УДК 517.95; 517.984

# ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ*

**М. Ш. Бурлуцкая**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 21.03.2014 г.

**Аннотация**: в работе исследуется смешанная задача для уравнения первого порядка с инволюцией и потенциалом специального вида на минимальном графе из двух ребер, одно из которых образует цикл. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования гладкости и условия, которые являются естественными для существования классического решения. Условие симметричности потенциала позволяет просуммировать формальное решение, найденное методом Фурье, и получить явное аналитическое представление для решения задачи, подобное формуле Даламбера для уравнения колебания струны. Кроме того, эта задача является вспомогательной (эталонной) для задачи с произвольным потенциалом.

**Ключевые слова**: инволюция, функционально-дифференциальный оператор, смешанная задача, метод Фурье, геометрический граф.

# EXPLICIT SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH INVOLUTION ON GRAPHS

**M. S. Burlutskaya**

**Abstract**: we study the mixed problem with involution and the potential of a special kind at the simplest graph of the two edges, one of which forms a cycle. At that, minimum requirements smoothness of the initial data and the conditions that are natural for the existence of classical solutions are imposed. Condition of symmetry of potential allows summarize formal solution, found by the Fourier method, and obtain an explicit analytic representation for the solution of the problem, like D'Alembert formula for the string vibration equation. Moreover, this problem is an auxiliary (reference) for the problem with an arbitrary potential.

**Keywords**: involution, functional differential operator, mixed problem, Fourier method, geometric graph.

Рассматривается простейший геометрический граф $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ из двух ребер: ребро $\gamma_1$ образует цикл-петлю, а $\gamma_2$ примыкает к нему. Ребра графа параметризованы отрезком $[0, 1]$. На $\Gamma$ исследуется смешанная задача, определяемая в соответствии с векторным подходом

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, 14-01-00867)

(см. [1]) как задача в пространстве вектор-функций $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ ($T$ — знак транспонирования):

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u_2(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q(x)u_2(x,t), \tag{2}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t), \tag{3}$$

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x). \tag{4}$$

Предполагаем выполненными требования: $q(x) \in C[0,1]$, вещественная и удовлетворяет условию

$$q(x) = q(1-x), \tag{5}$$

$\varphi_k(x) \in C^1[0,1]$, и

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1), \quad {\varphi'}_2(1) + q(0)\varphi_2(0) + i{\varphi'}_1(0) = 0. \tag{6}$$

Решение ищется в классе вектор-функций непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0,1] \times (-\infty, +\infty)$. Краевые условия (3) обеспечивают непрерывность решения задачи в узле графа. Условия (6) являются естественными для существования классического решения. Условие (5) навеяно поиском частного решения уравнений (1)–(2) в виде $u(x,t) = (y_1(x)T(t), y_2(x)T(t))^T$ ($T(t)$ одна и та же в обеих компонентах $u(x,t)$). Оно позволяет просуммировать формальное решение задачи (1)–(4), найденное методом Фурье, и получить, тем самым, явное выражение для решения, подобное формуле Даламбера для уравнения колебания струны. Более того, задача (1)–(4) с условием (5) является вспомогательной (эталонной) для задачи с произвольным потенциалом $q(x) \in C^1[0,1]$. Здесь также используются приемы из [2].

Смешанные задачи на графах (пространственных сетях) рассматривались для волнового уравнения ([3], [4], [5]) и в различных моделях, приводящих к задаче Штурма-Лиувилля ([6], [7], [8]).

В данной работе исследуется смешанная задача для уравнения первого порядка на графе минимальной структуры, что упрощает вычисления, но служит базой для построения других моделей. В [9] показано, что на ребре-цикле простейшим оператором можно взять оператор дифференцирования, а на ребре, примыкающем к циклу, оператор дифференцирования задавать нельзя (соответствующая краевая задача оказывается нерегулярной). Если же на $\gamma_2$ рассматривать функционально-дифференциальный оператор с инволюцией, то регулярность имеет место. Поэтому простейшим уравнением на ребре $\gamma_2$ оказывается уравнение, содержащее инволюцию $\nu(x) = 1 - x$. Соответствующая спектральная задача, хотя и является системой первого порядка, сводится к исследованию уравнения Дирака, что в случае произвольного потенциала приводит к определенным трудностям [10].

Схема решения этой задачи в случае потенциала более общего вида приводится в [11]. Смешанные задачи с инволюцией на отрезке изучались, например, в работах [12], [13].

