положим $m(t,x) = \mu_0 + \mu_1(\theta^n(t,x))$. Тогда $m(t,x)$ удовлетворяет условиям 4.1 с некоторыми K_1 и K_1^*. Утверждение леммы 4.5 теперь вытекает из утвеждения леммы 4.4.

Теперь рассмотрим задачу (4.13)-(4.14) при фиксированном $v^{n+1} \in V$.

Лемма 4.6. *Пусть $v^{n+1} \in U(0,T)$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta^n \in \Upsilon$. Тогда задача (4.13)-(4.14) имеет слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta^{n+1}\|_\Upsilon \leqslant M_8(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|v^{n+1}\|_{0,1}^2 + \|\theta^0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{4.34}$$

Доказательство леммы 4.6. Из леммы 4.2 вытекает, что для доказательства леммы 4.6 достаточно доказать, что из включения $v^{n+1} \in U(0,T)$ вытекает, что $\widehat{g}$, определяемое вторым слагаемым в правой части (4.13), принадлежит $L_1(0,T;L_1(\Omega))$. Действительно,с помощью неравенства Коши и интегрального неравенства Минковского получаем, что

$$\| \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds : \mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)\|_{L_1(\Omega)} \leqslant$$

$$M\int_0^t \|\mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\|_{L_2(\Omega)}\,ds\|\mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$M\int_0^t |v^{n+1}(s,x)|_1\,ds|v^{n+1}(t,x)|_1 \leqslant MT^{1/2}\|v^{n+1}\|_{0,1}|v_x^{n+1}(t,x)|_0.$$

Интегрируя последнее неравенство по t, получаем, что

$$\|\widehat{g}\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} = \|\mu_2\int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s,x)\,ds : \mathcal{E}(v^{n+1})(t,x)\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \leqslant M\|v^{n+1}\|_{0,1}^2.$$

Отсюда и из условия на g с помощью леммы 4.6 получаем слабую разрешимость задачи (4.13)-(4.14) и оценку (4.34). Лемма 4.6 доказана.

Из лемм 4.5 и 4.6 вытекает, что последовательные приближения (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$ определены. Из ограниченности функции $\mu_1(s)$ вытекает равномерная ограниченность $\mu_1(\theta^{n+1})$, а в силу оценок (4.24) и (4.34) и справедливость (4.17). Оценки (4.17) установлены.

Теорема 4.1 доказана.

4.3. Сходимость решений аппроксимирующих задач

Рассмотрим теперь (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$ и определим через v^n - решение задачи (4.10)-(4.12), а θ^n - решение задачи (4.13)-(4.14). Исследуем вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n). Рассмотрим сначала θ^n.

Лемма 4.7. *Последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0,T:L_p(\Omega))$.*

Доказательство леммы 4.7. Воспользуемся следующим результатом из [18].

Утверждение 1. *Пусть $X \subset B \subset Y$ - банаховы пространства, вложение $X \to B$ компактно, $B \to Y$ - непрерывно. Если f_n ограничена в $L_q(0,T;B)$ и в $L^1(0,T;X)$, а $\partial f^n/\partial t$ ограничена в $L^1(0,T;Y)$, то f_n относительно компактно в $L_p(0,T;B)$ при $\forall p \leqslant q$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$.*

Возьмем в качестве $X = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$, $B = L_p(\Omega)$, $Y = W_p^{-1}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$. Тогда условия на X, B, Y выполняются. Из оценки (4.34) вытекает, что θ^n ограничена в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, а $\partial\theta^n/\partial t$ ограничена в $L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$. Поэтому последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$.

Лемма 4.7 доказана.

Без ограничения общности будем считать, что θ^n сходится к θ в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$. Также без ограничения общности можно считать, что θ^n сходится к θ п.в. в $L_p(Q_T)$.

Рассмотрим теперь v^n. В силу оценки (4.17) получаем, что последовательность v^n ограничена в $L_2(0,T;V)$, и следовательно слабо компактна в $L_2(0,T;V)$, а последовательность $\partial v^n/\partial t$ ограничена в $L_2(0,T;V')$ и слабо компактна в $L_2(0,T;V')$.

Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0,T;V)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0,T;V')$.

Однако последовательность v^n обладает лучшими свойствми.

