УДК 517.9; 519.216.2

О СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

Е. Ю. Машков

Курский государственный университет

Поступила в редакцию 03.12.2013 г.

Аннотация: под стохастическим уравнением леонтьевского типа мы понимаем специальный класс стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, у которых в левой части имеется вырожденный постоянный линейный оператор, а в правой части – невырожденный постоянный линейный оператор. Кроме этого, в правой части имеется слагаемое, зависящее только от времени. Отметим, что для исследования решений таких уравнений необходимо использовать производные высших порядков от свободных членов правой части (включая винеровский процесс). В связи с этим, для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов. Это позволяет при исследовании не использовать аппарат теории обобщенных функций. В результате получаются аналитические формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, уравнение леонтьевского типа.

ON THE STOCHASTIC lEONTIEFF TYPE EQUATION

E. Yu. Mashkov

Abstract: we understand Leontieff type equations as a special class of stochastic differential equations in Ito form such that in their left-hand side there is a degenerate constant linear operator and the right-hand side – a non-degenerfate constant linear operator. Besides, in the right-hand side there is a summand depending only on time. Note that for investigation of solutions to such equations it is necessary to use high order derivatives of the absolute terms in the right-hand side (including the Wiener process). For diffenetiation of the Wiener process we use the machinery of Nelson's mean derivatives. This allows us to avoid using the generalized functions. As a result we obtain analytical formulae for solutions in terms of mean derivatives of the Wiener process.

Keywords: mean derivative, current velocity, Winer processes, Leontieff type equation.

ВВЕДЕНИЕ

Обсуждаемый вопрос связан с методом измерения динамически искаженных сигналов, предложенным в [1], [2]. Стохастическим уравнением леонтьевского типа называется стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида $\widetilde{A}\xi(t) = \int_0^t \widetilde{B}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \widetilde{w}(t)$, где $\xi(t)$ – случайный, а $f(t)$ – не случайный n-мерные векторы $\widetilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^n, $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – $n \times n$ матрицы, $\widetilde{A}$ вырождена, а $\widetilde{B}$ – невырождена. Физический смысл: $f(t)$ – входящий сигнал в устройство, описываемое операторами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, белый шум, т. е. "производная" $\widetilde{w}(t)$, – помехи, $\xi(t)$ – сигнал на выходе из устройства (см. [1], [2]). С помощью преобразования Кронекера-Вейерштрасса [3] для регулярного пучка матриц $\widetilde{B} + \lambda\widetilde{A}$ в работе

[4] для таких уравнений был изучен вопрос их приведения к каноническому виду и получены аналитические формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса. Здесь мы проводим альтернативное изучение уравнения, используя преобразование регулярного пучка матриц к канонической форме Шура.

Кроме настоящего введения, статья содержит два параграфа. Первый посвящен изложению основ теории производных в среднем в объеме, необходимом для целей настоящей статьи. Во втором изучаются вопросы о приведении стохастических уравнений леонтьевского типа к каноническому виду и получены аналитические формулы для решений в терминах производных в среднем винеровского процесса.

Более подробно предварительные сведения об аппарате производных в среднем изложены в [5].

1. ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

(i) "прошлое" $\mathcal{P}_t^\xi$ – порожденное прообразами борелевских множеств в R^n при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to R^n$ для $0 < s < t$;

(ii) "будущее" $\mathcal{F}_t^\xi$ – порожденное аналогичным образом для $t < s < l$;

(iii) "настоящее" $\mathcal{N}_t^\xi$ – порожденное самим отображением $\xi(t)$.

Все семейства мы считаем полными, то есть пополняем всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно "настоящего" $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ.

Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону (см., например, [6], [7], [8]) даем следующее определение:

Определение 1 ([5])**.** *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \triangle t)}{\triangle t}\right),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [9]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$

могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t+\triangle t)-\xi(t)}{\triangle t}|\xi(t)=x\right)$$
$$Y_*^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t)-\xi(t-\triangle t)}{\triangle t}|\xi(t)=x\right)$$

на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t,\xi(t))$.

