УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

М. Н. Небольсина, С. Х. М. Аль Кхазраджи

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.01.2014 г.

Аннотация: исследуется одна нестационарная задача фильтрации в пористой среде. Некорректность по Ж. Адамару рассматриваемой задачи приводит к вычислению значений квадратного корня для некоторого неограниченного линейного оператора. Алгоритм регуляризации решений использует теорию корректных и некорректных задач Крейна. Требуется найти градиент давления на границе области. Решение этой задачи Ю. И. Бабенко представляет в виде формального ряда с неограниченным оператором, сходимость которого не обсуждается. Тем самым по существу не обсуждается вопрос о сходимости приближенных решений к точному и их устойчивости к погрешностям исходных данных. Предлагаемый в настоящей работе метод и алгоритм численной реализации решения позволяет устранить указанные недостатки.

Ключевые слова: задача фильтрации, корректные и некорректные задачи, полугруппа преобразований, дробные степени операторов.

ABOUT ONE PROBLEM OF A FILTRATION IN THE POROUS ENVIRONMENT

M. N. Nebolsina, S. H. M. Al Khazraji

Abstract: one non-stationary problem of a filtration in the porous continuum is investigated. The non-correctness due to Hadamard of the problem under consideration leads to the calculation of the square root for some unbounded linear operator. The algorithm of regularization of solutions uses the theory of both correct and non-correct Krein problems. It is required to find pressure gradient on area border. The solution of this problem of Yu.I.Babenko submits in the form of a formal row with the unbounded operator which convergence isn't discussed. Thereby in essence the question of convergence of approximate solution to exact and their resistance to errors of basic data isn't discussed. The method offered in the real work and algorithm of numerical implementation of the decision allows to eliminate the specified defects.

Keywords: problem of a filtration, correct and non-correct problems, semi group of transformations, fractional powers of operators.

В [1] с. 101 при исследовании процессов фильтрации в пористой среде для $x \in (0, \infty)$ и $t \in (0, \infty)$ рассматривается задача отыскания давления $p(t, x)$, удовлетворяющее уравнению

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) - (1-\nu)\gamma^2 \int\limits_0^t e^{\gamma(s-t)} p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x) \tag{1}$$

и начально-краевым условиям

$$p(0,x) = 0, \tag{2}$$

$$p(t,0) = q(t), \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0. \tag{3}$$

Здесь ν-доля объема проточных зон, γ-константа массообмена между проточными и застойными зонами, a- коэффициент пьезопроводимости.

Требуется найти градиент давления у границы области.

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = \varphi(t). \tag{4}$$

В [1] ответ предъявляется в виде

$$\varphi(t) = \mathrm{L}_{\mathrm{t}}^{\frac{1}{2}} q(t) = \sqrt{\frac{a}{\nu}} e^{-\gamma t} M e^{\gamma t}, \tag{5}$$

где неограниченный оператор M формально выписывается в виде ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{D}^{\frac{1}{2}-n}, \tag{6}$$

где $a_0 = 1, a_1 = \gamma(\beta - 1), a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_{m-k}a_k, (k \geqslant 3)$, сходимость которого в [1] не обсуждается.

Тем самым по существу не обсуждается вопрос о сходимости приближенных решений к точному и их устойчивости к погрешностям исходных данных.

Предлагаемый в настоящей работе метод и алгоритм численной реализации решения как задачи (1)–(3) так и вычисления функции $\varphi(t)$ в (4) позволяет устранить указанные недостатки.

1. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ

Здесь мы используем довольно общий метод С. Г. Крейна решения краевых задач для уравнений эллиптического типа в банаховом пространстве ([5] с. 322).