## 1. РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Согласно методу Фурье соответствующая (1)–(4) спектральная задача есть

$$Ly = \lambda y, \qquad y = (y_1, y_2)^T,$$

где $L$ есть следующий дифференциальный оператор

$$Ly = \left(-i{y_1}'(x), {y_2}'(1-x) + q(x)y_2(x)\right)^T, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \tag{7}$$

Для получения формул для собственных значений и собственных функций оператора $L$ исследуем сначала уравнение

$$y'(1-x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \tag{8}$$

где $y(x)$ — скалярная функция.

**Лемма 1.** *Уравнение* (8) *эквивалентно системе Дирака*

$$Bz'(x)+P(x)z(x)=\lambda z(x), \tag{9}$$

*где* $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $P(x)=\begin{pmatrix}q(x) & 0\\ 0 & q(1-x)\end{pmatrix}=q(x)E$ *(*$E$ *— единичная матрица), с условием*

$$z_1(1/2)=z_2(1/2), \tag{10}$$

*при этом* $z_1(x)=y(x)$, $z_2(x)=y(1-x)$.

*Доказательство.* Пусть $y(x)$ удовлетворяет (8). Рассмотрим вместе с (8) уравнение, в котором заменим $x$ на $1-x$. Положив в полученной системе $z=(z_1,z_2)^T$, где $z_1(x)=y(x)$, $z_2(x)=y(1-x)$, придем к (9)–(10).

Обратно, пусть $z(x)$ удовлетворяет (9)–(10). Заменив в (9) $x$ на $1-x$, получим снова уравнение (9) относительно $u(x)=(u_1(x),u_2(x))^T$, где $u_1(x)=z_2(1-x)$, $u_2(x)=z_1(1-x)$. При этом $u_1(1/2)=z_2(1/2)=z_1(1/2)=u_2(1/2)$. В силу единственности задачи Коши имеем $u(x)\equiv z(x)$, откуда $z_1(x)=z_2(1-x)$. Тогда из первого уравнения в (9) получим уравнение (8), в котором $y(x)=z_1(x)$. Лемма доказана. $\square$

Приведя матрицу $B$ к диагональному виду с помощью преобразования $\Gamma^{-1}B^{-1}\Gamma=D$, где $D=\operatorname{diag}(-i,i)$, $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$, и выполнив в (9) замену $z(x)=\Gamma u(x)$, $u(x)=(u_1(x),u_2(x))^T$, получим систему:

$$u'(x)+q(x)Du(x)=\lambda Du(x). \tag{11}$$

Система (11) распадается на два уравнения:

$$u_1'(x)-iq(x)u_1(x)=-\lambda i u_1(x),\quad u_2'(x)+iq(x)u_2(x)=\lambda i u_2(x),$$

решая которые, получим, что общее решение системы (9) имеет вид $z(x)=\Gamma V(x,\lambda)c$, где $V(x,\lambda)=\operatorname{diag}\left(u_1(x)e^{-\lambda ix},u_2(x)e^{\lambda ix}\right)$,
$u_1(x)=\exp\left(i\int\limits_0^x q(t)dt\right)$, $u_2(x)=\exp\left(-i\int\limits_0^x q(t)dt\right)$, $c=(c_1,c_2)^T, c_k$ — произвольные постоянные. Подчинив его условию (10) и воспользовавшись леммой 1, получим следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Общее решение уравнения (8) имеет вид* $y(x,\lambda)=g(x,\lambda)c$, *где* $g(x,\lambda)=u_2(1-x)e^{\lambda i(1-x)}-iu_2(x)e^{\lambda ix}$, $c$ *— произвольная постоянная.*

Таким образом, решением спектральной задачи $Ly=\lambda y$ является вектор-функция $y(x)=(c_1e^{\lambda ix},c_2g(x,\lambda))^T$ ($c_1$, $c_2$ - произвольные постоянные, $g(x,\lambda)$ из леммы 2), удовлетворяющая краевым условиям в (7), откуда следует, что уравнение для собственных значений есть

$$\begin{vmatrix}1-e^{\lambda i} & 0\\ 1 & g(0,\lambda)\end{vmatrix}=0,\quad \text{или}$$

$$(1-e^{\lambda i})g(0,\lambda)=0. \tag{12}$$

**Теорема 1.** *Если* $a = \frac{\pi}{2} + \int\limits_0^1 q(t)dt$ *не кратно* $2\pi$, *то собственные значения оператора* $L$ *простые и образуют две серии:*

$$\lambda'_n = 2\pi n, \quad \lambda''_n = a + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