Определение 2 ([5])**.** *Производная $D_S = \frac{1}{2}(D+D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D-D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y_*^0(t,x))$ и $u^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y_*^0(t,x))$.

Определение 3 ([5])**.** *$v^{\xi}(t) = v^{\xi}(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^{\xi}(t) = v^{\xi}(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов (см., например, [6], [7], [8], [5]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает "случайность" процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс ([5]), который мы обозначим символом $w(t)$.

Лемма 4 ([5], [4])**.** *Для $t \in (0,l]$ имеют место равенства*

$$Dw(t) = 0$$
$$D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}$$
$$D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}.$$

При целом $k \geqslant 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}.$$

2. ИЗУЧЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

Рассмотрим стохастическое уравнение леонтьевского типа в R^n

$$\widetilde{A}\xi(t) = \int\limits_0^t \widetilde{B}\xi(s)ds + \int\limits_0^t f(s)ds + \widetilde{w}(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — случайный, а $f(t)$ — не случайный n-мерные векторы $\widetilde{w}(t)$ — винеровский процесс в R^n, $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – $n \times n$ матрицы, $\widetilde{A}$ вырождена, а $\widetilde{B}$ — невырождена. Будем считать, что $f(t)$ — достаточно гладкая функция, принимающая в нуле нулевое значение со всеми своими производными.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема:

Теорема 5. (Обобщенная вещественная форма Шура [3]) *Для регулярного пучка $B+\lambda A$ найдутся вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R, такие, что матрица Q_LAQ_R – верхняя квазитреугольная(т. е. верхняя блочно-треугольная матрица с диагональными блоками размера 1×1 и 2×2; блоки размера 1×1 соответствуют вещественным собственным значениям, а блоки размера 2×2 – сопряженным парам комплексных собственных значений), а матрица Q_LBQ_R – верхняя треугольная.*

Выполним для $\widetilde{B}+\lambda\widetilde{A}$ преобразование Шура. Тогда уравнение (1) преобразуется следующим образом

$$Q_L\widetilde{A}Q_RQ_R^{-1}\xi(t)=\int\limits_0^t Q_L\widetilde{B}Q_RQ_R^{-1}\xi(s)ds+\int\limits_0^t Q_Lf(s)ds+Q_L\widetilde{w}(t)$$

или в новых обозначениях примет вид

$$A\eta(t)=\int\limits_0^t B\eta(s)ds+g(t)+w(t), \tag{2}$$

где $\eta(t)=Q_R^{-1}\xi(t)$, $A=Q_L\widetilde{A}Q_R$, $B=Q_L\widetilde{B}Q_R$, $w(t)=Q_L\widetilde{w}(t)$ – винеровский процесс, $\int_0^t Q_Lf(s)ds=g(t)$. При соответствующей нумерации векторов базиса в A сначала вдоль главной диагонали стоят блоки размера 2×2, потом невырожденные блоки размера 1×1, а затем вырожденные блоки размера 1×1.

Из вида (2) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (2) предполагается вида $\xi(0)=0$. Отметим сразу, что построенные нами ниже решения этому условию не удовлетворяют и, более того, при $t=0$ они не определены. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0>0$ (см. ниже).

Замечание 6. *Переписав (2) в виде $A\eta(t)-B\int_0^t\eta(s)ds-g(t)=w(t)$, мы видим, что "настоящее" для процесса $A\eta(t)-B\int_0^t\eta(s)ds-g(t)$ совпадает с "настоящим" для $w(t)$. Поэтому последнюю σ-алгебру мы и будем использовать при нахождении производных в среднем, т. е. применять к (2) производные D^w, D^w_* или D^w_S.*