Теорема 4.2. *Последовательность v^n сильно сходится в $L_2(0,T;V)$ к v , а $v^n(T,x)$ сильно сходится в H к $v(T,x)$.*

Для доказательства теоремы 4.2 установим, что справедливы следующие леммы.

Лемма 4.8. *Имеют место сходимости:*

$$\mu_1(\theta^n)\mathcal{E}(v^n) \to \mu_1(\theta)\mathcal{E}(v) \text{ слабо в } L_2(Q_T), \tag{4.35}$$

$$\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds \to \int_0^t \mathcal{E}(v)(s,x)\,ds \text{ слабо в } L_2(Q_T). \tag{4.36}$$

Доказательство леммы 4.8.

Докажем сначала (4.35). Так как θ^n сходится в $L_p(Q_T)$, то из нее можно выделить сходящуюся п.в. подпоследовательность. Будем считать, что $\theta^n \to \theta$ п.в. на Q_T. Тогда и $\mu_1(\theta^n)$ сходится п.в. к $\mu_1(\theta)$ на Q_T. Из слабой сходимости v^n к v в $L_2(0,T;V)$ легко следует слабая сходимость $\mathcal{E}(v^n)$ к $\mathcal{E}(v)$ в $L_2(Q_T)$, а затем и слабая в $L_2(Q_T)$ сходимость (4.35).

Теперь покажем, что справедливо (4.36). Рассмотрим выражение

$$I_n = \int_0^T (\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds, \varphi(t,x))\,dt = \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \varphi(t,x))\,ds\,dt, \tag{4.37}$$

где $\varphi(t,x)$ - гладкая финитная на Q_T функция. Меняя в (4.37) порядок интегрирования, имеем

$$I_n = \int_0^T \int_s^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \varphi(t,x))\,dt\,ds = \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \int_s^T \varphi(t,x))\,dt\,ds =$$

$$\int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s,x), \psi(s,x))\,ds.$$

Здесь $\psi(s,x) = \int_s^T \varphi(t,x)\,dt$ - гладкая на Q_T функция. Из слабой сходимости $\mathcal{E}(v^n)$ в $L_2(Q_T)$ вытекает, что

$$I_n \to I = \int_0^T (\mathcal{E}(v)(s,x), \psi(s,x))\,ds = \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds, \varphi(t,x))\,dt,$$

что означает справедливость (4.36). Лемма 4.8 доказана.

Лемма 4.9. *Пусть v^n, $n = 1, 2, \dots$ является слабым решением задачи (4.10)-(4.12). Тогда v^n удовлетворяет тождествам*

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}|v^n(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \|\mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \\ \frac{1}{2}\mu_2|\int\limits_0^T \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds|_0^2 = \frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int\limits_0^T \langle f, v^n\rangle\,ds.\end{gathered} \tag{4.38}$$

Доказательство леммы 4.9. Используя такие же выкладки, как при выводе (4.22), получаем, что справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}|v^n(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + \|\mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n)\|_0^2 + J = \frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int\limits_0^T \langle f, v^n\rangle\,ds, \tag{4.39}$$

где

$$J = \int\limits_0^T (\int\limits_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds, \mathcal{E}(v^n)(t,x))\,dt.$$

Используя элементарные преобразования имеем:

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{d}{dt}(\int\limits_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds, \int\limits_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds)\,dt = \frac{1}{2}|\int\limits_0^T \mathcal{E}(v^n)(t,x)dt|_0^2. \tag{4.40}$$

Из (4.39) и (4.40) с учетом преобразованных первых трех слагаемых вытекает соотношение (4.22). Лемма 4.9 доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Введем в $\aleph = H \times L_2(0,T : L_2(\Omega)) \times L_2(0,T : V)) \times H$ норму $\|x\|_\aleph = (|x_1|_0^2 + \|x_2\|_0^2 + \|x_3\|_0^2 + |x_4|_0^2)^{1/2}$. Здесь $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ - произвольный элемент из $\aleph$. Рассмотрим последовательность

$$x^n = (\frac{1}{2}v^n(T,x), \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v^n), \mu_1^{1/2}(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n), \frac{1}{2}\mu_2\int\limits_0^T \mathcal{E}(v^n)(t,x)dt).$$

