УДК 530.1; 517.958

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ДИСКРЕТНЫМ СИСТЕМАМ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Е. А. Киселев, Л. А. Минин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.08.2014 г.

Аннотация: для полной одномерной системы когерентных состояний, заданных на равномерной прямоугольной сетке, и вдвое прореженной системы получены формулы для вычисления верхней и нижней констант Рисса. Наличие явных формул позволило доказать неустойчивость процедуры ортогонализации полной системы и предъявить функции, на которых эта неустойчивость проявляется. Для вдвое прореженной системы доказана устойчивость процедуры ортогонализации. При этом отношение констант Рисса существенно зависит от соотношения шагов прямоугольной сетки. Ключевую роль здесь играют свойства третьей тета-функции Якоби. Проведено сравнение метода прореживания и метода перехода к переполненным системам в теории фреймов.

Ключевые слова: когерентные состояния, ортогонализация, устойчивость, константы Рисса, тета-функция, фреймы.

ON STABILITY OF EXPENSION IN DISCREET SYSTEMS OF COHERENT STATES

E. A. Kiselev, L. A. Minin

Abstract: for the complete one dimensional system of coherent states on a uniform rectangular grid and twice thinned out system formulas are proved for upper and lower Riesz constants. Based on these explicit formulas instability of orthogonalization procedure for complete system is proved and examples of such instability are produced. On the contrary for twice thinned out system it is proved that the orthogonalization procedure is stable. The ratio of Riesz constants is shown to be essentially dependent on steps correlation of a rectangular grid. A key role is revealed of the third Jacobi theta-function for these problems. Methods of thinned out systems and overcomplete systems are compared in frames theory.

Keywords: coherent states, orthogonalization, stability, Riesz constants, theta-functions, frames.

ВВЕДЕНИЕ

Системы функций вида

$$\varphi_{km}(x) = \exp\left(-\frac{(x-\omega_1 k)^2}{2}\right)\ e^{i\omega_2 mx},\ \ k,m \in Z, \tag{1}$$

где ω_1, ω_2 — вещественные положительные параметры, нашли свое применение в квантовой механике с первых же лет возникновения этой дисциплины. После работ Р. Глаубера [1] они получили название когерентные состояния. Основным параметром данных систем является величина $\omega_1 \cdot \omega_2$. В своей статье 1929 года, посвящённой доказательству квантовой эргодической теоремы, И. Нейман [2, Дополнение] выдвинул гипотезу о том, что при выполнении условия

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi \tag{2}$$

система (1) полна и с помощью ортогонализации Грама-Шмидта из неё может быть получен хорошо локализованный базис.

Полноту системы функций (1) с параметрами, удовлетворяющими соотношению (2), доказали в 1971 году А. М. Переломов [3] и В. Баргман с соавторами [4]. Согласно теореме Бальяна-Лоу [5], [6], доказанной в 1981 году, для базисов типа оконного преобразования Фурье ортогонализация с одновременным сохранением структуры и локализации невозможна. Когерентные состояния относятся к данному типу базисов с окном, задаваемым функцией Гаусса. В монографии И. Добеши [7, глава 4] дано подробное описание этой проблемы. В статье Ж. Бургена [8] проводится ортогонализация Грамма–Шмидта базиса с окном, задаваемым финитной функцией, близкой по норме к функции Гаусса. В более простой ситуации, для однопараметрической системы целочисленных сдвигов, процедуру ортогонализации с сохранением структуры сдвигов предложили в 1970 году Е. Вигнер, Х. Швайнлер [9].

В настоящей статье показывается, что устойчивую ортогонализацию системы (1) нельзя провести как при условии сохранения структуры, так и без него. Если же перейти к неполной системе с заменой в соотношении (2) величины 2π на 4π, то это сделать можно.

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Важными характеристиками, показывающими степень устойчивости неортогональной системы, являются константы Рисса [10], [11].

Определение. Функции $\varphi_k(x) \in L_2(R)$, $k \in Z$, образуют систему Рисса, если существуют положительные константы A, B такие, что для любой последовательности коэффициентов $c = \{c_k\} \in \ell_2$ справедлива оценка

$$A \|c\|_{\ell_2}^2 \leqslant \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2}^2 \leqslant B \|c\|_{\ell_2}^2 . \tag{3}$$

Нормы в пространствах функций $L_2(R)$ и последовательностей ℓ_2 задаются обычным образом:

$$\|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx, \quad \|c\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Наибольшая из величин A в двустороннем неравенстве (3) называется нижней константой Рисса, наименьшая из величин B — верхней константой Рисса. Для ортонормированных систем функций обе константы равны единице.