*При этом все собственные значения оператора* $L$ *вещественные. Соответствующие собственные функции есть*

$$y'_n(x) = \left(e^{2n\pi ix}, \frac{g(x,\lambda'_n)}{u_2(1)-i}\right)^T, \qquad y''_n(x) = \big(0, g(x,\lambda''_n)\big)^T.$$

*Доказательство.* Из леммы 2 и (12) следует очевидным образом вид собственных значений. Найдем собственные функции $y(x) = (c_1 e^{\lambda ix}, c_2 g(x,\lambda))^T$. Из краевых условий в (7) имеем

$$c_1 = c_1 e^{\lambda i}, \quad c_1 = c_2 g(0,\lambda).$$

Пусть $\lambda = \lambda'_n$. Так как $g(0,\lambda'_n) = u_2(1) - i \neq 0$, то полагая $c_1 = 1$, получим $c_2 = \frac{1}{u_2(1)-i}$, откуда следует первая серия собственных функций.

Пусть теперь $\lambda = \lambda''_n$. Тогда $g(0,\lambda''_n) = 0$, откуда $c_1 = 0$. Тем самым, полагая $c_2 = 1$, получим вторую серию собственных функций. □

**Замечание.** Функция $g(x,\lambda)$ обладает следующими свойствами [11]:

1) $(g(x,\lambda), g(x,\lambda)) = 2$;

2) системы $\{g(x,\lambda'_n)\}$ и $\{g(x,\lambda''_n)\}$ полны в $L_2[0,1]$

(здесь и далее $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2[0,1]$ или $L_2^2[0,1]$ в зависимости от рассматриваемых функций).

Для сопряженного оператора нетрудно доказать следующие утверждения.

**Лемма 3.** *Сопряженный оператор* $L^*$ *имеет вид*

$$L^* z = Lz, \quad z_2(0) = z_1(1) - z_1(0) + iz_2(1) = 0,$$

*где* $z = z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$.

**Теорема 2.** *Сопряженный оператор* $L^*$ *имеет те же собственные значения, что и оператор* $L$. *Соответствующие собственные функции есть*

$$z'_n(x) = \left(e^{2n\pi ix}, 0\right)^T, \quad z''_n(x) = \left(e^{\lambda''_n ix}, \frac{1-e^{ai}}{2i}\, g(x,\lambda''_n)\right)^T.$$

**Лемма 4.** *Системы* $\{y'_n(x)\} \cup \{y''_n(x)\}$ *и* $\{z'_n(x)\} \cup \{z''_n(x)\}$ *образуют полные системы в пространстве вектор-функций* $L_2^2[0,1]$.

*Доказательство* Установим полноту системы $\{y'_n(x)\} \cup \{y''_n(x)\}$. Пусть функция $f = (f_1, f_2)^T \in L_2^2[0,1]$ ортогональна ей, т.е. выполняются соотношения

$$(e^{2n\pi ix}, f_1) + \frac{1}{u_2(1)-i}(g(x,\lambda'_n), f_2) = 0, \quad (g(x,\lambda''_n), f_2) = 0.$$

В силу полноты системы $\{g(x,\lambda''_n)\}$ $f_2(x) = 0$ п.в. Тогда из первого соотношения следует $(f_1, e^{2n\pi ix}) = 0$, откуда в силу полноты тригонометрической системы $f_1(x) = 0$ п.в. Аналогично, доказывается полнота системы $\{z'_n(x)\} \cup \{z''_n(x)\}$. □

**Теорема 3.** *Если* $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ *удовлетворяет условиям* $\varphi_j(x) \in C^1[0,1]$ *и* $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0)$, *то* $\varphi(x)$ *разлагается в ряд Фурье*

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\varphi, z_n'\right) y_n'(x) + \gamma^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\varphi, z_n''\right) y_n''(x), \tag{13}$$

*где* $\gamma = i(1-e^{-ai})$, *и ряды в* (13) *сходятся абсолютно и равномерно на отрезке* $[0,1]$.