Из слабой сходимости x_i^n вытекает слабая сходимость x^n к предельному элементу

$$x = (\frac{1}{2}v(T,x), \mu_0^{1/2}\mathcal{E}(v), \mu_1^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v), \frac{1}{2}\mu_2\int\limits_0^T \mathcal{E}(v)(t,x)\,dt).$$

С другой стороны, из (4.38) следует, что в силу слабой сходимости v^n к v вытекает, что

$$\|x^n\|_\aleph^2 \to \frac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int\limits_0^T \langle f, v\rangle\,ds. \tag{4.41}$$

Покажем, что для v, так же как и для v^n, справедливо тождество

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}|v(T,.)|_0^2 + \mu_0\|\mathcal{E}(v)\|_0^2 + \mu_0^{1/2}\|\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)\|_0^2 + \tfrac{1}{2}\mu_2\|\int_0^T \mathcal{E}(v)(t,x)dt\|_0^2 = \\ \tfrac{1}{2}|v^0|_0^2 + \int_0^T \langle f, v\rangle\,ds.\end{gathered} \tag{4.42}$$

Установим сначала, что v удовлетворяет соотношению (3.3). Умножая (4.10) на φ и интегрируя по частям, получаем, что

$$\begin{gathered}(v^n(T,x),\varphi)-\int_0^T(v_i^nv^n,\partial\varphi/\partial x_i)\,dt+\mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+\\+\int_0^T(\mu_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+\mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x),\mathcal{E}(\varphi))\,ds\,dt=\\=\int_0^T\langle f,\varphi\rangle\,dt+(v^0,\varphi),\varphi\in V.\end{gathered}\tag{4.43}$$

Из оценок (4.33) и теоремы 2.2 из [14], с. 220, вытекает сильная сходимость (с точностью до подпоследовательности) v^n к v в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Кроме того, в силу непрерывности вложения $L_4(\Omega)\subset W_2^1(\Omega))$ (см. [14], с. 131) и леммы 3.3 (см. [14], с. 233) нетрудно видеть, что

$$\|v_i^nv^n\|_0^2=\int\limits_0^T|v_i^nv^n|_0^2\,dt\leqslant M\int\limits_0^T\|v^n\|_{L_4(\Omega)}^4\,dt\leqslant$$
$$M\int\limits_0^T\|v^n\|_1^2\|v^n\|_0^2\,dt\leqslant M\int\limits_0^T\|v^n\|_1^2\,dt\leqslant M.$$

Отсюда следует слабая сходимость $v_i^nv^n$ к v_iv в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Очевидно, что остальные первые сомножители в скалярных произведениях в (4.43) слабо сходятся к своим пределам. Поэтому

$$\begin{gathered}(v(T,x),\varphi)-\int_0^T(v_iv,\partial\varphi/\partial x_i)\,dt+\mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+\\+\int_0^T(\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))\,dt+\mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x),\mathcal{E}(\varphi))\,d\,sdt=\\=\int_0^T\langle f,\varphi\rangle\,dt+(v^0,\varphi),\varphi\in V.\end{gathered}\tag{4.44}$$

Нетрудно видеть, что тождество (4.44) остается справедливым при замене T на t. Заменяя T в (4.44) на t и учитывая, что в силу $v\in L_2(0,T;V)$ под знаком интеграла находятся суммируемые функции, продифференцируем (4.44) по t при п.в. t. Мы получим соотношение (3.3). Используя такие же выкладки, как при выводе (4.22), получаем, что справедливо соотношение (4.42).

Из (4.41) и (4.42) вытекает, что $\|x^n\|_{\aleph}\to\|x\|_{\aleph}$.

Отсюда и из слабой сходимости x^n в $\aleph$ вытекает сильная сходимость x^n к x в $\aleph$ (см. [19], с. 179). Из сильной сходимости x^n в $\aleph$ вытекает сильная сходимость x_i^n в соответствующих пространствах. В частности, $\mathcal{E}(v^n)\to\mathcal{E}(v)$ в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ сильно. В силу неравенства Корна отсюда следует, что $v^n\to v$ в $L_2(0,T;V)$ сильно. Кроме того, $v^n(T,x)$ сходится к $v(T,x)$ в H сильно.

Теорема 4.2 доказана.