При таком подходе систему (1)-(3) запишем в операторной форме

$$\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = Ap(x), x > 0 \tag{1.1}$$

$$p(0) = q, \lim_{x\to\infty} \|p(x)\|_C = 0, \tag{1.2}$$

где оператор A задается интегро-дифференциальным выражением $\frac{1}{a}\mathrm{L}_t$ и областью определения

$$D(A) = \{u \in C_{[0,\infty)}, \frac{du}{dt} \in C_{[0,\infty)}, u(0) = 0\}, \tag{1.3}$$

$C_{[0,\infty)}$-пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $[0,\infty)$ функций с нормой $\|u\| = \sup_{t\in[0,\infty)} |u(t)|$. Тогда, если для оператора A определен оператор $\sqrt{A}$, то решение задачи (1.1)-(1.2) по теореме С.Г.Крейна ([5] с.323) имеет вид

$$p(x) = U(x, -\sqrt{A})q, \tag{1.4}$$

где $U(x,-\sqrt{A})$-сильно непрерывная в $C_{[0,\infty)}$ полугруппа линейных преобразований с генератором $-\sqrt{A}$.

И задача вычисления функции $\varphi(t)$ сводится у вычислению

$$\frac{dp}{dx}|_{x=0} = -\sqrt{A}q = -AA^{-\frac{1}{2}}q. \tag{1.5}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА $\sqrt{A}$

Таким образом, для получения решений задач (1)-(3) и (4) необходимо построить оператор $A^{\frac{1}{2}}$ и полугруппу $U(x,-\sqrt{A})$, имеющую, в силу [4], представление

$$U(x,-\sqrt{A})q = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\frac{x^2}{4s})}{s^{\frac{3}{2}}}U(s,-A)qds = -\frac{A}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)qds, \tag{2.1}$$

где $U(x,-A)$-сильно непрерывная полугруппа с генератором $-A$.

Оператор A представим в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где оператор A_1 задается дифференциальным выражением

$$l_1u(t) = \frac{\nu}{a}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1-\nu}{a}u(t) \tag{2.2}$$

и областью определения $D(A_1) = \{u \in C_{[0,\infty)}, l_1u \in C_{[0,\infty)}, u(0) = 0\}$. Оператор A_2 зададим интегральным оператором

$$A_2u(t) = -\frac{1-\nu}{a}\gamma^2\int\limits_0^t e^{\gamma(s-t)}u(s)ds. \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что оператор A_2 ограничен в $C_{[0,\infty)}$ в силу очевидной оценки

$$\|A_2u\| \leqslant \frac{1-\nu}{a}\gamma\|u\|. \tag{2.4}$$

Заметим, что операторы A_1 и A_2 коммутируют на $D(A_1)$. Это следует из легко проверяемого равенства

$$\int\limits_0^t e^{\gamma(s-t)}u'(s)ds = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t e^{\gamma(s-t)}u(s)ds. \tag{2.5}$$

Полугруппа $U(x,-A_1)$ с генератором A_1 имеет вид

$$U(x,-A_1)u(t) = e^{-\frac{1-\nu}{a}x}\left\{\begin{array}{cc} u(t-\frac{\nu}{a}x), & \frac{\nu}{a}x \leqslant t; \\ 0, & \frac{\nu}{a}x > t \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Отсюда следует оценка

$$\|U(x,-A_1)\| \leqslant e^{-\frac{1-\nu}{a}x}. \tag{2.7}$$

Далее для получения представления полугруппы $U(x,-A_2)$ воспользуемся рядом

$$U(x,-A_2)u(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}(-A_2)^n u(t), \tag{2.8}$$

где

$$(-A_2)^n u(t) = \left\{\begin{array}{cc} \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int_0^t e^{-\gamma s}s^{n-1}u(t-s)ds, & n = 1,2,...; \\ I, & n = 0. \end{array}\right. \tag{2.9}$$

I-тождественный оператор.

Это дает оценку

$$\|A_2^n u\| \leqslant \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma s}s^{n-1}ds\|u\| = (\frac{1-\nu}{a})^n\gamma^n\|u\|. \tag{2.10}$$

Оценивая полугруппу (2.8), используя (2.9), получаем оценку

$$\|U(x,-A_2)u\| \leqslant \|u\| \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-\nu}{a})^n \frac{\gamma^n x^n}{n!} = e^{\frac{(1-\nu)\gamma}{a}x}\|u\|. \tag{2.11}$$

Теперь нетрудно видеть, что из (2.7) и (2.11) следует оценка

$$\|U(x,-A)\| \leqslant \|U(x,-A_1)\|\|U(x,-A_2)\| \leqslant exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]. \tag{2.12}$$