*Доказательство.* Рассмотрим ряд Фурье

$$\sum c_n' y_n'(x) + \sum c_n'' y_n''(x),$$

где $c_n' = \frac{(\varphi, z_n'(x))}{(y_n'(x), z_n'(x))}$, $c_n'' = \frac{(\varphi, z_n''(x))}{(y_n''(x), z_n''(x))}$. Имеем $(y_n'(x), z_n'(x)) = (e^{2\pi nix}, e^{2\pi nix}) = 1$, $(y_n''(x), z_n''(x)) = \left(g(x,\lambda_n''), \frac{1-e^{ai}}{2i}\, g(x,\lambda_n'')\right) = -\frac{1-e^{-ai}}{2i}\, 2 = \frac{e^{-ai}-1}{i} = \gamma$. Далее $(\varphi, z_n'(x)) = \frac{1}{\lambda_n'}(\varphi, L^* z_n'(x)) = \frac{1}{\lambda_n'}(g, z_n'(x))$, где $g = L\varphi \in L_2[0,1]$. Обозначим через $\alpha_n$ любые числа, удовлетворяющие условию $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Имеем $(g, z_n'(x)) = (g_1, e^{2\pi nix}) = \alpha_n$ (так как это коэффициенты Фурье функции $g_1$ по тригонометрической системе). Аналогично $(g, z_n''(x)) = (g_1, e^{\lambda_n'' ix}) + (g_2, \frac{1-e^{ai}}{2i}\, g(x,\lambda_n'')) = (e^{-aix} g_1, e^{2\pi nix}) + \frac{1}{2}\gamma(g_2, g(x,\lambda_n'')) = \alpha_n$.

Таким образом, в силу того, что $\frac{1}{\lambda_n} = O(1/n)$, коэффициенты Фурье имеют оценку $\frac{\alpha_n}{n}$. Учитывая, что $y_n'(x)$, $y_n''(x)$ ограничены, получаем абсолютную и равномерную сходимость рядов в (13) . $\square$

## 2. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Формальное решение смешанной задачи (1)–(4) представляется рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n' y_n'(x) e^{\lambda_n' it} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'' y_n''(x) e^{\lambda_n'' it}.$$

Из условия (4) при $t = 0$ имеем

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n' y_n'(x) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'' y_n''(x), \tag{14}$$

а по теореме 3 $c_n' = (\varphi, z_n'(x))$, $c_n'' = \frac{1}{\gamma}(\varphi, z_n''(x))$. Отсюда $c_n' = (\varphi_1, e^{\lambda_n' ix})$, $c_n'' = \frac{1}{\gamma}\left[\left(\varphi_1, e^{\lambda_n'' ix}\right) + \left(\varphi_2, \frac{1-e^{ai}}{2i}\, g(x,\lambda_n'')\right)\right] = \frac{1}{\gamma}(\varphi_1, e^{\lambda_n'' ix}) + \frac{1}{2}\left(\varphi_2, g(x,\lambda_n'')\right)$.

Таким образом, для формального решения $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ имеем следующую формулу:

$$u_1(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{\lambda_n' ix}) e^{\lambda_n' ix} e^{\lambda_n' it}, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} u_2(x,t) = \frac{1}{u_2(1)-i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{\lambda_n' ix}) g(x,\lambda_n') e^{\lambda_n' it} + \\ + \frac{1}{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(\varphi_1, e^{\lambda_n'' ix}) + \frac{\gamma}{2}\left(\varphi_2, g(x,\lambda_n'')\right)\right] g(x,\lambda_n'') e^{\lambda_n'' it}. \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь ряды сходятся абсолютно и равномерно при всех $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, +\infty)$.

**Лемма 5.** *Имеет место формула:*

$$u_1(x,t) = f_1(x+t), \tag{17}$$

*где* $f_1(x)$ *— периодическая с периодом 1 функция* ($f_1(x) = f_1(1+x)$), $f_1(x) \in C^1[0,1]$ *причем* $f_1(x) = \varphi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

*Доказательство.* Положим $f_1(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} (\varphi_1, e^{2n\pi ix})e^{2n\pi ix}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Из (14) следует, что при $x \in [0,1]$ $\varphi_1(x) = f_1(x)$. Таким образом, из (15) имеем $u_1(x,t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} (\varphi_1, e^{2n\pi ix})e^{2n\pi i(x+t)} = f_1(x+t)$.