4.4. Завершение доказательства теоремы 3.1

Покажем теперь, что полученное (v,θ), $(v\in U(0,T),\theta\in\Upsilon)$, является слабым решением задачи (1.1)-(1.5). Выше было установлено, что v удовлетворяет соотношению (3.3). Перепишем (3.3) в виде

$$d\langle v,\varphi\rangle/dt=\langle z,\varphi\rangle,\tag{4.45}$$

где $\langle z,\varphi\rangle$ означает двойственность между V' и V, а

$$z=\partial(v_iv)/\partial x_i-\mu_0\triangle v-\mathrm{Div}[\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v)-\mu_2\int\limits_0^t\mathrm{Div}[\mathcal{E}(v)(s,x)]\,ds+f.\tag{4.46}$$

Из оценок (4.21) и равенства (4.46) вытекает, что $z \in L_2(0,T;V')$,

$$\|z\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant M(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0).$$

Отсюда в силу леммы 1.1 из [14], с. 201, следует, что $\partial v/\partial t \in L_2(0,T;V')$ и

$$\|v\|_{U(0,T)} \leqslant M(\|f\|_{L_2(0,T;V')} + |v^0|_0),$$

а в силу леммы 1.4 из [14], с. 211, следует, что $v \in C_w(0,T;H)$. Таким образом, $v \in U(0,T)$. Кроме того, $v|_{t=0} = v^n|_{t=0} = v^0$. Следовательно, v удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (1.1)-(1.5) для v.

Установим теперь, что $\theta \in \Upsilon$ и удовлетворяет соотношению (3.4).

Из (4.13) вытекает, что

$$\begin{gathered} d(\theta^n,\varphi)/dt - (v_i^n\theta^n, \partial\varphi/\partial x_i) + \chi(\partial\theta^n/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_i) = \\ \langle g,\varphi\rangle + (\widetilde{\mu}_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v^n),\varphi) + \mu_2(\int\limits_0^t \mathcal{E}(v^n)(s,x):\mathcal{E}(v^n)(t,x)ds,\varphi), \end{gathered} \tag{4.47}$$

в смысле распределений на $(0,T)$ для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Умножим (4.47) на функцию $\psi(t)$, бесконечно дифференцируемую, такую, что $\psi(0) =\psi(T) = 0$ и проинтегрируем на [0,T], а затем по частям:

$$\begin{gathered} -\int_0^T(\theta,\varphi)\psi'(t)\,dt - \int_0^T(v_i^n\theta^n, \partial\varphi/\partial x_i)\psi(t)\,dt + \chi\int_0^T(\partial\theta^n/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_i)\,\psi(t)\,dt = \\ \int_0^T\langle g,\varphi\rangle\psi(t)\,dt + \mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v),\varphi)\psi(t)\,dt + \int_0^T(\mu_1(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v^n),\varphi)\psi(t)\,dt \\ +\mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v^n)(s,x)\,ds:\mathcal{E}(v^n),\varphi)\,\psi(t)\,dt, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{gathered} \tag{4.48}$$

Из сильной сходимости v^n в $L_2(0,T;V)$ и θ^n в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$ вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых, кроме третьего в левой части (4.48).

Из оценки (4.9) вытекает ограниченность θ^n в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, а следовательно, слабая компактность в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Считаем без ограничения общности, что θ^n слабо сходится к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Тогда в третьем слагаемом также допустим предельный переход.

Делая в (4.48) предельный переход, получаем тождество

$$\begin{gathered} (-\int_0^T(\theta,\varphi)\psi'(t)\,dt) + \int_0^T(v_i\theta, \partial\varphi/\partial x_i)\psi(t)\,dt + \chi\int_0^T(\partial\theta/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_i)\psi(t)\,dt = \\ \int_0^T\langle g,\varphi\rangle\psi(t)\,dt + \mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\varphi)\psi(t)\,dt + \int_0^T(\mu_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v),\varphi)\psi(t)\,dt + \\ \mu_2\int_0^T\int_0^t(\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds:\mathcal{E}(v),\varphi)\psi(t)\,dt. \end{gathered} \tag{4.49}$$

Из (4.49) в силу произвольности ψ вытекает справедливость соотношения (3.4).