В соответствии с канонической формой Шура, уравнение (2) распадается на стохастические уравнения следующих типов. Для блоков размера 2×2 получаем пары уравнений

$$a_{ii}\eta^i(t)+a_{i,i+1}\eta^{i+1}(t)+a_{i,i+2}\eta^{i+2}+\ldots+a_{in}\eta^n=$$
$$=\int\limits_0^t(b_{ii}\eta^i(s)+b_{i,i+1}\eta^{i+1}(s)+\ldots+b_{in}\eta^n(s))ds+g^i(t)+w^i(t),$$
$$a_{i+1,i+1}\eta^{i+1}(t)+a_{i+1,i+2}\eta^{i+2}+\ldots+a_{i+1,n}\eta^n=$$
$$=\int\limits_0^t(b_{i+1,i+1}\eta^{i+1}(s)+b_{i+1,i+2}\eta^{i+2}(s)+\ldots+b_{i+1,n}\eta^n(s))ds+g^{i+1}(t)+w^{i+1}(t)$$

Для этой пары уравнений имеют место аналитические формулы для решений

$$\eta^{i+1}(t)=\int\limits_0^t \frac{1}{a_{i+1,i+1}}\exp[\frac{b_{i+1,i+1}}{a_{i+1,i+1}}(t-u)]dw_u^{i+1}+$$
$$+\int\limits_0^t[g^{i+1}(u)+\int\limits_0^u(\frac{b_{i+1,i+2}}{a_{i+1,i+1}}\eta^{i+2}(s)+\ldots$$
$$+\frac{b_{i+1,n}}{a_{i+1,i+1}}\eta^n(s))ds]\exp[\frac{b_{i+1,i+1}}{a_{i+1,i+1}}(t-u)]du-$$
$$-\frac{a_{i+1,i+2}}{a_{i+1,i+1}}\eta^{i+2}-\ldots-\frac{a_{i+1,n}}{a_{i+1,i+1}}\eta^n,$$

$$\eta^i(t)=\int\limits_0^t\frac{1}{a_{ii}}\exp[\frac{b_{ii}}{a_{ii}}(t-u)]dw_u^i+\int\limits_0^t[g^i(u)+\int\limits_0^u(\frac{b_{i,i+1}}{a_{ii}}\eta^{i+1}(s)+\ldots$$
$$+\frac{b_{in}}{a_{ii}}\eta^n(s))ds]\exp[\frac{b_{ii}}{a_{ii}}(t-u)]du-\frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}\eta^{i+1}(t)-$$
$$-\frac{a_{i,i+2}}{a_{ii}}\eta^{i+2}-\ldots-\frac{a_{in}}{a_{ii}}\eta^n$$

Для блоков размера 1×1 получаем уравнения

$$a_{jj}\eta^j(t)+a_{j,j+1}\eta^{j+1}(t)+\ldots+a_{jn}\eta^n(t)=$$
$$=\int\limits_0^t(b_{jj}\eta^j(s)+b_{j,j+1}\eta^{j+1}(s)+\ldots+b_{jn}\eta^n(s))ds+g^j(t)+w^j(t),$$

Для такого типа уравнений тоже есть аналитическая формула для решений

$$\eta^j(t)=\int\limits_0^t\frac{1}{a_{jj}}\exp[\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)]dw_u^j+\int\limits_0^t[g^j(u)+\int\limits_0^u(\frac{b_{j,j+1}}{a_{jj}}\eta^{j+1}(s)+\ldots$$
$$+\frac{b_{jn}}{a_{jj}}\eta^n(s))ds]\exp[\frac{b_{jj}}{a_{jj}}(t-u)]du-$$
$$-\frac{a_{j,j+1}}{a_{jj}}\eta^{i+1}-\ldots-\frac{a_{jn}}{a_{jj}}\eta^n$$

Последние $n-m+1$ компонент процесса η, соответствующие нулевым диагональным блокам, соберем в одно матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}0 & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \ldots & a_{mn}\\ 0 & 0 & a_{m+1,m+2} & \ldots & a_{m+1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^m(t)\\ \eta^{m+1}(t)\\ \vdots\\ \eta^n(t)\end{pmatrix}=$$
$$=\int\limits_0^t\begin{pmatrix}b_{mm} & b_{m,m+1} & \ldots & b_{mn}\\ 0 & b_{m+1,m+1} & \ldots & b_{m+1,n}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^m(s)\\ \eta^{m+1}(s)\\ \vdots\\ \eta^n(s)\end{pmatrix}ds+$$

$$+\begin{pmatrix} g^m(t) \\ g^{m+1}(t) \\ \vdots \\ g^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^m(t) \\ w^{m+1}(t) \\ \vdots \\ w^n(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Из последнего уравнения системы (3) получаем, что

$$\int_0^t b_{nn}\eta^n(s)ds = -g^n(t) - w^n(t)$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\eta^n(t)$ применением к обеим частям производной D_S^w. Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D_*^w (и, следовательно, D_S^w) к интегралу в левой части дает одинаковый результат $\eta^n(t)$. Таким образом, в соответствии с Леммой 4, мы получаем, что

$$\eta^n(t) = -\frac{1}{b_{nn}}\dot{g}^n(t) - \frac{1}{b_{nn}}D_S w^n(t) = -\frac{1}{b_{nn}}\dot{g}^n(t) - \frac{1}{b_{nn}}\frac{w^n(t)}{2t} \quad (4)$$

Из предпоследнего уравнения системы (3) мы получаем, что

$$a_{n-1,n}\eta^n = \int_0^t (b_{n-1,n-1}\eta^{n-1}(s) + b_{n-1,n}\eta^n(s))ds + g^{n-1}(t) + w^{n-1}(t)$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, выводим

$$\eta^{n-1}(t) = \frac{a_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}}D_S\eta^n - \frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}}\eta^n - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}\dot{g}^{n-1}(t) - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}D_S w^{n-1}(t)$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $\eta^n(t)$ и использовав Лемму 4, получаем

$$\eta^{n-1}(t) = -\frac{a_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}\ddot{g}^n(t) + \frac{a_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}\frac{w^n(t)}{4t^2} +$$
$$+\frac{a_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}\dot{g}^n(t) + \frac{a_{n-1,n}}{b_{nn}b_{n-1,n-1}}\frac{w^n(t)}{2t} - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}\dot{g}^{n-1}(t) - \frac{1}{b_{n-1,n-1}}\frac{w^{n-1}(t)}{2t} \quad (5)$$

В точности аналогично, для $m \leqslant l \leqslant n-1$, получаем формулу для определения $\eta^l(t)$

$$D_S(a_{l,l+1}\eta^{l+1} + a_{l,l+2}\eta^{l+2} + \ldots + a_{ln}\eta^n) = b_{ll}\eta^l + b_{l,l+1}\eta^{l+1} + \ldots + b_{l,n}\eta^n +$$
$$+ \dot{g}^l(t) + D_S w^l(t) \quad (6)$$

С помощью Леммы 4 и формулы (6) нетрудно получить явное выражение для любого $\eta^l(t)$.

Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (3). Из определения симметрических производных в среднем видно, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции задействованы, как приращения по времени вправо, так и влево. Принимая во внимание Лемму 4, а также формулы (4) и (6), нетрудно видеть, что решения $\eta^l(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geqslant 1$. Так что решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют.

Один из вариантов разрешения указанной ситуации состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, l)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant t_0; \\ t, \text{ если } t_0 \leqslant t. \end{cases}$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в формулах (4) и (6) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t > t_0$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п. н. совпадают.

Итак, мы рассмотрели стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее динамически искаженные сигналы. Другие уравнения с производными в среднем, возникающие в приложениях, рассматривались в работах [10], [11], [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шестаков А. Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2010. — № 16 (192). — С. 116–120.

[2] Шестаков А. Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2011. — № 17 (234). — С. 70–75.

[3] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. — М.: Мир. — 2001. — 435с.

[4] Гликлих Ю. Е. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов / Ю. Е. Гликлих, Е. Ю. Машков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2013. — Т. 6, № 2. — С. 25–39.

[5] Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю. Е. Гликлих. — М.: Комкнига, 2005. — 416с.

[6] Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews, 1966. — Vol. 150, № 4. — P. 1079–1085.

[7] Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. — Princeton: Princeton University Press, 1967. — 142 p.

[8] Nelson E. Quantum fluctuations / E. Nelson. — Princeton: Princeton University Press, 1985. — 147 p.

[9] Партасарати К. Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Р. Партасарати. — М.: Мир, 1988. — 343 с.

[10] Азарина С. В. Дифференциальные уравнения и включения с производными в среднем справа в R^n / С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлих // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 2. — С. 138–146.

[11] Azarina S. V. Mechanical sustems with random perturbation on non-linear configuration spases / S. V. Azarina, Yu. E. Gliklikh, A. V. Obukhovskii // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 205–221.

[12] Винокурова Н. В. Об описании движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле на языке стохастической механики в пространстве Минковского / Н. В. Винокурова, Ю. Е. Гликлих // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 37–42.

REFERENCES

[1] Shestakov A. L., Sviridyk G. A. A New Approach to Measurement of Dynamically Perturbed Signals. [Shestakov A. L., Sviridyuk G. A. Novyj podxod k izmereniyu dinamicheski iskazhennyx

signalov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta — Vestnik of South Ural University. Series Mathematical Modelling and Computer Software*, 2010, no. 16(192), issue 5, pp. 116–120.

[2] Shestakov A. L., Sviridyk G. A. Optimal Meassurement of Dunamicaly Distorted Signals. [Shestakov A. L. Optimal'noe izmerenie dinamicheski iskazhennyx signalov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta — Vestnik of South Ural University. Series Mathematical Modelling and Computer Software*, 2011, no. 17(234), issue 8, pp. 70–75.

[3] Demmel J. Applied Numerical Linear Algebra. [Demmel' Dzh. Vychislitel'naya linejnaya algebra]. Moscow: Mir, 2001, 435p.

[4] Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes. [Gliklix Yu.E., Mashkov E.Yu. Stoxasticheskie uravneniya leont'evskogo tipa i proizvodnye v srednem sluchajnyx processov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta — Vestnik of South State University. Series Mathematical Modelling and Computer software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 25–39.

[5] Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis in the Problems of Mathematical Physics. [Gliklix Yu.E. Global'nyj i stoxasticheskij analiz v zadachax matematicheskoj fiziki]. Moscow: Komkniga, 2005, 416 p.

[6] Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. Phys. Reviews, 1966, Vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085.

[7] Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967, 142 p.

[8] Nelson E. Quantum fluctuations. Princeton: Princeton University Press, 1985, 147 p.

[9] Parthasaraty K. R. Introduction to Probability and Measure. [Partasarati K. R. Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i teoriyu mery]. Moscow: Mir, 1988, 343 p.

[10] Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. Differential equations and inclusions with forward mean derivatives in R^n. [Azarina S. V. Differencial'nye uravneniya i vklyucheniya s proizvodnymi v srednem sprava v R^n]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 2, pp. 138–146.

[11] Azarina S.V., Gliklikh Yu.E., Obukhovskii A.V. Mechanical systems with random perturbation on non-linear configuration spases. [Azarina S.V., Gliklikh Yu.E., Obukhovskii A.V. Mechanical systems with random perturbation on non-linear configuration spases]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 205–221.

[12] Vinokurova N.V., Gliklikh Yu.E. On the description of motion of quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics in Minkowski space. [Vinokurova N. V. Ob opisanii dvizheniya kvantovoj chasticy v klassicheskom kalibrovochnom pole na yazyke stoxasticheskoj mexaniki v prostranstve Minkovskogo]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 37–42.

Машков Евгений Юрьевич, аспирант, кафедра математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, г. Курск, Российская Федерация
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru
Тел.: +7–(920)–714–60–21

Mashkov E. Yu., Post Graduate Student of Departament of mathematical analysis and applied mathematics, Faculty of Physics, Mathematics and Informatics, Kursk State University, Kursk, Russian Federation
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru
Tel.: +7–(920)–714–60–21