Так как по условию $\varphi_1(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi_1(0) = \varphi_1(1)$, $\varphi_1'(0) = \varphi_1'(1)$, то $f_1(x) \in C^1[0,1]$. $\square$

Преобразуем теперь компоненты $u_2(x,t)$. Из (16) и соотношения $u_2(1) - i = i(e^{-ai} - 1) = -\gamma$ получим представление

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{\gamma}\Sigma_1 + \frac{1}{\gamma}\Sigma_2 + \frac{1}{2}\Sigma_3, \tag{18}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{\lambda_n' ix}) g(x, \lambda_n') e^{\lambda_n' it},$$
$$\Sigma_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{\lambda_n'' ix}) g(x, \lambda_n'') e^{\lambda_n'' it},$$
$$\Sigma_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_2, g(x, \lambda_n'')) g(x, \lambda_n'') e^{\lambda_n'' it}.$$

**Лемма 6.** *Имеет место формула:*

$$\Sigma_1 = u_2(1-x) f_1(1-x+t) - iu_2(x) f_1(x+t).$$

*Доказательство.* Имеем $g(x, \lambda_n') = u_2(1-x)e^{2n\pi i(1-x)} - iu_2(x)e^{2n\pi ix}$. Поэтому

$$\Sigma_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{2n\pi ix}) \left[u_2(1-x)e^{2n\pi i(1-x)} - iu_2(x)e^{2n\pi ix}\right] e^{2n\pi it} =$$
$$= u_2(1-x) f_1(1-x+t) - iu_2(x) f_1(x+t). \ \square$$

**Лемма 7.** *Имеет место формула:*

$$\Sigma_2 = \left[p(1-x) f_2(1-x+t) - ip(x) f_2(x+t)\right] e^{iat},$$

$f_2(x) = f_2(1+x)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), *причем* $f_2(x) = \varphi_1(x)e^{-iax}$ *при* $x \in [0,1]$, *а* $p(x) = u_2(x)e^{iax}$.

*Доказательство.* Имеем $(\varphi_1, e^{\lambda_n'' ix}) = (\varphi_1 e^{-iax}, e^{2n\pi ix})$. Тогда

$$\Sigma_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1 e^{-iax}, e^{2n\pi ix}) \left[u_2(1-x)e^{2n\pi i(1-x)}e^{ia(1-x)} - \right.$$
$$\left. -iu_2(x)e^{2n\pi ix}e^{iax}\right] e^{2n\pi it}e^{iat} =$$
$$= \left[u_2(1-x)e^{ia(1-x)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1 e^{-iax}, e^{2n\pi ix}) e^{2n\pi i(1-x+t)} - \right.$$
$$\left. - iu_2(x)e^{iax} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1 e^{-iax}, e^{2n\pi ix}) e^{2n\pi i(x+t)}\right] e^{iat} =$$
$$= \left[p(1-x) f_2(1-x+t) - ip(x) f_2(x+t)\right] e^{iat}. \ \square$$

**Замечание.** Функция $f_2(x)$, вообще говоря, разрывна при $x \in \mathbb{Z}$.

**Лемма 8.** *Имеет место формула:*

$$\Sigma_3 = \left[p(1-x)f_3(1-x+t) - ip(x)f_3(x+t)\right]e^{iat},$$

*где* $f_3(x) = f_3(1+x)$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$, *причем* $f_3(x) = u_1(x)e^{-iax}[\varphi_2(1-x) + i\varphi_2(x)]$ *при* $x \in [0,1]$.

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned}(\varphi_2, g(x,\lambda_n'')) = (\varphi_2(x), u_2(1-x)e^{ia(1-x)}e^{2n\pi i(1-x)} - iu_2(x)e^{iax}e^{2n\pi ix}) = \\ = (\varphi_2(1-x), u_2(x)e^{iax}e^{2n\pi ix}) + i(\varphi_2(x), u_2(x)e^{iax}e^{2n\pi ix}) = \\ = (\varphi_2(1-x)\overline{u_2(x)}e^{-iax} + i\varphi_2(x)\overline{u_2(x)}e^{-iax}, e^{2n\pi ix}) = \\ = (\overline{u_2(x)}e^{-iax}[\varphi_2(1-x) + i\varphi_2(x)], e^{2n\pi ix}).\end{aligned}$$

Поэтому, так как $\overline{u_2(x)} = u_1(x)$,

$$\begin{aligned}\Sigma_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(u_1(x)e^{-iax}[\varphi_2(1-x) + i\varphi_2(x)], e^{2n\pi ix})\left[u_2(1-x)e^{2n\pi i(1-x)}e^{ia(1-x)} - \right.\\ \left. -iu_2(x)e^{2n\pi ix}e^{iax}\right]e^{2n\pi it}e^{iat} = \\ = \left[p(1-x)f_3(1-x+t) - ip(x)f_3(x+t)\right]e^{iat}. \ \square\end{aligned}$$