Перепишем (3.3) в виде

$$-\int\limits_0^T\langle\theta,\varphi\rangle\psi'(t)\,dt = \int\limits_0^T\langle u,\varphi\rangle\psi(t)\,dt, \tag{4.50}$$

где

$$\begin{gathered} u = -v_i\partial\theta/\partial x_i + \chi\triangle\theta + g + \mu_0\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v) + \mu_1(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v) + \\ \mu_2\int_0^t\mathcal{E}(v)(s,x)ds:\mathcal{E}(v). \end{gathered} \tag{4.51}$$

Здесь $\langle u,\varphi\rangle$ означает двойственность между $W_p^{-1}(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$. Из оценок (4.33) и (4.34) вытекает, что $u \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ и $\|u\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} \leqslant M$. Отсюда в силу леммы 1.1 из [14], с. 201, следует, что $\partial\theta/\partial t \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ и $\|\partial\theta/\partial t\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} \leqslant M\|u\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}$, а

$\theta \in C_w(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega))$ в силу леммы 1.4 из [14], с. 211. Таким образом, $\theta \in \Upsilon$. Кроме того, $\theta|_{t=0} = \theta^n|_{t=0} = \theta^0$. Следовательно, θ удовлетворяет требованиям слабого решения задачи (1.1)-(1.5) для θ.

Мы показали, что (v,θ) является слабым решением задачи (1.1)-(1.5).

Теорема 3.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Oldroyd J. G. Non-Newtonian flow of liquids and solids / J. G. Oldroyd // Rheology: Theory and Applications (F. R. Eirich, Ed.), AP, New York. — 1956. — Vol. I. — P. 653-682.

[2] Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройда / А.П. Осколков // Труды МИАН СССР. — 1988. Т. 179. — С. 126–164.

[3] Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. — Новосибирск: Наука, 1983. — 230 с.

[4] Агранович Ю.Я. Исследование математических моделей вязкоупругих жидкостей / Ю.Я. Агранович, П.Е. Соболевский // Докл. АН УССР. — 1989. — сер. А, 10. — С. 71–74.

[5] Орлов В.П. О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели нелинейно-вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Математические заметки. — 2008. — Т. 84, № 2. — С. 238–253.

[6] Звягин В.Г. Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Известия ВУЗов. Математика. — 2013. № 8. — С. 51–56.

[7] Blanchard D. Existence and uniqueness of the solution of a Boussinesq system with nonlinear dissipation / D. Blanchard, N. Bruyere, O. Guibe // Communications on pure and applied analysis. — 2013. — V. 12, № 5. — P. 2213–2227.

[8] Pawlow I. Global regular solutions to a Kelvin-Voigt type thermoviscoelastic system / I. Pawlow, W. Zajaczkowski // ArXiv.–1112.3176v1 [math.AP], 2011. — 52p.

[9] Consiglieri L. Weak solution for a class of non-Newtonian fluids with energy transfer / L. Consiglieri // J. Math. Fluid. Mech. — 2000. — V. 2. — P. 267–293.

[10] Bonetti E. Existence and uniqueness of the solution to a 3D thermoviscoelastic system / E. Bonetti, G. Bonfanti // Electromic Journ. of Diff.Equat. — 2003. V. 5. — P. 1–15.

[11] Воротников Д.А. Обзор результатов и открытых проблем по математическим моделям движения вязкоупругих сред типа Джеффриса / Д.А. Воротников, В.Г. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 30–50.

[12] Орлов В. П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / В. П. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 190–197.

[13] Крейн С.Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

[14] Темам Р. Уравнение Навье-Стокса / Р. Темам. — М: Мир, 1981. — 408 с.

[15] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[16] Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires / J.-L. Lions // Dunod Gauthiers-Villar, Paris. — 1969. — 554 c.

[17] Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. — М.: УРСС, 2004. — 112 с.

[18] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Math. Pure Appl. — 1988. — V. 146. — P. 65–96.

[19] Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

REFERENCES

[1] Oldroyd J. G. Non-Newtonian flow of liquids and solids. Rheology: Theory and Applications (F. R. Eirich, Ed.), AP, New York, 1956, Vol. I, pp. 653-682.

[2] Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids. [Oskolkov A.P. Nachal'no-kraevye zadachi dlya uravnenij dvizheniya zhidkostej Kel'vina-Fojgta i zhidkostej Oldrojta]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova Akademii nauk SSSR — Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1988, Vol. 179, pp. 126–164.