Далее, пользуясь (2.9) в (2.8), получаем представление

$$U(x,-A_2)u(t) = u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n}{a^n (n-1)!n!} \int_0^t e^{-\gamma s} s^{n-1} u(t-s)ds =$$

$$= u(t) + \int_0^t (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n s^{n-1}}{a^n (n-1)!n!}) e^{-\gamma s} u(t-s)ds =$$

$$= u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^t (\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs}\gamma]^{2m}}{m!(m+1)!}) e^{-\gamma s} u(t-s)ds =$$

$$u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^t e^{-\gamma s} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs}) u(t-s)ds.$$

Здесь мы воспользовались соответствующим представлением функции Бесселя $I_1(z)$ первого рода (см [7] с.642).

Теперь, пользуясь (2.6), получаем выражение для композиции полугрупп

$$U(x,-A)u(t) = U(x,-A_1)U(x,-A_2)u(t) =$$

$$= e^{-\frac{1-\nu}{a}x} \begin{cases} u(t-\frac{\nu}{a}x) + (1-\frac{\nu}{a})\gamma^2 x, & s \leqslant t - \frac{\nu}{a}x; \\ \int_0^{t-\frac{\nu}{a}x} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs}) e^{-\gamma s} u(t-\frac{\nu}{a}x - s)ds, 0, & t-\frac{\nu}{a}x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Используя (2.10) в (1.5) получаем представление для градиента решения задачи (1)-(3)

$$\varphi(t) = A^{\frac{1}{2}} q(t) = \frac{1}{\pi} A \int_0^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} U(s,-A) q(t)ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} U(s,-A) A q(t)ds. \tag{2.14}$$

В последнем равенстве учтено условие $q(0) = 0$. Из (2.14), (2.11) и (2.7), в частности для $q \in \mathrm{D}(A)$ следует оценка

$$\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{\pi}\|Aq\| \int_0^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}s} ds = (\frac{a}{\pi(1-\nu)(1-\gamma)})^{\frac{1}{2}}\|Aq\|. \tag{2.15}$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема. *Задача (1)-(3) имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$p(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4s}} U(s,-A) q(t)ds. \tag{2.16}$$

Доказательство следует из теоремы С. Г. Крейна ([5] с.324) о представлении обобщенного решения задачи (1.1)-(1.2) в виде

$$p(x) = U(x, (-A)^{\frac{1}{2}})q, \tag{2.17}$$

где полугруппа $U(x, (-A)^{\frac{1}{2}})$ имеет вид

$$U(x, (-A)^{\frac{1}{2}})q = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4s}} U(s, -A)q(t)ds.$$

(см.[4] с.358). Кроме того для решения задачи (1)-(3) выполняется следующая оценка на порядок его убывания

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |p(t,x)| \leqslant e^{[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]^{\frac{1}{2}} x} \|q\|. \tag{2.18}$$

Доказательство следует из оценки на полугруппу $\|U(x, -A^\alpha)\| \leqslant e^{-\omega^\alpha x}, (\alpha \in (0,1))$, где $\omega \geqslant$- тип полугруппы, приведенной, например, в [6].

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Таким образом, вычисление функции $\varphi(t) = A^{\frac{1}{2}} q(t)$, в соответствии с (2.14), сводится к последовательности следующих шагов:

1. Вычисление функции

$$Aq(t) = \frac{\nu}{a} q'(t) - \frac{1-\nu}{a} q(t) + A_2 q(t). \tag{3.1}$$

Это равенство показывает, что первое слагаемое содержит некорректную по Ж.Адамару операцию в силу неограниченности оператора дифференцирования. Это приводит к согласованию шага интерполирования h с погрешностью ε для исходных данных q. Так, согласно [3] с.92, в случае определения производной $q'(t_0) \approx \frac{q(t_0+h)-q(t_0)}{h}$ должно выполняться соотношение $h = 2\sqrt{M\varepsilon}$, где $M = \max_{\xi\in R_+} |q''(\xi)|$.