Для систем Рисса возможны устойчивые процедуры ортогонализации и построения биортогональной (двойственной) системы [10], [11]. Рассмотрим теперь случай, когда система функций $\varphi_k(x)$, $k \in Z$, полна в пространстве $L_2(R)$, а нижняя константа Рисса равна нулю. Предположим, что ортогонализация проведена, причём переход от исходной системы функций к ортонормированной системе $e_m(x)$, $m \in Z$, осуществляется по формулам

$$e_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{km} \varphi_k(x). \tag{4}$$

Тогда для разложения произвольной функции $f(x)$ по исходной системе надо получить её разложение в ортонормированном базисе

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_m(x), \quad d_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e_m^*(x)\, dx,$$

а затем с помощью (4) перейти к представлению

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{5}$$

где для коэффициентов c_k справедливы соотношения

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{km} d_m, \ k \in Z. \tag{6}$$

Равенства (6) задают линейный оператор $T : \ell_2 \to \ell_2$. Если нижняя константа Рисса равна нулю, то для любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация вида (5) с конечным числом ненулевых коэффициентов c_k, $\|c\|_{\ell_2} = 1$, такая, что $\|f\|_{L_2} < \varepsilon$. С другой стороны, согласно равенству Парсеваля

$$\|f\|_{L_2} = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |d_m|^2 \right)^{1/2} = \|d\|_{\ell_2} < \varepsilon.$$

Так как $\|c\|_{\ell_2} \leqslant \|T\|_{\ell_2 \to \ell_2} \|d\|_{\ell_2}$, то $\|T\|_{\ell_2 \to \ell_2} \geqslant 1/\varepsilon$. В силу произвольности ε оператор T оказывается неограниченным, а процедура ортогонализации (4) – неустойчивой.

В случае конечного набора функций аналогами констант Рисса являются минимальное и максимальное собственные значения матрицы Грама, образованной попарными скалярными произведениями этих функций. Число обусловленности матрицы Грама определяется как отношение B/A. Если оно велико, то матрица называется плохо обусловленной и при работе с ней требуется применять специальные приемы для обеспечения устойчивости вычислений [12]. Таким образом, степень устойчивости неортогональных систем характеризуется близостью отношения констант Рисса к единице.

КОНСТАНТЫ РИССА ДЛЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ

Для системы целочисленных сдвигов одной функции имеется хорошо разработанная методика оценки констант Рисса [10], [11]. Однако рассматриваемые нами функции (1) зависят от двух целых индексов k и m. Поэтому нахождение констант Рисса требует специального подхода, который изложен ниже. Нам надо оценить следующий квадрат нормы

$$\left\| \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} c_{km} \varphi_{km}(x) \right\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} c_{km} \exp\left(-\frac{(x-\omega_1 k)^2}{2} \right) e^{i\omega_2 m x} \right|^2 dx. \tag{7}$$

В дальнейшем, если границы сумм не указаны, то предполагается, что все индексы меняются в пределах от $-\infty$ до ∞. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Константы Рисса для системы функций (1) при выполнении условия* $\omega_1 \cdot \omega_2 = 2\pi$ *определяются равенствами*

$$A = \min_{x,y\in[0,1]} F(x,y), \quad B = \max_{x,y\in[0,1]} F(x,y), \tag{8}$$

где функция $F(x,y)$ задана формулой

$$F(x,y)=\sqrt{2\pi}e^{2\pi ixy}\left(\sum_{p_1}\exp\left(-\frac{\omega_1^2(x+p_1)^2}{2}\right)\ e^{2\pi ip_1y}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{p_2}\exp\left(-\frac{\omega_2^2(y+p_2)^2}{2}\right)\ e^{2\pi ip_2x}\right). \quad (9)$$

Опишем схему доказательства теоремы. Раскрыв в правой части формулы (7) квадрат и поменяв местами операции суммирования и интегрирования, получим выражение

$$\sum_{k,m,k',m'}c_{km}c^*_{k',m'}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\omega_1k)^2+(x-\omega_1k')^2}{2}\right)\ e^{i\omega_2(m-m')x}dx.$$

Обозначив внутренний интеграл через I, разобьем его на сумму интегралов с конечными пределами:

$$I=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{2\pi n/\omega_2}^{2\pi(n+1)/\omega_2}\exp\left(-\frac{(x-\omega_1k)^2+(x-\omega_1k')^2}{2}\right)\ e^{i\omega_2(m-m')x}dx.$$