[3] Antontcev S.N., Kazhikhov A.V., Monahov V.N. Boundary value problems of mechanics of homogeneous fluids. [Antoncev S.N., Kazhixov A.V., Monaxov V.N. Kraevye zadachi mexaniki neodnorodnyx zhidkostej]. Novosibirsk: Nauka, 1983, 230 p.

[4] Agranovich Yu.Ya., Sobolevskii P.E. Research of Mathematical Models of Viscoelastic Liquids. [Agranovich Yu.Ya., Sobolevskij P.E. Issledovanie matematicheskix modelej vyazkouprugix zhidkostej]. *Doklady Akademii nauk Ukrainskoj SSR — Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, 1989, no. 10, pp. 71–74.

[5] Orlov V.P. On the Strong Solutions of a Regularized Model of a Nonlinear Visco-Elastic Medium. [Orlov V.P. O sil'nyx resheniyax nachal'no-kraevoj zadachi dlya regulyarizovannoj modeli nelinejno-vyazkouprugoj sredy]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2008, Vol. 84, no. 2, pp. 238–253.

[6] Zvyagin V.G., Orlov V.P. Orlov V.P. A weak solvability of a system of thermoviscoelasticity for the Jeffreys model. [Zvyagin V.G., Orlov V.P. Razreshimost' v slabom smysle sistemy termovyazkouprugosti dlya modeli Dzheffrisa]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2013, no. 8, pp. 51–56.

[7] Blanchard D., Bruyere N., Guibe O. Existence and uniqueness of the solution of a Boussinesq system with nonlinear dissipation. Communications on pure and applied analysis, 2013, Vol. 12, no. 5, pp. 2213–222.

[8] Pawlow I., Zajaczkowski W. Global regular solutions to a Kelvin-Voigt type thermoviscoelastic system. ArXiv.–1112.3176v1 [math.AP], 2011, 52 p.

[9] Consiglieri L. Weak solution for a class of non-Newtonian fluids with energy transfer. J. Math. Fluid. Mech, 2000, Vol. 2, pp. 267–293.

[10] Bonetti E., Bonfanti G. Existence and uniqueness of the solution to a 3D thermoviscoelastic system. Electromic Journ. of Diff. Equat., 2003, Vol. 5, pp. 1–15.

[11] Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. The review of results and open problems on mathematical models of thermoviscoelasticity for the Jeffreys model. [Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. Obzor rezul'tatov i otkrytyx problem po matematicheskim modelyam dvizheniya vyazkouprugix sred tipa Dzheffrisa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 2, pp. 30–50.

[12] Orlov V.P. On strong aprioristic estimates of solutions of a non-uniform initial-boundary problem of one model of the viscoelasticity. [Orlov V. P. Cil'nye apriornye ocenki reshenij neodnorodnoj nachal'no-kraevoj zadachi odnoj modeli vyazkouprugoj sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 190–197.

[13] Crane S.G. Functional analysis. [Krejn S.G. Funkcional'nyj analiz]. Moskow: Science, 1972, 544 p.

[14] Temam R. Navier-Stokes equations. [Temam R. Uravnenie Nav'e-Stoksa]. Moskow: Mir, 1981, 408 p.

[15] Triebel H. Theory of interpolation. Functional spaces. Differential operators. [Tribel' X. Teoriya interpolyacii. Funkcional'nye prostranstva. Differencial'nye operatory]. Moskow: Mir, 1980,

664 p.

[16] Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. Dunod Gauthiers-Villar, Paris, 1969, 554 p..

[17] Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Approximating and topological approach to research of problems of hydrodynamics. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Approksimacionno-topologicheskij podxod k issledovaniyu zadach gidrodinamiki]. Moskow: URSS, 2004, 112 p.

[18] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Ann. Math. Pure Appl., 1988, Vol. 146, pp. 65–96.

[19] Yosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

Орлов В. П., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования математического факультета. Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: orlov_vp@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Orlov V. P., doctor of physico-mathematical Sciences, professor of Chair of Mathematical Modelling of mathematical faculty. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: orlov_vp@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Паршин М. И., аспирант кафедры математического моделирования математического факультета. Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: parshin_maksim@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Parshin M. I., postgraduite student of chair of Mathematical Modelling of mathematical faculty. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: parshin_maksim@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64