**Замечание.** Функция $f_3(x)$, вообще говоря, разрывна при $x \in \mathbb{Z}$.

**Лемма 9.** *Имеет место формула:*

$$\begin{aligned}u_2(x,t) = \tfrac{1}{\gamma}\left[u_2(1-x)f_1(1-x+t) - iu_2(x)f_1(x+t)\right] + \\ + \left[p(1-x)f_4(1-x+t) - ip(x)f_4(x+t)\right]e^{iat},\end{aligned} \tag{19}$$

*где* $f_4(x) = \frac{1}{\gamma}f_2(x) + \frac{1}{2}f_3(x)$. *Функция* $f_4(x)$ *является непрерывно дифференцируемой при* $x \in (-\infty, +\infty)$ *и периодической с периодом 1.*

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\gamma}\Sigma_2 + \tfrac{1}{2}\Sigma_3 = \tfrac{1}{\gamma}\left[p(1-x)f_2(1-x+t) - ip(x)f_2(x+t)\right]e^{iat} + \\ + \tfrac{1}{2}\left[p(1-x)f_3(1-x+t) - ip(x)f_3(x+t)\right]e^{iat} = \\ = \left[p(1-x)f_4(1-x+t) - ip(x)f_4(x+t)\right]e^{iat}.\end{aligned}$$

Отсюда, из (18) и лемм 6–8 следует (19).

Периодичность функции $f_4(x)$ при $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ следует из периодичности на этом множестве функций $f_2(x)$ и $f_3(x)$. Отсюда же следует непрерывная дифференцируемость $f_4(x)$ при $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Поэтому для доказательства непрерывности $f_4(x)$ и $f_4'(x)$ достаточно доказать соотношения

$$f_4(0+0) = f_4(1-0), \tag{20}$$

$$f_4'(0+0) = f_4'(1-0). \tag{21}$$

Имеем $f_2(0+0) = \varphi_1(0)$, $f_2(1-0) = \varphi_1(1)e^{-ai}$, $f_3(0+0) = u_1(0)[\varphi_2(1) + i\varphi_2(0)]$, $f_3(1-0) = u_1(1)e^{-ai}[\varphi_2(0) + i\varphi_2(1)]$. Так как $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0)$, $u_1(0) = 1$, $u_1(1) = e^{i(a-\pi/2)} = -ie^{ai}$, то

$$\begin{aligned}f_4(0+0) = \tfrac{1}{\gamma}\varphi_1(0) + \tfrac{1}{2}[\varphi_2(1) + i\varphi_1(0)] = \varphi_1(0)\left[\tfrac{1}{\gamma} + \tfrac{i}{2}\right] + \tfrac{1}{2}\,\varphi_2(1),\\ f_4(1-0) = \tfrac{1}{\gamma}\varphi_1(0)e^{-ai} - i\tfrac{1}{2}e^{ai}e^{-ai}[\varphi_2(0) + i\varphi_2(1)] = \varphi_1(0)\left[\tfrac{e^{-ai}}{\gamma} - \tfrac{i}{2}\right] + \tfrac{1}{2}\,\varphi_2(1),\end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{e^{-ai}-1}{i}$, или $1 - e^{-ai} = -\gamma i$, откуда получаем:

$$f_4(0+0) - f_4(1-0) = \varphi_1(0)\left[\frac{1-e^{-ai}}{\gamma} + i\right] = \varphi_1(0)\left[\frac{-\gamma i}{\gamma} + i\right] = 0,$$

что доказывает (20). Далее преобразуем $f_4(x)$ следующим образом

$$f_4(x)e^{aix} = \frac{1}{\gamma}\varphi_1(x) + \frac{1}{2}u_1(x)\psi(x), \quad \text{где} \ \ \psi(x) = \varphi_2(1-x) + i\varphi_2(x).$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$f_4'(x)e^{aix} + aif_4(x)e^{aix} = \frac{1}{\gamma}\varphi_1'(x) + \frac{1}{2}iq(x)u_1(x)\psi(x) + \frac{1}{2}u_1(x)\psi'(x). \tag{22}$$

Перейдем в (22) к пределу при $x \to 0+0$ и $x \to 1-0$ (учитывая непрерывность входящих в (22) функций):

$$f_4'(0+0) + aif_4(0) = \frac{1}{\gamma}\varphi_1'(0) + \frac{1}{2}iq(0)u_1(0)\psi(0) + \frac{1}{2}u_1(0)\psi'(0), \tag{23}$$

$$f_4'(1-0)e^{ai} + aif_4(1)e^{ai} = \frac{1}{\gamma}\varphi_1'(1) + \frac{1}{2}iq(1)u_1(1)\psi(1) + \frac{1}{2}u_1(1)\psi'(1). \tag{24}$$

В силу использованных ранее соотношений и равенства $q(0) = q(1)$, из (23) и (24) получим:

$$\begin{gathered} f_4'(0+0) - f_4'(1-0) = \tfrac{1}{\gamma}(1-e^{-ai})\varphi_1'(0) + \\ +\tfrac{1}{2}iq(0)[\psi(0) + i\psi(1)] + \tfrac{1}{2}[\psi'(0) + i\psi'(1)]. \end{gathered} \tag{25}$$

Далее имеем $1-e^{-ai} = -\gamma i$, $\psi(0)+i\psi(1) = \varphi_2(1)+i+i\varphi_2(0)-\varphi_2(1) = 2i\varphi_2(0)$, $\psi'(0)+i\psi'(1) = -\varphi_2'(1)+i\varphi_2'(0)-i\varphi_2'(0)-\varphi_2'(1) = -2\varphi_2'(1)$. Таким образом, из (25) в силу условия в (6) следует

$$\begin{gathered} f_4'(0+0) - f_4'(1-0) = -i\varphi_1'(0) + i^2 q(0)\varphi_2(0) - \varphi_2'(1) = \\ -i\varphi_1'(0) - q(0)\varphi_2(0) - \varphi_2'(1) = 0, \end{gathered}$$

что и доказывает (21). □

**Замечание.** Условия (6) естественным образом следуют из постановки задачи. В самом деле, пусть классическое решение задачи существует, т.е справедливы равенства (1)–(4). Из (4) при $t = 0$ получаем $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0)$. Из (1) имеем $u_{1t}'(0,t) = u_{1x}'(0,t)$, $u_{1t}'(1,t) = u_{1x}'(1,t)$, а из (3) $u_{1t}'(0,t) = u_{1t}'(1,t)$, откуда получаем $u_{1x}'(0,0) = u_{1x}'(1,0)$, и следовательно, $\varphi_1'(0) = \varphi_1'(1)$. Наконец, из (2) при $x = 0$ и из (3) соответственно имеем:

$$\tfrac{1}{i}u_{2t}'(0,t) = u_{2x}'(1,t) + q(0)u_2(0,t), \quad u_{2t}'(0,t) = u_{1t}'(0,t),$$

откуда

$$\frac{1}{i}u_{1t}'(0,t) = u_{2x}'(1,t) + q(0)u_2(0,t),$$

что при $t = 0$ дает $\frac{1}{i}u_{1t}'(0,0) = u_{2x}'(1,0) + q(0)u_2(0,0)$, и, следовательно,

$$-i\varphi_1'(0) = \varphi_2'(1) + q(0)\varphi_2(0).$$

**Теорема 4.** *Если $q(x) \in C[0,1]$, вещественная и $q(x) = q(1-x)$, $\varphi_k(x) \in C^1[0,1]$ и удовлетворяют условиям* (6)*, то классическое решение задачи* (1)*–*(4) *существует и имеет вид $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, где $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ определяются формулами* (17), (19) *соответственно.*

*Доказательство.* Действительно, в силу лемм 5, 9 $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, а следовательно, и $u(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по $x$ и $t$ в области $[0,1]\times(-\infty,+\infty)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $u(x,t)$ удовлетворяет (1)–(4). □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный [и др.]. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

[2]Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 112 с.

[3] Покорный Ю.В. Волновое уравнение на пространственной сети / Ю.В. Покорный, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 1. — С. 16–18.

[4] Прядиев В. Л. Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения / В. Л. Прядиев // Современная математика и ее приложения. — Тбилиси, 2006. — Т. 38. — С. 82–94.

[5] Зверева М.Б. Задача граничного управления дифференциальной системой с нелинейным условием / М.Б. Зверева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 182–191.

[6] Провоторов В.В. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде / В.В. Провоторов // Матем. сборник. — 2008. — Т. 199, № 10. — С. 105–126.

[7] Провоторов В.В. Управление колебаниями механической системы "мачта-растяжки" / В.В. Провоторов // Вестн. Воронежск. гос. техн. ун-та. — 2009. — Т. 5, № 2. — С. 57–61.