Сделав замену переменных $\xi=x-\omega_1n$ и воспользовавшись преобразованием Зака [7, глава 4], приходим к равенству

$$I=\int\limits_0^1 e^{2\pi i(k-k')x}dx\ \int\limits_0^1 e^{2\pi i(m-m')y}\ F(x,y)\,dy$$

с функцией $F(x,y)$, определяемой соотношением (9). Тогда формулу (7) можно записать в следующем виде:

$$\left\|\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}c_{km}\varphi_{km}(x)\right\|^2_{L_2}=\int\limits_0^1 dx\ \int\limits_0^1\left|\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}c_{km}e^{2\pi i(kx+my)}\right|^2 F(x,y)\,dy, \quad (10)$$

откуда и следует окончательный результат.

Покажем, что $F(1/2,\ 1\ /\ 2)=0$. В силу формулы (9)

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=i\sqrt{2\pi}\sum_{p_1}(-1)^{p_1}\exp\left(-\frac{\omega_1^2(1/2+p_1)^2}{2}\right)\times\sum_{p_2}(-1)^{p_2}\exp\left(-\frac{\omega_2^2(1/2+p_2)^2}{2}\right).$$

Обозначим $q_1=\exp\left(-\omega_1^2/2\right)$, $q_2=\exp\left(-\omega_2^2/2\right)$. Тогда

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-i\sqrt{2\pi}\cdot\theta_1(0,q_1)\cdot\theta_1(0,q_2)=0.$$

Здесь $\theta_1(t,q)$ – первая тета-функция Якоби [13]:

$$\theta_1(t,q)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,q^{(k+1/2)^2}\sin((2k+1)t).$$

Отсюда в силу (8) вытекает равенство нулю нижней константы Рисса.

ОБСУЖДЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ

При доказательстве полноты рассматриваемой системы когерентных состояний А. М. Переломов установил [3], [14], что система (1) остаётся полной при выбрасывании любой одной функции, но перестаёт быть полной при выбрасывании двух функций. Покажем, что это обстоятельство никак не сказывается на устойчивости. Для этого вернёмся к теореме 1.

Механизм получения утверждения (8) для нижней константы Рисса из формулы (10) таков: за счёт выбора коэффициентов c_{km} строится функция

$$P(x, y) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} c_{km} e^{2\pi\ i(kx+my)},$$

локализованная в окрестности точки минимума $F(x, y)$ (например, ступенька или функция Хаара). Выбрасывание одного или нескольких коэффициентов не мешает этой процедуре.

Факт неустойчивости системы (1) известен, но формулируется в достаточно запутанной форме: данная система не является фреймом [7, глава 4]. Значит, это и не система Рисса, поскольку полная система Рисса является фреймом [10, глава 1]. Полученный в теореме 1 результат представляется более удобным, поскольку позволяет ответить на вопрос об ортогонализации и даёт конструктивный способ получения функций, на которых проявляется неустойчивость.

Переход от полных систем к переполненным с целью достижения устойчивости является главной идеей теории фреймов [7], [10], [11]. В нашем случае для получения фрейма надо рассмотреть систему (1) с условием $\omega_1 \cdot \omega_2 < 2\pi$. Но у такого подхода есть два существенных недостатка:

1. Коэффициенты разложения любой функции по элементам фрейма в силу переполненности системы определяются неоднозначно, следовательно, непонятен физический смысл этих коэффициентов.

2. Сама процедура разложения сводится к решению достаточно сложного интегрального уравнения и требует анализа получающейся при этом погрешности [7, глава 3].

Различные эффекты неоднозначности подробно обсуждаются в [15, глава 11].

Можно использовать и другие базисы, не связанные с когерентными состояниями, но здесь возникает другая проблема. Поскольку главной целью рассматриваемых задач является переход от микроскопических явлений к макроскопическим, то необходимо проводить усреднение. Данная процедура корректна при равномерной ограниченности дисперсий случайных величин (см., напр., [2, с. 348]), что равносильно равномерной ограниченности констант неопределённости базисных функций. Традиционно используемые плоские волны в ограниченной области и функции Эрмита (см., напр., [16, с. 290], [17, с. 144, 155]) таковыми не являются.

В [15, глава 11] приводятся примеры усреднений с неограниченными дисперсиями, но при этом делаются дополнительные предположения, т.е. фактически используется неполная система функций.

Первый пример ортонормированного базиса с равномерно ограниченной константой неопределённости предложил в 1986 году на семинаре общества Бурбаки Ив Мейер [10]. С этого примера и началась современная теория всплесков.

