УДК 517.988

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕКОМПАКТНЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

Дж. Аль-Обаиди, В. В. Обуховский

Воронежский Государственный Педагогический Университет

Поступила в редакцию 15.04.2014 г.

Аннотация: в работе вводится топологическая степень для класса псевдоациклических фундаментально сужаемых многозначных векторных полей в локально выпуклых пространствах. Данный класс включает в себя поля, соответствующие композициям мультиотображений почти ациклического типа с однозначными непрерывными отображениями. Мультиотображения подобного вида возникают при изучении операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений и включений. В работе обосновывается корректность определения степени, описываются ее основные свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке.

Ключевые слова: топологическая степень, многозначное отображение, мера некомпактности, уплотняющее отображение, фундаментально сужаемое отображение, неподвижная точка.

TOPOLOGICAL DEGREE FOR A CLASS OF NON-COMPACT MULTIFIELDS IN LOCALLY CONVEX SPACES

J. M. Al-Obaidi, V. V. Obukhovskii

Abstract: in the present paper, the topological degree for a class of pseudo-acyclic fundamentally restrictible multivalued vector fields in locally convex spaces is introduced. This class includes fields corresponding to compositions of multimaps of almost acyclic type with single-valued continuous maps. Such multimaps appear in the investigation of translation operators along trajectories of differential equations and inclusions. We justify the well-posedness of the degree definition, describe its main properties and give applications to fixed point theorems.

Keywords: topological degree, multivalued map, measure of noncompactness, condensing map, fundamentally restrictible map, fixed point.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе вводится топологическая степень для класса псевдоациклических фундаментально сужаемых многозначных векторных полей в локально выпуклых пространствах. Данный класс включает в себя поля, соответствующие композициям мультиотображений почти ациклического типа с однозначными непрерывными отображениями. Отметим, что мультиотображения подобного вида возникают при изучении операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений и включений. В работе обосновывается корректность определения степени, описываются ее основные свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке для фундаментально сужаемых и уплотняющих мультиотображений.

* Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 14-01-00468.

Отметим, что предлагаемая конструкция развивает построения топологической степени для мультиполей ациклического типа, изучавшиеся в работах [5], [11] и др.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E — хаусдорфово локально выпуклое пространство, $X \subseteq E$ — замкнутое подмножество, Λ — компактное топологическое пространство, $K(E)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств E.

Для многозначного отображения (мультиотображения) $F : X \to K(E)$ символом $\Phi = i - F$ мы будем обозначать многозначное векторное поле (мультиполе) $\Phi(x) = x - F(x)$, соответствующее F.

(1.1) Определение. (см., например, [7], [4], [11]) Выпуклое замкнутое множество $T \subseteq E$ называется фундаментальным для мультиотображения $F : X \to K(E)$ (или соответствующего ему мультиполя $\Phi = i - F$), если:
1) $F(X \cap T) \subseteq T$;
2) Из $x_0 \in \overline{co}(F(x_0) \cup T)$ следует $x_0 \in T$.

Подчеркнем, что определение не исключает случаи $T = \varnothing$ или $X \cap T = \varnothing$. Отметим также следующее важное обстоятельство.

(1.2) Лемма. Каждое фундаментальное множество мультиотображения F содержит множество неподвижных точек $FixF = \{x \in X : x \in F(x)\}$.

Выпуклое замкнутое множество $T \subseteq E$ называется фундаментальным для семейства мультиполей $\Psi = i - G : X \times \Lambda \to K(E)$, если оно фундаментально для каждого мультиполя $\Psi(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, из данного семейства.

Примерами фундаментальных множеств могут служить все пространство E или множество $\overline{co}(F(X))$.

Нетрудно проверить следующие свойства фундаментальных множеств.

(1.3) Лемма. Если T – фундаментальное множество мультиотображения $F : X \to K(E)$, $P \subset T$, то множество $\widetilde{T} = \overline{co}(F(X \cap T) \cup P)$ фундаментально для F.

(1.4) Лемма. Если $\{T_\alpha\}$ — некоторая система фундаментальных множеств мультиотображения F, то $\bigcap\limits_\alpha T_\alpha$ — также фундаментальное множество F.

Опишем теперь рассматриваемый ниже класс мультиотображений. (см. [6])

(1.5) Определение. Мультиотображение $F : X \to P(E)$ называется полунепрерывным сверху, если $F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ открыто для любого открытого подмножества $V \subseteq E$.

(1.6) Определение. Мультиотображение $F : X \to C(E)$ называется замкнутым, если его график $\Gamma_F = \{(x, y) : y \in F(x)\}$ – замкнутое подмножество в $X \times E$.

Справедливо следующее утверждение (см. [6]):

(1.7) Лемма. Всякое полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(E)$ замкнуто.

(1.8) Определение. Мультиотображение $F : X \to K(E)$ называется компактным, если образ $F(X)$ относительно компактен в E (то есть $\overline{F(X)}$ – компактно). Компактное и полунепрерывное сверху мультиотображение называется вполне непрерывным.

Нетрудно убедиться, что мультиполе $\Phi = i - F : X \to K(E)$, соответствующее полунепрерывному сверху мультиотображению $F : X \to K(E)$ полунепрерывно сверху. Если мультиотображение $F : X \to K(E)$ вполне непрерывно, то соответствующее ему мультиполе также называется вполне непрерывным.

Отметим следующее важное свойство (см. [6]).

(1.9) Лемма. Если $X' \subseteq X$ замкнуто, $\Psi : X \times \Lambda \to K(E)$ – семейство вполне непрерывных мультиполей, то множество $\Psi(X' \times \Lambda)$ замкнуто.

Нам понадобится также следующее легко проверяемое утверждение.

(1.10) Лемма. Если мультиотображения $F_0, F_1 : X \to K(E)$ вполне непрерывны, то мультиотображение $G : X \times [0,1] \to K(E)$,

$$G(x, \lambda) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda) F_0(x)$$

также вполне непрерывно.

(1.11) Определение. (см., например, [7], [4], [11]) Если мультиотображение $F : X \to K(E)$ имеет такое фундаментальное (возможно, пустое) множество T, что сужение F на $X \cap T$ компактно, то F и соответствующее ему мультиполе $\Phi = i - F$ называется фундаментально сужаемыми (на T).

Мультиотображение $G : X \times \Lambda \to K(E)$ такое, что каждое мультиотображение $G(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ фундаментально сужаемо на T и сужение G на $(X \cap T) \times \Lambda$ компактно, называется семейством фундаментально сужаемых (на T) мультиотображений.

(1.12) Лемма. Если $X_1 \subseteq X$, $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$ и $G : X \times \Lambda \to K(E)$ – семейство фундаментально сужаемых мультиотображений, то сужение $G \mid X_1 \times \Lambda_1$ – также семейство фундаментально сужаемых на T отображений.

(1.13) Определение. Фундаментальное множество T мультиотображения $F : X \to K(E)$ или семейства мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ такое, что $X \cap T \neq \varnothing$ и сужение F на $X \cap T$ (соответственно, G на $(X \cap T) \times \Lambda$) компактно, называется существенным.

(1.14) Определение. Если мультиотображение $F : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ обладает существенным фундаментальным множеством, то F или, соответственно, G называется вполне фундаментально сужаемым (на T). Этим же термином будем называть и соответствующее мультиполе $\Phi(x) = x - F(x)$ или семейство мультиполей $\Phi(x, \lambda) = x - G(x, \lambda)$.

Отметим, что каждое компактное мультиотображение вполне фундаментально сужаемо на E или $\overline{co}(F(X) \cup \{a\})$, где $a \in X$ произвольно.

В качестве другого важного класса фундаментально сужаемых мультиотображений мы будем рассматривать уплотняющие мультиотображения. Дадим необходимые определения. Напомним (см., например, [3], [4], [11]) следующее понятие.

(1.15) Определение. Пусть $(A, \geqslant)$ – частично упорядоченное множество. Отображение $\beta : P(E) \to A$ называется мерой некомпактности (МНК) в E, если

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega)$$

для любого $\Omega \in P(E)$.

Мера некомпактности β называется:

(1) монотонной, если из $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$, $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;

(2) несингулярной, если $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для любых $a \in E$, $\Omega \in P(E)$;

(3) полуаддитивной, если $\beta(\Omega_0 \cup \Omega_1) = \max\{\beta(\Omega_0), \beta(\Omega_1)\}$ для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$;

(4) инвариантной относительно отражения в нуле, если $\beta(-\Omega) = \beta(\Omega)$ для любого $\Omega \in P(E)$;

(5) вещественной, если $A = [0, +\infty]$ с естественным упорядочением и $\beta(\Omega) < +\infty$ для каждого ограниченного множества $\Omega \in P(E)$.

Если A – конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

(6) алгебраически полуаддитивной, если

$$\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$$

для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$;

(7) правильной, если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω.

Распространенными примерами мер некомпактности в нормированных пространствах, обладающими свойствами (1)–(7), являются мера некомпактности Хаусдорфа

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, \Omega \text{ имеет в } E \text{ конечную } \varepsilon - \text{сеть}\}$$

и мера некомпактности Куратовского

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d:\ d > 0,\ \Omega \text{ допускает разбиение на конечное}$$

$$\text{число множеств, диаметр которых меньше } d\}.$$

(1.16) Определение. (см., например, [4], [11]) Мультиотображение $F : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ называется уплотняющим относительно МНК β (или β-уплотняющим), если для любого $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным, выполнено, соответственно, $\beta(F(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$ или $\beta(G(\Omega \times \Lambda)) \ngeq \beta(\Omega)$.

Рассмотрим следующий важный класс уплотняющих мультиотображений.

(1.17) Определение. Пусть β – вещественная МНК в E и $0 \leqslant k < 1$. Мультиотображение $F : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ называются (k, β)-уплотняющими, если, соответственно, $\beta(F(\Omega)) \leqslant k\beta(\Omega)$ или $\beta(G(\Omega \times \Lambda)) \leqslant k\beta(\Omega)$ для любого $\Omega \subseteq X$. Соответствующие мультиполя или семейства мультиполей также называется β- или (k, β)-уплотняющими.

Имеют место следующие условия, обеспечивающие полную фундаментальную сужаемость уплотняющих мультиотображений (см. [11]).

(1.18) Лемма. Мультиотображение $F : X \to K(E)$ вполне фундаментально сужаемо в каждом из следующих случаев:

1) F полунепрерывно сверху и β-уплотняет относительно монотонной несингулярной МНК β;

2) X ограничено и F является (k, β)-уплотняющим относительно вещественной, монотонной, несингулярной и правильной МНК β.

Аналогичное свойство имеет место и для семейства мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$.

Более того, в обеих случаях несингулярность МНК β обеспечивает существование существенного фундаментального множества, содержащего любую наперед заданную точку $x \in X$.

Пусть H обозначает функтор когомологий Александера-Спеньера с целыми коэффициентами (см., напр., [10]).

Непустое пространство Y называется 0-ацикличным, если $H^0(Y) = \mathbb{Z}$, k-ацикличным ($k \geqslant 1$), если $H^k(Y) = 0$ и ацикличным, если оно k-ациклично для любого $k \geqslant 0$.

Пусть A – подпространство X.

(1.19) Определение. (см. [1]) Относительной размерностью A в X ($\dim_X A$) называется величина $\sup\limits_{C \subset A} \dim C$, где C – замкнуто в X и $\dim C$ обозначает топологическую размерность C.

По определению полагаем, что $\dim_X A = -\infty$ в том и только в том случае, если $A = \varnothing$.