2. Заключительная вычислительная операция функции $\varphi(t) = A^{-\frac{1}{2}} Aq(t)$ является корректной, в силу ограниченности оператора $A^{-\frac{1}{2}}$, следующего из представления [5] с. 150

$$A^{-\frac{1}{2}} u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} U(s, -A)u ds \tag{3.2}$$

и оценки

$$\|A^{-\frac{1}{2}} u\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} \|U(s, -A)u\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a} s] ds = \frac{a}{(1-\nu)(1-\gamma)} \|u\|. \tag{3.3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю.И. Бабенко. — Л.: Химия, 1986. — 144 с.

[2] Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена / Ю.И. Бабенко. — СПб: НПО "Профессионал", 2009. — 584 с.

[3] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1973. — 631 с.

[4] Иосида К. Функциональный анализ. Учебник / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[5] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[6] Костин В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В.А. Костин, М.Н. Небольсина // Доклады Академии Наук. — 2009. — Т. 428, № 1. — С. 20–22.

[7] Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.

[8] Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

[9] Баев А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

[10] Орлов В. П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 190–197.

[11] Гудович А. Н. Принцип усреднения в задаче о почти периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений в условиях отсутствия гладкости правой части / А.Н. Гудович, М.И. Каменский, Е.В. Хроликова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 51–60.

REFERENCES

[1] Babenko Yu.I. Heat and Mass Transfer. The Method of Calculation of Heat and Diffusion Currents. [Babenko Yu.I. Teplomassoobmen, metody rascheta teplovyx i diffuzionnyx potokov]. Leningrad: Chemistry, 1986, 144 p.

[2] Babenko Yu.I. Methods of a fractional integrodifferentsirovaniye in applied of the theory of a Heat and Mass Transfer. [Babenko Yu.I. Metody drobnogo integrodifferencirovaniya v prikladnyx zadachax teorii teplomassoobmena]. St. Petersburg: NPO "Proffesional", 2009, 584 p.

[3] Bahvalov N.S. Numerical methods. [Baxvalov N.S. Chislennye metody]. Moscow: Nauka, 1973, 631 p.

[4] Iosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz. Uchebnik]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

[5] Krejn S.G. Linear Differential Equations in Banach Spaces. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

[6] Kostin V.A., Nebol'sina M.N. Well-Posedness of Boundary Value Problems for a Second-Order Equation. [Kostin V.A., Nebol'sina M.N. O korrektnoj razreshimosti kraevyx zadach dlya uravneniya vtorogo poryadka]. *Doklady Akademii Nauk — Doklady Mathematics*, 2009, Vol. 428, no. 1, pp. 20–22.

[7] Lavrent'ev M.A, Shabat B.V. Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. [Lavrent'ev M.A., Shabat B.P. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo]. Moscow: Nauka, 1973, 736 p.

[8] Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods of the solution of incorrect problems. [Tixonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnyx zadach]. Moscow: Nauka, 1986, 288 p.

[9] Baev A.D., Buneev S.S. Apriori estimates of solutions one of boundary-value problem in the band for degenerate elliptic equation of high order are obtained. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka reshenij odnoj kraevoj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo*

universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2012, no. 1, pp. 81–92.

[10] Orlov V.P. Strong apriori estimates of solutions inhomogeneous initial boundary value problem one model of viscoelastic medium. [Orlov V. P. Sil'nye apriornye ocenki reshenij neodnorodnoj nachal'no-kraevoj zadachi odnoj modeli vyazkouprugoj sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 190–197.

[11] Gudovich A.N., Kamenskiy M.I., Hrolikova E.V. The principle of averaging in the problem of almost periodic solutions of ordinary differential equations in terms of the smoothness of the right part. [Gudovich A.N., Kamenskij M.I., Xrolikova E.V. Princip usredneniya v zadache o pochti periodicheskix resheniyax obyknovennyx differencial'nyx uravnenij v usloviyax otsutstviya gladkosti pravoj chasti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 51–60.

Небольсина М.Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского Государственного Университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Тел.: (473)220–83–64

Nebolsina M.N., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Tel.: (473)220–83–64

Аль Кхазраджи С.Х.М., аспирант кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского Государственного Университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: saohhatem@yahoo.com
Тел.: (473)220–83–64

Al Khazraji S.H.M., post-graduate student of chair of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: saohhatem@yahoo.com
Tel.: (473)220–83–64