КОНСТАНТЫ РИССА ДЛЯ НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЫ

Если вдвое проредить рассматриваемую систему когерентных состояний, то ситуация с устойчивостью меняется. Справедлива

Теорема 2. *Константы Рисса для системы функций (1) при выполнении условия $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi$ определяются равенствами*

$$A = \sqrt{\pi} \cdot \theta_3 \left(\frac{\pi}{2}, q_1 \right) \cdot \theta_3 \left(\frac{\pi}{2}, q_2 \right), \quad B = \sqrt{\pi} \cdot \theta_3 \left(0, q_1 \right) \cdot \theta_3 \left(0, q_2 \right), \tag{11}$$

где введены обозначения $q_1 = \exp\left(-\omega_1^2/4\right)$, $q_2 = \exp\left(-\omega_2^2/4\right)$, а $\theta_3(t, q)$ — третья тета-функция Якоби [13]:

$$\theta_3(t, q) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2} \cos(2kt).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и для теоремы 1. Заметим, что в формуле, аналогичной (9), переменные разделяются. Поэтому утверждение (11) принимает более простую форму по сравнению с (8), поскольку максимум третьей тета-функции достигается в 0, а минимум – в точке $\pi/2$.

Главное отличие от теоремы 1 состоит в том, что третья тета-функция на вещественной оси не обращается в ноль, т.е. система (1) становится устойчивой. В таблице 1 приведены несколько значений констант Рисса при разных пропорциях между параметрами ω_1 и ω_2.

Таблица 1. *Константы Рисса в случае $\omega_1 \cdot \omega_2 = 4\pi$, $\omega_2 = \ell \cdot \omega_1$*

ℓ	A	B	B/A
1	1.48	2.09	1.41
2	1.04	2.53	2.43
5	0.16	3.96	25.4
10	$4.35 \cdot 10^{-3}$	5.60	$1.29 \cdot 10^{3}$
20	$2.39 \cdot 10^{-6}$	7.93	$3.32 \cdot 10^{6}$
30	$1.14 \cdot 10^{-9}$	9.71	$8.55 \cdot 10^{9}$

Наблюдается рост отношения B/A с ростом коэффициента пропорциональности ℓ. Аналогичный эффект имеет место и для границ фреймов в случае переполненных систем [7, глава 3].

Приведём цитату из монографии Л. Манделя, Э. Вольфа [15, с. 412]: "…дисперсия одной из переменных $\widehat{p}$ или $\widehat{q}$ может быть сделана произвольно малой подходящим выбором θ за счёт соответствующего увеличения дисперсии второй канонической переменной. Такие состояния являются примером так называемых "сжатых состояний"…". На наш взгляд, необходимо обсуждение устойчивости данной процедуры в соответствии с теоремами 1, 2 и данными таблицы 1.

Подводя итог, можно сказать, что в работе предложена система функций, которая хотя и неполна, но допускает устойчивую ортогонализацию с сохранением структуры сдвигов и обладает равномерно ограниченной константой неопределенности. Сочетание перечисленных свойств, на наш взгляд, делает данную систему удобной для задач интерполяции и генерации волновых пакетов. Более того, неполнота построенной системы функций может в ряде случаев быть весьма ценным качеством, ибо аппроксимация с помощью такой системы позволяет осуществлять сглаживание исходных функций.

Авторы выражают благодарность проф. И. Я. Новикову и доценту Д. Л. Дорофееву за многочисленные обсуждения результатов данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов. Курс лекций / Р. Глаубер. — М.: Мир, 1966. — 178 с.

[2] Нейман И. Математические основы квантовой механики / И. Нейман. — М.: Наука, 1964. — 367 с.

[3] Переломов А. М. Замечание о полноте системы когерентных состояний / А.М. Переломов // ТМФ. — 1971. — Т. 6, № 2. — С. 213–224.

[4] Bargmann V. On the completeness of coherent states / V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J. R. Klauder // Rep. Math. Phys. — 1971. — V. 2. — P. 221–228.

[5] Balian R. Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique / R. Balian // C. R. Acad. Sci. Paris, 1981, 292, Serie 2.

[6] Low F. Complete sets of wave packets / Low F. // in A Passion for Physics – Essays in Honor of Geoffrey Chew, World Scientific, Singapore. — 1985. — P. 17–22.

[7] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 464 с.

[8] Bourgain J. A Remark on the Uncertainty Principle for Hilbertian Basis / J. Bourgain // Journal of Functional Analysis. — 1988. — V. 79. — P. 136–143.