Пусть $F : X \to K(E)$ – мультиотображение. Для $i \geqslant 0$ обозначим

$$M_F^i = \{x|\ x \in X,\ F(x) \text{ не является } i - \text{ацикличным}\}.$$

(1.20) Определение. Полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(E)$ называется почти ациклическим, если:

(a) $M_F^i = \varnothing$ для всех i, начиная с некоторого $i_0 \geqslant 0$;

(b) $\xi = \max\limits_{0 \leqslant i < i_0} (\dim_X M_F^i) < \infty$.

Если для всех $i \geqslant 0$ $\quad M_F^i = \varnothing$, то мультиотображение F называется ациклическим.

(1.21) Определение. Мультиотображение $F : X \to K(E)$ называется псевдоациклическим, если существует топологическое пространство Z и непрерывное отображение $\Theta : Z \to E$ такое, что F представимо в виде композиции

$$F = \Theta \circ \widetilde{F},$$

где $\widetilde{F} : X \to K(Z)$ почти ациклическое мультиотображение. Пара $(\Theta, \widetilde{F})$ будет называться разложением псевдоациклического мультиотображения F.

Пусть $U \subset E$ – выпуклая конечно ограниченная открытая окрестность нуля.

Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E. Обозначим $U_T = U \cap T$ и ∂U_T – относительную границу множества U_T.

Рассмотрим $F = \Theta \circ \widetilde{F} : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что:
a) $F(\bar{U} \cap T) \subseteq T$;
b) $F|_{\bar{U} \cap T}$ вполне непрерывно;
c) $FixF \cap \partial U_T = \varnothing$.

В этой ситуации определена целочисленная характеристика – топологическая степень $\gamma_T(i - F, \bar{U})$ псевдоациклического мультиполя $i - F$ относительно T, которая обладает следующими основными свойствами (см. [2]).

(1.22) Свойство нормализации. Если $\bar{U} \cap T \neq \varnothing$ и $\partial U \cap T = \varnothing$, то $\gamma_T(i - F, \bar{U}) = 1$.

(1.23) Свойство неподвижной точки. Если $\gamma_T(i - F, \bar{U}) \neq 0$, то $\varnothing \neq FixF \subset U_T$.

(1.24) Свойство сужения отображения. Если $T_1 \subset T$ – выпуклое замкнутое множество такое, что $F(\bar{U} \cap T) \subseteq T_1$, то

$$\gamma_T(i - F, \bar{U}) = \gamma_{T_1}(i - F, \bar{U}).$$

Чтобы описать следующее свойство, введем понятие гомотопии псевдоациклических мультиполей.

(1.25) Определение. Пусть $F_0 = \Theta_0 \circ \widetilde{F_0}$, $F_1 = \Theta_1 \circ \widetilde{F_1} : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклические мультиотображения такие, что
(a) $F_i(\bar{U} \cap T) \subset T$, $i = 0, 1$;
(b) $F_i|_{\bar{U}_T}$ вполне непрерывно , $i = 0, 1$;
(c) $FixF_i \cap \partial U_T = \varnothing$, $i = 0, 1$.

Назовем мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ гомотопными относительно T, если существуют почти ациклическое мультиотображение $\widetilde{F} : \bar{U} \times [0, 1] \to K(Z)$ и непрерывное отображение $\Theta : Z \times [0, 1] \to E$ такие, что:
(i) $\widetilde{F}(\cdot, 0) = \widetilde{F_0}$, $\widetilde{F}(\cdot, 1) = \widetilde{F_1}$;
(ii) $\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0$, $\Theta(\cdot, 1) = \Theta_1$;
(iii) для псевдоациклического мультиотображения $G : \bar{U} \times [0, 1] \to K(E)$, заданного как

$$G(x, \lambda) = \Theta(\widetilde{F}(x, \lambda), \lambda)$$

выполнено:
(1) $G(\bar{U}_T \times [0, 1]) \subseteq T$;
(2) $G|_{\bar{U}_T \times [0,1]}$ вполне непрерывно;
(3) $x \notin G(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in \partial U_T \times [0, 1]$.

Ясно, что можно отождествить $G(\cdot, 0) = F_0$, $G(\cdot, 1) = F_1$. Гомотопные мультиполя мы будем обозначать символом $\Phi_0 \sim \Phi_1$.

(1.26) Свойство гомотопической инвариантности. Если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то

$$\gamma_T(\Phi_0, \bar{U}) = \gamma_T(\Phi_1, \bar{U}).$$

2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ И ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНО СУЖАЕМЫХ МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть U – открытое выпуклое конечно ограниченное подмножество локально выпуклого пространства E; $F = \Theta \circ \widetilde{F} : \bar{U} \to K(E)$ – вполне фундаментально сужаемое псевдоациклическое мультиотображение такое, что

$$x \notin F(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Введем следующее понятие.

(2.1) Определение. Топологической степенью мультиполя $\Phi = i - F$, соответствующего F, называется топологическая степень мультиполя Φ относительно произвольного существенного фундаментального множества T:

$$\gamma(\Phi, \bar{U}) := \gamma_T(\Phi, \bar{U}).$$

Для доказательства корректности этого определения, то есть независимости степени от выбора существенного фундаментального множества, нам понадобится следующее утверждение, доказанное В.В. Обуховским и А.Г. Скалецким (см. [8]):

(2.2) Лемма. Если N – предкомпактное подмножество локально выпуклого пространства E и p – непрерывная полунорма в E, то существует конечномерное подпространство $E' \subset E$, $E' \cap N \neq \varnothing$ и непрерывное отображение $\rho_p : E \to E' \cap \overline{co}N$, называемое квазиретракцией, такое, что $p(x - \rho_p(x)) < 1$ для любого $x \in N$.

(2.3) Лемма. Пусть T_0, T_1 – существенные фундаментальные множества мультиотображения F. Тогда

$$\gamma_{T_0}(\Phi, \bar{U}) := \gamma_{T_1}(\Phi, \bar{U}).$$

Доказательство. Согласно Лемме 1.4, множество $T = T_0 \cap T_1$ фундаментально. Если $\bar{U}_T = \bar{U} \cap T = \varnothing$, то из Леммы 1.2 следует, что $FixF = \varnothing$, и следовательно, по свойству неподвижной точки (1.23), получаем

$$\gamma_{T_0}(\Phi, \bar{U}) = \gamma_{T_1}(\Phi, \bar{U}) = 0.$$

Рассмотрим теперь случай $U_T \neq \varnothing$.

Согласно Лемме 1.9, множество $\Phi(\partial U_T)$ замкнуто. Поскольку это множество не содержит нуля, то найдется абсолютно выпуклая поглощающая окрестность нуля V такая, что

$$V \cap \Phi(\partial U_T) = \varnothing.$$

Пусть полунорма p – калибровочная функция окрестности V (см. [9]).

Рассмотрим квазиретракцию $\rho_p : E \to \overline{co}F(\bar{U}_T)$, соответствующую полунорме p, и пусть $F = \Theta \circ \widetilde{F}$ – разложение псевдоациклического мультиотображения F:

$$\bar{U} \overset{\widetilde{F}}{\multimap} Z \xrightarrow{\ \Theta\ } E.$$

Рассмотрим непрерывное отображение $\Theta_G : Z \times [0,1] \to E$, заданное как

$$\Theta_G(z, \lambda) = (1 - \lambda)\Theta(z) + \lambda\rho_p\Theta(z)$$

и почти ациклическое мультиотображение $\widetilde{F}_G : \bar{U} \times [0,1] \to K(Z)$,

$$\widetilde{F}_G(x, \lambda) = \widetilde{F}(x).$$

Тогда мультиотображение $G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E)$,

$$G(x,\lambda) = \Theta_G(\widetilde{F}_G(x,\lambda),\lambda)$$

определяет гомотопию относительно T_0 мультиполей $\Phi = i - F$, $\widehat{\Phi} = i - \widehat{F}$, где $\widehat{F}(x) = \rho_p F(x)$.

Действительно, свойства (1) и (2) Определения (1.25) относительно T_0 легко проверяются. Проверим выполнение свойства (3), то есть покажем, что $x \notin G(x,\lambda)$ для всех $(x,\lambda) \in \partial U_{T_0} \times [0,1]$.

В самом деле, пусть найдется $(x_0,\lambda_0) \in \partial U_{T_0} \times [0,1]$ такое, что

$$x_0 \in G(x_0,\lambda_0).$$

Это означает, что

$$x_0 = (1-\lambda_0)\Theta(y_0) + \lambda_0\rho_p(\Theta(y_0))$$

для некоторого $y_0 \in \widetilde{F}(x_0)$ или

(2.4) $x_0 = (1-\lambda_0)z_0 + \lambda_0\rho_p(z_0)$,

где $z_0 = \Theta(y_0) \in F(x_0)$.

Из равенства (2.4) вытекает, что

$$x_0 \in \overline{co}(F(x_0) \cup T)$$

и, следовательно, $x_0 \in \partial U_T$. Но тогда

$$x_0 - z_0 \in \Phi(x_0) \subset \Phi(\partial U_T)$$

и, согласно выбору полунормы p, получаем

$$p(x_0 - z_0) \geqslant 1.$$

Но, с другой стороны, из (2.4) имеем

$$p(x_0 - z_0) = p(\lambda_0(\rho_p(z_0) - z_0)) < 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $x \notin G(x,\lambda)$ для всех $(x,\lambda) \in \partial U_{T_0} \times [0,1]$ и таким образом $\Phi \underset{T_0}{\sim} \widehat{\Phi}$.

Отсюда получаем

$$\gamma_{T_0}(\Phi,\bar{U}) = \gamma_{T_0}(\widehat{\Phi},\bar{U}).$$

Заметим теперь, что по построению $\widehat{F}(\bar{U}_{T_0}) \subset T$, поэтому, применяя свойство сужения отображения (1.24), мы получаем

$$\gamma_{T_0}(\Phi,\bar{U}) = \gamma_T(\widehat{\Phi},\bar{U}).$$

Повторяя те же рассуждения с заменой фундаментального множества T_0 на T_1, мы получим аналогичное равенство

$$\gamma_{T_1}(\Phi,\bar{U}) = \gamma_T(\widehat{\Phi},\bar{U}),$$

откуда

$$\gamma_{T_0}(\Phi,\bar{U}) = \gamma_{T_1}(\Phi,\bar{U}),$$

что и доказывает корректность определения степени.

Опишем теперь основные свойства степени.

(2.5) Определение. Пусть $F_0 = \Theta_0 \circ \widetilde{F_0}$, $F_1 = \Theta_1 \circ \widetilde{F_1} : \bar{U} \to K(E)$ – вполне фундаментально сужаемые псевдоациклические мультиотображения такие, что

$$FixF_i \cap \partial U = \varnothing, i = 0,1.$$

Мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$ и $\Phi_1 = i - F_1$ называются гомотопными ($\Phi_0 \sim \Phi_1$), если существуют почти ациклическое мультиотображение $\widetilde{F} : \bar{U} \times [0,1] \to K(Z)$ и непрерывное отображение $\Theta : Z \times [0,1] \to E$ такие, что:
(i) $\widetilde{F}(\cdot, 0) = \widetilde{F_0}$, $\widetilde{F}(\cdot, 1) = \widetilde{F_1}$;
(ii) $\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0$, $\Theta(\cdot, 1) = \Theta_1$;
(iii) для псевдоациклического мультиотображения $G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E)$, заданного как

$$G(x, \lambda) = \Theta(\widetilde{F}(x, \lambda), \lambda)$$

выполнено:
(1) G вполне фундаментально сужаемо;
(2) $x \notin G(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in \partial U \times [0,1]$.

Из свойства (1.26) и Леммы 2.3 вытекает

(2.6) Свойство гомотопической инвариантности. Если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то

$$\gamma(\Phi_0, \bar{U}) = \gamma(\Phi_1, \bar{U}).$$

(2.7) Свойство сужения отображения. Пусть E_1 – линейное подпространство E такое, что $U_1 = U \cap E_1 \neq \varnothing$ и вполне фундаментально сужаемое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ таково, что
1) $FixF \cap \partial U = \varnothing$;
2) $F(\bar{U}) \subset E_1$;
Тогда

$$\gamma(i - F, \bar{U}) = \gamma_1(i - F, \bar{U}_1),$$

где γ_1 обозначает степень, вычисляемую в пространстве E_1.

Это свойство вытекает из Леммы 1.3, а также свойства (1.24).

Рассмотрим теперь некоторые применения введенной характеристики к теоремам о неподвижной точке. Заметим прежде всего, что справедлив следующий общий принцип, вытекающий из свойства (1.23).

(2.8) Теорема. Пусть для вполне фундаментально сужаемого псевдоациклического мультиотображения $F : \bar{U} \to K(E)$ такого, что $x \notin F(x)$ для всех $x \in \partial U$ выполнено

$$\gamma(i - F, \bar{U}) \neq 0.$$

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Рассмотрим некоторые следствия этого общего результата.

(2.9) Теорема. Пусть однозначное отображение $f : \bar{U} \to E$ и псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ вполне фундаментально сужаемы на существенное фундаментальное множество T и не имеют неподвижных точек на ∂U. Пусть, далее
1) $\gamma_T(i - f, \bar{U}) \neq 0$;
2) $\mu\varphi(x) \notin \Phi(x)$ для всех $\mu < 0$, $x \in \partial U$, где $\Phi = i - F$.

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Доказательство этого утверждения вытекает из Теоремы 3.2 работы [2].

Приведем его аналог для уплотняющих мультиотображений. Пусть E – нормированное пространство и U ограничено.

(2.10) Теорема. Пусть непрерывное однозначное отображение $f : \bar{U} \to E$ и псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ являются (k, β)-уплотняющими относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной МНК β и не имеют неподвижных точек на ∂U. Если $\gamma(i - f, \bar{U}) \neq 0$ и выполнено условие (2) предыдущей теоремы, то $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Доказательство. Рассмотрим семейство мультиотображений $G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E)$,

$$G(x,\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)F(x).$$

Оно является (k,β)-уплотняющим. Действительно, для любого $\Omega \subseteq \bar{U}$ мы имеем

$$\beta(G(\Omega \times [0,1])) \leqslant \beta(co(f(\Omega) \cup F(\Omega))) =$$

$$= \max\{\beta(f(\Omega)), \beta(F(\Omega))\} \leqslant k\beta(\Omega).$$

Из Леммы 1.18 (2) вытекает, что G является вполне фундаментально сужаемым на некоторое существенное фундаментальное множество T, которое будет таковым и для отображений $G(\cdot,0) = F$, $G(\cdot,1) = f$ и мы можем применить предыдущую теорему.

(2.11) Следствие (Теорема Шефера). Пусть псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ является (k,β)-уплотняющим относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной МНК β. Пусть

$\mu x \notin F(x)$ для всех $\mu > 1$, $x \in \partial U$.

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset \bar{U}$.

(2.12) Следствие (Теорема Роте). Пусть мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ – такое же как в (2.11). Если

$$F(\partial U) \subset \bar{U},$$

то $\varnothing \neq FixF \subset \bar{U}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Александров П.С. Введение в теорию размерности / П.С. Александров, Б.А. Пасынков. — М.: Наука, 1973. — 576 с.

[2] Аль-Обаиди Дж. Топологическая степень для псевдоациклических многозначных векторных полей / Дж. Аль-Обаиди // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 95–110.

[3] Меры некомпактности и уплотняющие операторы. / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов, А.Е. Родкина, Б.Н. Садовский. — Новосибирск: Наука, 1986. — 265 с.

[4] Борисович Ю.Г. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 1. С. 59–126.

[5] Борисович Ю.Г. Многозначный анализ и операторные включения / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. мат. Новейшие достижения. — 1986. — Т. 29. — С. 151–211.

[6] Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М.: Либроком, 2011. — 226 с.

[7] Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

[8] Обуховский В.В. Некоторые теоремы о продолжении непрерывных отображений / В.В. Обуховский, А.Г. Скалецкий // Сиб. мат. ж. — 1982. — Т. 23, №4. — С. 137–141.

[9] Топологические векторные пространства / А. Робертсон, В. Робертсон. — М.: Мир, 1967. — 258 с.

[10] Алгебраическая топология / Э. Спеньер. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

[11] Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001. — 231 с.

REFERENCES

[1] Aleksandrov P.S., Pasynkov B.A. Introduction to the theory of dimension. [Aleksandrov P.S., Pasynkov B.A. Vvedenie v teoriyu razmernosti]. Moscow: Nauka, 1973, 576 p.

[2] Al-Obaidi J. M. Topological degree for pseudo-acyclic multivalued vector fields. [Al'-Obaidi Dzh. Topologicheskaya stepen' dlya psevdoaciklicheskix mnogoznachnyx vektornyx polej]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 95–110.

[3] Measures of noncompactness and condensing operators. R.R. Akhmerov, M.I. Kamensky, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovsky. [Mery nekompaktnosti i uplotnyayushhie operatory. R.R. Axmerov, M.I. Kamenskij, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskij]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 265 p.

[4] Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovsky V.V. Topological Methods In The Fixed-Point Theory Of Multi-Valued Maps. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Topologicheskie metody v teorii nepodvizhnyx tochek mnogoznachnyx otobrazhenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1980, Vol. 35, no. 1, pp. 59–126.

[5] Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Multivalued analysis and operator inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Mnogoznachnyj analiz i operatornye vklyucheniya]. *Itogi nauki i texniki. Sovremennye problemy matematiki. Novejshie dostizheniya — Journal of Mathematical Sciences*, 1986, Vol. 29, pp. 151–211.

[6] Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multifunctions and dierential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij i differencial'nyx vklyuchenij]. Moscow: Librokom, 2011, 226 p.

[7] Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. Geometrical methods of nonlinear analysis. [Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P. Geometricheskie metody nelinejnogo analiza]. Moscow: Nauka, 1975, 512 p.

[8] Obukhovskii V.V., Skaletsky A.G. Some theorems about the continuation and quasilocality continuous mappings. [Obuxovskij V.V., Skaleckij A.G. Nekotorye teoremy o prodolzhenii i kvaziprodolzhenii nepreryvnyx otobrazhenij]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1982, Vol. 23, iss. 4, pp. 137–141.

[9] Robertson A., Robertson V. Topological vector spaces. [Robertson A., Robertson V. Topologicheskie vektornye prostranstva]. Moscow: Mir, 1967, 258 p.

[10] Spanier E. Algebraic topology. [Spen'er E'. Algebraicheskaya topologiya]. Moscow: Mir, 1971, 680 p.

[11] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 2001, 231 p..

Джамхур Аль-Обаиди, аспирант кафедры высшей математики Воронежского Государственного Педагогического Университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alobadi@mail.ru
Тел.: +7–(950)–776–15–64

J.M. Al-Obaidi, Post-graduate student of the chair of higher mathematics of the Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alobadi@mail.ru
Tel.: +7–(950)–776–15–64

Обуховский В.В., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Тел.: 255–36–63

Obukhovskii V., Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Tel.: 255–36–63