[8] Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

[9] Бурлуцкая М.Ш. Разложение по собственным функциям дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов на геометрических графах / М.Ш. Бурлуцкая // Дисс.. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 2007. — 146 с.

[10] Бурлуцкая М.Ш., Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Докл. РАН. — 2007. — Т. 414, № 4. — С. 443–446.

[11] Бурлуцкая М.Ш. Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом / М.Ш. Бурлуцкая // Докл. РАН. — 2012. — Т. 447, № 5. — С. 479–482.

[12] Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 151–154.

[13] Бурлуцкая М.Ш. О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 26–33.

## REFERENCES

[1] Differential equations on geometric graphs / Yu.V. Pokornyi [etc.]. [Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax / Yu.V. Pokornyj [i dr.]]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

[2] Chernyatin V.A.Substantiation the Fourier method for the mixed problem for partial differential equations. [Chernyatin V.A. Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoj zadache dlya uravnenij v chastnyx proizvodnyx]. Moscow: Publ. MSU, 1991, 112 p.

[3] Pokornyi Yu.V., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V. The wave equation on a spatial network. [Pokornyj Yu.V., Pryadiev V.L., Borovskix A.V. Volnovoe uravnenie na prostranstvennoj seti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2003, Vol. 388, no. 1, pp. 16–18.

[4] Prjadiev V. L. Description of the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation in one-dimensional spatial net through the Green's function of the corresponding boundary value problem for an ordinary differential equation. [Pryadiev V. L. Opisanie resheniya nachal'no-kraevoj zadachi dlya volnovogo uravneniya na odnomernoj prostranstvennoj seti

cherez funkciyu Grina sootvetstvuyushhej kraevoj zadachi dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya]. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya — Modern mathematics and application*, 2006, Vol. 38, P. 82–94.

[5] Zvereva M.B. The boundary control problem of differential system with nonlinear condition. [Zvereva M.B. Zadacha granichnogo upravleniya differencial'noj sistemoj s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 182–191.

[6] Provotorov V.V. Eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on a star graph. [Provotorov V.V. Sobstvennye funkcii zadachi Shturma-Liuvillya na grafe-zvezde]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2008, Vol. 199, no. 10, pp. 105–126.

[7] Provotorov V.V. Control of vibrations of a mechanical system "mast-stretching". [Provotorov V.V. Upravlenie kolebaniyami mexanicheskoj sistemy "machta-rastyazhki"]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta — Bulletin of Voronezh State Technical University*, 2009, Vol. 5, no. 2, pp. 57–61.

[8] Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. An adaptation of the finite element method for solving the boundary value problem with differentials Stieltjes on a geometric graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx e'lementov dlya resheniya granichnoj zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

[9] Burlutskaya M.Sh. Expansion in eigenfunctions of differential and functional-differential operators on geometric graphs. [Burluckaya M.Sh. Razlozhenie po sobstvennym funkciyam differencial'nyx i funkcional'no-differencial'nyx operatorov na geometricheskix grafax]. Diss. Candidate Sciences: 01.01.02; VoronezhState Univ. Voronezh, 2007, 146 p.

[10] Burlutskaya M.Sh., Kurdjumov V.P., Lukonina A.S., Khromov A.P. Functional-differential operator with involution. [Burluckaya M.Sh., KurdyumovV.P., Lukonina A.S., Xromov A.P. Funkcional'no-differencial'nyj operator s involyuciej]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2007, Vol. 414, no. 4, pp. 443–446.

[11] Burlutskaya M.Sh. Mixed problem with involution on a two-edge graph containing the cycle. [Burluckaya M.Sh. Smeshannaya zadacha s involyuciej na grafe iz dvux reber s ciklom]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2012, Vol. 447, no. 5, pp. 479–482.

[12] Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. The classical solution for the mixed problem with involution. [Burluckaya M.Sh., Xromov A.P. Klassicheskoe reshenie dlya smeshannoj zadachi s involyuciej]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2010, Vol. 435, no. 2, pp. 151–154.

[13] Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. On the classical solution of a mixed problem for a first-order equation with involution. [Burluckaya M.Sh., A.P. Xromov O klassicheskom reshenii smeshannoj zadachi dlya uravneniya pervogo poryadka s involyuciej]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 26–33.

*Бурлуцкая Мария Шаукатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского госуниверситета, г. Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: bmsh2001@mail.ru*
*Тел.: 8(473)220–86–90*

*Burlutskaya Maria Shaukatovna, candidate of science, Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: bmsh2001@mail.ru*
*Tel.: 8(473)220–86–90*