[9] Schweinler H. C. Orthogonalization methods / H. C. Schweinler, E. P. Wigner // J. Math. Phys. — 1970. — P. 1693–1694.

[10] Новиков И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — М. : Физматлит, 2005. — 616 с.

[11] Чуи Ч. Введение в вэйвлеты / Ч. Чуи. — М.: Мир, 2001. — 412 с.

[12] Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М.: Наука, Физматлит, 1987. — 600 с.

[13] Уиттекер Э. Т. Курс современного анализа. Часть вторая: трансцендентные функции / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 516 с.

[14] Переломов А. М. Обобщённые когерентные состояния и их применения / А. М. Переломов. — М.: Наука, 1987. — 272 с.

[15] Мандель Л. Оптическая когерентность и квантовая оптика / Л. Мандель, Э. Вольф. — М.: Физматлит, 2000. — 896 с.

[16] Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1989. — 768 с.

[17] Боголюбов Н. Н. Введение в квантовую статистическую механику / Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.). — М.: Наука, 1984. — 384 с.

REFERENCES

[1] Glauber R. Optical coherence and photon statistics. [Glauber R. Opticheskaya kogerentnost' i statistika fotonov. Kurs lekcij]. Moscow: Mir, 1966, 178 p.

[2] Neumann J. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. [Nejman I. Matematicheskie osnovy kvantovoj mexaniki]. Moscow: Nauka, 1964. — 367 p.

[3] Perelomov A.M. On the completeness of a system of coherent states. [Perelomov A. M. Zamechanie o polnote sistemy kogerentnyx sostoyanij]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and mathematical physics*, 1971, Vol. 6, no. 2, pp. 213–224.

[4] Bargmann V., Butera P., Girardello L., Klauder J. R. On the completeness of coherent states. Rep. Math. Phys., 1971, Vol. 2, pp. 221–228.

[5] Balian R. Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique. C. R. Acad. Sci. Paris, 1981, 292, Serie 2.

[6] Low F. Complete sets of wave packets. in A Passion for Physics – Essays in Honor of Geoffrey Chew, World Scientific, Singapore, 1985, pp. 17–22.

[7] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. [Dobeshi I. Desyat' lekcij po vejvletam]. Izhevsk: 'Regular and Chaotic Dynamics', 2001, 464 p.

[8] Bourgain J. A Remark on the Uncertainty Principle for Hilbertian Basis / J. Bourgain. Journal of Functional Analysis, 1988, Vol. 79, pp. 136–143.

[9] Schweinler H.C., Wigner E.P. Orthogonalization methods. J. Math. Phys., 1970, pp. 1693–1694.

[10] Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Scopina M. A. Wavelet Theory. [Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. Teoriya vspleskov]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 616 p.

[11] Chui C. An Introduction to Wavelets. [Chui Ch. Vvedenie v ve'jvlety]. Moscow: Mir, 2001, 412 p.

[12] Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Numerical Methods. [Baxvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Chislennye metody]. Moscow: Nauka, 1987, 600 p.

[13] Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. Part Two: transcendental functions. [Uitteker E'. T., Vatson Dzh. N. Kurs sovremennogo analiza. Chast' vtoraya: transcendentnye funkcii]. Moscow: GIFML, 1963, 516 p.

[14] Perelomov A. M. Generalized Coherent States and Their Applications. [Perelomov A. M. Obobshhyonnye kogerentnye sostoyaniya i ix primeneniya]. Moscow: Nauka, 1987, 272 p.

[15] Mandel L., Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. [Mandel' L., Vol'f E'. Opticheskaya kogerentnost' i kvantovaya optika]. Moscow: Fizmatlit, 2000, 896 p.

[16] Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Vol. 3. Quantum mechanics (non-relativistic theory). [Landau L. D., Lifshic E. M. Teoreticheskaya fizika. T. III. Kvantovaya mexanika (nerelyativistskaya teoriya)]. Moscow: Nauka, 1989, 768 p.

[17] Bogolubov N. N., Bogolubov N. N. Jnr. Introduction to Quantum Statistical Mechanics. [Bogolyubov N. N., Bogolyubov N. N. (ml.). Vvedenie v kvantovuyu statisticheskuyu mexaniku]. Moscow: Nauka, 1984, 384 p.

Минин Леонид Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mininla@mail.ru

Minin Leonid Arcadievich, Associate Professor, Department of mathematical physics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mininla@mail.ru

Киселёв Евгений Александрович, аспирант факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru

Kiselev Eugene Alexandrovich, graduate student, Faculty of Computer Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru