УДК 519.71

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА ГОМОТОПИИ*

С. Н. Чуканов, Д. В. Ульянов

Омский государственный технический университет

Поступила в редакцию 23.06.2013 г.

Аннотация: в работе предложен метод декомпозиции векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии. При этом векторное поле декомпозируется на точную компонент, соответствующую градиентному векторному полю, и антиточную компоненту. В случае линейной динамической системы декомпозиция приводит компонентам, соответствующим представлениям с симметричной и кососимметричной матрицами. Предложен метод SVD для определения эквивалентности векторных полей. Метод может быть использован при конструировании систем управления динамическими системами для исследования устойчивости. Использование вышеизложенного метода декомпозиции для автономных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, позволяет сформировать такую функцию Лагранжа, что уравнения Эйлера-Лагранжа будут соответствовать исходным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: декомпозиция векторного поля, динамическая система, декомпозиция Ходжа-Гельмгольца, оператор гомотопии.

DECOMPOSITION OF THE VECTOR FIELD OF DYNAMICAL SYSTEM BY CONSTRUCTING A HOMOTOPY OPERATOR

S. N. Chukanov, D. V. Ulyanov

Abstract: a method for decomposing a vector field of a dynamical system based on the construction of homotopy operator is proposed in this paper. The vector field is decomposed on the exact component corresponding to the gradient vector field, and anti-exact component. In the case of a linear dynamic system the decomposition leads to components, corresponding representations of the symmetric and skew-symmetric matrices. SVD method is proposed for determining the equivalence of vector fields. The method can be used to construct systems of dynamic systems. The method can be used to construct systems of dynamic systems for the study of system stability. The use of the foregoing decomposition method for autonomous dynamical systems described by first order differential equations, allows to form the Lagrangian that Euler-Lagrange equations will correspond the original differential equations.

Keywords: decomposition of the vector field, the dynamical system, Hodge-Helmholtz decomposition, operator of homotopy.

ВВЕДЕНИЕ

В 3-мерной теории поля известно разложение Гельмгольца векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathrm{R}^3$ на безвихревое (потенциальное) поле и бездивергентное (соленоидальное) поле [1, 2]: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) =$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-07-00272 и № 14-08-01132.

$\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x}) + \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x})$; $\operatorname{div}\ \mathbf{f} = \Delta\varphi$; $\operatorname{div}\ \mathbf{v} = 0$; $\operatorname{rot}\ \mathbf{v} = 0$; где $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — векторный потенциал: $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$; $\varphi(\mathbf{x}) = A_0$ — скалярный потенциал. Граничные условия: векторное поле $\nabla\varphi$ — нормальное к границе $\partial\Omega$ области Ω , векторное поле $\nabla\times\mathbf{A}$ касательное к границе $\partial\Omega$. Можно выбрать такую калибровку потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, что $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ будет равен нулю. Декомпозиция Гельмгольца может быть записана с использованием оператора Ходжа, который в евклидовом пространстве форме: $\omega = (k!)^{-1}F_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ сопоставляет форму: $*\omega = ((n-k)!)^{-1}\bar{F}_{j_1\cdots j_{n-k}}dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{n-k}}$; где $\bar{F}_{j_1\cdots j_{n-k}}$ — тензор дуальный тензору $F_{i_1\ldots i_k}$: $\bar{F}_{j_1\ldots j_{n-k}} = \varepsilon_{j_1\ldots j_{n-k},i_1\ldots i_k}F_{i_1\ldots i_k}$. Декомпозиция Ходжа-Гельмгольца имеет вид [2, 3]: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = d\varphi(\mathbf{x}) + *d\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x})$; $*d*\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0; *d\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$. Однако при $n > 4$ оператор Ходжа 1-формам сопоставляет k-формы со значением $k > 3$; декомпозиция Ходжа-Гельмгольца при этом некорректна (например, при размерности пространства $n = 5$вектору $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, как тензору типа $(1,0)$, будет сопоставлен тензор $*d\mathbf{A}(\mathbf{x})$типа $(n-(1+1),0) = (3,0))$, который не является вектором). Поэтому построение алгоритмов декомпозиции, аналогичной декомпозиции Ходжа-Гельмгольца, для дифференциальных форм при $n > 4$ является актуальной задачей.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Для динамической системы сформируем векторное поле $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}$ и соответствующую дифференциальную форму $\omega = \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ в дуальном базисе: $\left\langle dx_i, {\partial}/{\partial x_j}\right\rangle = \delta_{ij}$. Построим из векторного поля скалярный потенциал применением оператора гомотопии с центром в $x_0 \equiv 0$для формы $\omega = \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$:

$$\mathbb{H}(\omega) = \int_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right) \lrcorner \left(\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right) d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})\cdot d\lambda; \tag{1}$$

оператор гомотопии $\mathbb{H}$ удовлетворяет тождеству $\omega = d(\mathbb{H}\omega) + \mathbb{H}d\omega$.

Рассмотрим элементы метода оператора гомотопии в соответствии с [4, 8]. Обозначим элементы тангенциального векторного пространства в точке $\mathbf{x}\in \mathrm{R}^n$ для любого целого $\forall n > 1 : \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{x}); f_i \in \mathrm{R}$; элементы котангенциального пространства (дифференциальные формы): $\omega(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(\mathbf{x})\,dx_i, \omega_i \in \mathrm{R}$. Для дифференциальных форм можно ввести дифференциальный оператор d со свойствами: (1) $d\left(\omega^1+\omega^2\right) = d\omega^1 + d\omega^2$; (2) $d\varphi = \omega(\mathbf{x}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i$; (3) $d(d\omega) = 0$; и оператор $\lrcorner$ внутреннего произведения векторного и ковекторного поля $\mathbf{X}\lrcorner\omega$ со свойствами: (1) $\mathbf{X}\lrcorner\mathbf{f} = 0$ (2) $\mathbf{X}\lrcorner\omega = \omega(\mathbf{X})$ (3)$X \lrcorner\left(\omega^1+\omega^2\right) = X\lrcorner\omega^1 + X\lrcorner\omega^2$. Построим оператор гомотопии H - линейный оператор, действующий на форму $\omega(\mathbf{x})$: $(\mathrm{H}\omega)(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1 \left(\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \lrcorner\,\omega(\lambda\mathbf{x})\cdot\lambda^{k-1}d\lambda; k = \deg(\omega)$. При $k = 1; \mathbf{x}^0 \equiv 0$: $(\mathrm{H}\omega)(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\lrcorner\,\omega(\lambda\mathbf{x})\,d\lambda$. Свойства оператора гомотопии: (1) $d\mathrm{H} + \mathrm{H}d = \mathrm{I}$; (2) $(\mathrm{H}(\mathrm{H}\omega))(x_i) = 0; (\mathrm{H}\omega)\left(x_i^0\right) = 0$; (3) $\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\lrcorner\ \mathrm{H} = 0$. Первый член разложения формы $\omega = d(\mathrm{H}\omega) + \mathrm{H}d\omega = \omega_e + \omega_a$: точная форма$\omega_e = d(\mathrm{H}\omega)$ является замкнутой: $d\omega_e = d(d(\mathrm{H}\omega)) = 0$; форма $\omega_a = \mathrm{H}d\omega$ является антиточной. Для случая $\omega = d\varphi$ получим: $(\mathrm{H}d\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)$.

Первый член разложения — является точной формой $\omega_e = d(\mathrm{H}\omega) = d\left(\int\limits_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})\cdot d\lambda\right)$, следовательно является замкнутой формой: $d\omega_e = d(d(\mathrm{H}\omega)) = 0$. Если считать $\varphi(\mathbf{x}) = \mathrm{H}\omega(\mathbf{x})$

скалярным потенциалом, то потенциальное векторное поле $\varphi'_x \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ является дуальным форме $\omega_e = d\,(\mathrm{H}\omega) = \varphi'_x d\mathbf{x}$.

Второй член разложения ω_a – является антиточной формой (по терминологии [4]) $\omega_a = \omega - \omega_e = \omega - d\,(\mathrm{H}\omega) = \mathrm{H}d\omega$, причем $\mathrm{H}\omega_a = \mathrm{H}\,(\mathrm{H}d\omega) = 0$.

Пример 1. Рассмотрим пример декомпозиции векторного поля динамической системы, заданной соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 0{,}1 \cdot x_1^3; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 0{,}1 \cdot x_2^3. \end{aligned}$$

Построим дуальную дифференциальную форму: $\omega = \left(x_2 - 0,1 \cdot x_1^3\right) dx_1 + \left(-x_1 - 0,1 \cdot x_2^3\right) dx_2$, к которой применим оператор гомотопии с $\mathbf{x}^0 \equiv 0$:

$$\mathrm{H}\,(\omega) = \int\limits_0^1 \left[\left(x_2 - 0{,}1 \cdot (\lambda x_1)^3\right) \lambda x_1 + \left(-x_1 - 0{,}1 \cdot (\lambda x_2)^3\right) \lambda x_2\right] \cdot d\lambda = -0{,}025\left(x_1^4 + x_2^4\right).$$

Тогда точная форма равна: $\omega_e = d\,(\mathrm{H}\omega) = d\left(-0{,}025\left(x_1^4 + x_2^4\right)\right) = -0{,}1x_1^3 dx_1 - 0{,}1x_2^3 dx_2$; и соответствующее дуальное потенциальное векторное поле: $\mathbf{X}_e = -0{,}1x_1^3 \frac{\partial}{\partial x_1} - 0{,}1x_2^3 \frac{\partial}{\partial x_2}$ для скалярного потенциала $\varphi\,(\mathbf{x}) = \mathrm{H}\,(\omega\,(\mathbf{x})) = -0{,}025\left(x_1^4 + x_2^4\right)$.

Антиточная форма: $\omega_a = \omega - \omega_e = \left(x_2 - 0{,}1x_1^3\right) dx_1 + \left(-x_1 - 0{,}1x_2^3\right) dx_2 + 0{,}1x_1^3 dx_1 + 0{,}1x_2^3 dx_2 = x_2 dx_1 - x_1 dx_2$; и соответствующее дуальное векторное поле $\mathbf{X}_e = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. □

Пример 2. Рассмотрим пример динамических уравнений для компонент вектора угловой скорости $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ при вращательном движении твердого тела с главными компонентами тензора инерции и при действии на твердое тело управляющего вектора момента $\mathbf{m} = (-0{,}1 \cdot x_1, -0{,}1 \cdot x_2, -0{,}1 \cdot x_3)^T$:

$$\begin{aligned} 100\dot{x}_1 &= 20x_2x_3 - 0{,}1 \cdot x_1; \\ 80\dot{x}_2 &= -40x_1x_3 - 0{,}1 \cdot x_2; \\ 60\dot{x}_3 &= 20x_1x_2 - 0{,}1 \cdot x_3. \end{aligned}$$

Построим дуальную дифференциальную форму: $\omega = (20x_2x_3 - 0{,}1 \cdot x_1)\,dx_1 + (-40x_1x_3 - 0{,}1 \cdot x_2)\,dx_2 + (20x_1x_2 - 0{,}1 \cdot x_3)\,dx_3$, к которой применим оператор гомотопии с $\mathbf{x}^0 \equiv 0$: $\varphi\,(\mathbf{x}) = \mathrm{H}\,(\omega\,(\mathbf{x})) = -0{,}05\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$. Отсюда точная форма: $\omega_e = d\,(\mathrm{H}\omega) = d\left(-0{,}05\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\right) = -0{,}1x_1dx_1 - 0{,}1x_2dx_2 - 0{,}1x_3dx_3$; и соответствующее дуальное потенциальное векторное поле: $\mathbf{X}_e = -0{,}1x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - 0{,}1x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 0{,}1x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ и векторное поле дуальное антиточной форме: $\mathbf{X}_a = 20x_2x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - 40x_1x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 20x_1x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$. □

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$

В работе [9] показано, что гладкая динамическая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\,(\mathbf{x})\,; \mathbf{f}\,(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ может представлена в форме: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$; $\mathbf{A}\,(\mathbf{x}) \in \mathrm{R}^{n \times n}$: $\mathbf{A} = (a_{ij})\,; a_{ij}\,(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1} f_i\,(\mathbf{x})\, x_j, \|\mathbf{x}\| \neq 0$

В свою очередь, правая часть выражения $\mathbf{A}\,(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ может быть декомпозирована в форме:

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{J}\,(\mathbf{x}) + \mathbf{R}\,(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{J}\,(\mathbf{x}) = 0{,}5 \cdot \left(\mathbf{A}\,(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\,(\mathbf{x})^T\right)$; $\mathbf{R}\,(\mathbf{x}) = 0{,}5 \cdot \left(\mathbf{A}\,(\mathbf{x}) + \mathbf{A}\,(\mathbf{x})^T\right)$.

Для векторных полей $\mathbf{J}\,(\mathbf{x})\,\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ и $\mathbf{R}\,(\mathbf{x})\,\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ построим соответствующие дифференциальные формы в дуальном базисе: $\omega_{\mathbf{J}} = (\mathbf{J}\,(\mathbf{x})\,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ и $\omega_{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}\,(\mathbf{x})\,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Применим оператор гомотопии с центром $\mathbf{x}^0 \equiv 0$ для формы $\omega_{\mathbf{J}}$:

$$\mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{J}}\left(\mathbf{x}\right)\right) = \mathrm{H}\left(\mathbf{J}\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{x}d\mathbf{x}\right) = \int\limits_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \rfloor \left(\mathbf{J}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\lambda\mathbf{x}d\mathbf{x}\right)d\lambda = \int\limits_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{J}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\lambda\mathbf{x}d\lambda = 0. \tag{3}$$

Применим оператор гомотопии с центром $\mathbf{x}^0 \equiv 0$ для формы $\omega_{\mathbf{R}}$:

$$\mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right) = \mathrm{H}\left(\mathbf{R}\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{x}d\mathbf{x}\right) = \int\limits_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \rfloor \left(\mathbf{R}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\lambda\mathbf{x}d\mathbf{x}\right)d\lambda = \int\limits_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{R}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\lambda\mathbf{x}d\lambda. \tag{4}$$

Так как $\mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{J}}\left(\mathbf{x}\right)\right) = 0$, то $\mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{x}\right)\right) = \mathrm{H}\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{x}d\mathbf{x}\right) = \mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right)$. Следовательно потенциальное (градиентное [5]) векторное поле системы:

$$\mathbf{f}_g = \frac{\partial \mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right)}{\partial \mathbf{x}}; \tag{5}$$

со скалярным потенциалом $\varphi\left(\mathbf{x}\right) = \mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right)$; тангенциальное векторное поле системы:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{f}_g = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} - \frac{\partial \mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right)}{\partial \mathbf{x}}. \tag{6}$$

Если $\mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{A}$, то $\mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right) = \int\limits_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{R}\left(\lambda\mathbf{x}\right)\lambda\mathbf{x}\cdot d\lambda = 0{,}5\cdot\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x}$; потенциальное векторное поле системы: $\mathbf{f}_g = \mathbf{R}\mathbf{x}$; тангенциальное векторное поле: $\mathbf{f}_t = \mathbf{J}\mathbf{x}$.

Пример 3. Рассмотрим пример декомпозиции линейной системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

Применим оператор гомотопии с центром $\mathbf{x}^0 \equiv 0$ к симметрической части дуальной дифференциальной формы и получим скалярный потенциал:

$$\mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right) = \int\limits_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \rfloor \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\lambda\mathbf{x}d\mathbf{x}\right)d\lambda = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{x}\right)\right);$$

Следовательно потенциальное (градиентное) векторное поле системы:

$$\mathbf{f}_g = \frac{\partial \mathrm{H}\left(\omega_{\mathbf{R}}\left(\mathbf{x}\right)\right)}{\partial \mathbf{x}} = \int\limits_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \rfloor \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\lambda\mathbf{x}d\mathbf{x}\right)d\lambda = \mathbf{R}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x};$$

а тангенциальное векторное поле системы:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f} - \mathbf{f}_g = \left(\mathbf{A} - \mathbf{R}\right)\mathbf{x} = \mathbf{J}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}.\square$$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМ $\omega_{\mathbf{R}}$

Применим метод SVD (singular-value decomposition) для определения эквивалентности форм $\omega_{\mathbf{R}}$. Для матрицы $\mathbf{M} \in \mathrm{R}^{m\times n}$ существует SVD декомпозиция: $\mathbf{M} = \mathbf{U\Sigma V}^*$, где $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathrm{R}^{m\times m}$ — унитарные матрицы, $\mathbf{\Sigma} \in \mathrm{R}^{m\times n}$ — диагональная матрица с неотрицательными числами. Для матрицы $\mathbf{M} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ SVD декомпозиция может быть представлена форме: $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T\mathbf{\Sigma S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Sigma S}; \mathbf{S} \in SO\left(n\right)$. Если значения сингулярные собственные значения $\sigma_i = \Sigma_{ii}$ упорядочены: $(i > j) \;\; \Rightarrow \;\; (\sigma_i \geqslant \sigma_j)$, то матрица $\mathbf{\Sigma}$ однозначно определяется матрицей $\mathbf{M}$. Значения σ_i определяются из выражения $\sigma_i\left(M\right) = \sqrt{\lambda_i\left(\mathbf{M}^T\mathbf{M}\right)} = \sqrt{\lambda_i\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^T\right)}$, где $\lambda_i\left(\mathbf{L}\right)$ — собственные значения матрицы $\mathbf{L}$.

Если скалярную потенциальную функцию $\varphi\left(\mathbf{x}\right)$ динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)\cdot\mathbf{x}$можно представить в виде $\varphi\left(\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{x}-\mathbf{a}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}\right)+\mathbf{b}; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{R}^n$, то SVD декомпозиция матрицы $\mathbf{M}$ позволяет классифицировать скалярный потенциал на основе определения сингулярных собственных значений — диагональных элементов матрицы $\mathbf{\Sigma}$.

Преобразование вектора состояния $\mathbf{y} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{x}$ позволяет привести скалярную потенциальную функцию к диагональной форме:

$$\varphi\left(\mathbf{y}\right) = 0{,}5\cdot\mathbf{y}^T\Sigma\mathbf{y} = 0{,}5\cdot\sum_{i=1}^{n}\sigma_i y_i^2. \tag{7}$$

Пример 4. Для скалярного потенциала оператора гомотопии из примера 2: $\varphi\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix}5 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 7\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\left(5x_1^2+6x_1x_2+7x_2^2+14x_2x_3+9x_3^2+10x_1x_3\right)$ получим SVD декомпозицию

$$\varphi\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix}5 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 7\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix}-0{,}374 & 0{,}816 & -0{,}441\\ -0{,}577 & -0{,}577 & -0{,}577\\ -0{,}726 & 0{,}039 & 0{,}687\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15{,}838 & 0 & 0\\ 0 & 3{,}774 & 0\\ 0 & 0 & 1{,}389\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}374 & -0{,}577 & -0{,}726\\ 0{,}816 & -0{,}577 & 0{,}039\\ -0{,}441 & -0{,}577 & 0{,}687\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

При преобразовании вектора состояния: $\mathbf{y} = \begin{pmatrix}-0,374 & -0,577 & -0,726\\ 0,816 & -0,577 & 0,039\\ -0,441 & -0,577 & 0,687\end{pmatrix}\mathbf{x}$ получим потенциальную функцию в диагональной форме $\varphi\left(\mathbf{y}\right) = 0{,}5\cdot\mathbf{y}^T\Sigma\mathbf{y} = 0{,}5\cdot\left(1{,}538y_1^2+3{,}774y_2^2+1{,}389y_3^2\right)$ и компоненты векторного поля в координатах $\mathbf{y} = \left(y_1, y_2, y_3\right)^T$: $\left({}^{\partial\varphi(\mathbf{y})}/_{\partial y_1}, {}^{\partial\varphi(\mathbf{y})}/_{\partial y_2}, {}^{\partial\varphi(\mathbf{y})}/_{\partial y_3}\right)^T = \begin{pmatrix}1{,}538y_1\\ 3{,}774y_2\\ 1{,}389y_3\end{pmatrix}$. $\square$

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ВИДА $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$

Для систем вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right)\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$ с управлением $\mathbf{u} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{x}$, выберем в качестве функции Ляпунова функцию [6, 7]: $V\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^T\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{x} > 0; p_{ii} > 0; p_{ij,i\neq j} = 0; V\left(0\right) = 0$, для которой

$$^{dV}/_{dt} = \mathbf{x}^T\left(\left(\mathbf{A}+\mathbf{BK}\right)^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\left(\mathbf{A}+\mathbf{BK}\right)\right)\mathbf{x}; \tag{8}$$

Если матрица $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ имеет декомпозицию кососимметрическую и симметрическую части, полученную с помощью оператора гомотопии, в форме: $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{x})$, то матрица $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}\right)$ симметрическая, так как матрицы $\left(\mathbf{J}^T\mathbf{P} + \mathbf{PJ}\right)$ и $\left(\mathbf{R}^T\mathbf{P} + \mathbf{PR}\right)$ - симметрические и обеспечение устойчивости сводится к нахождению такой матрицы $\mathbf{K}$, которая обеспечит выполнение условия:

$$\mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}\right)\mathbf{x} < -\mathbf{x}^T\left((\mathbf{BK})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{BK})\right)\mathbf{x}. \tag{9}$$

Пример 5. Для системы из примера 2 при $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{u} \in \mathrm{R}^3; \mathbf{B} = \mathbf{I}$ получим $\mathbf{J}^T\mathbf{P} + \mathbf{PJ} = 0$; $\mathbf{R}^T\mathbf{P} + \mathbf{PR} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 10 \\ 6 & 14 & 10 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}$ и условие (9) выполняется для $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix}$, так как $(x_i + x_j)^2 \geqslant 0; \forall x_i, x_j \in \mathrm{R}$. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод декомпозиции векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии. Метод декомпозиции на основе построения оператора гомотопии имеет преимущество по отношению к методам декомпозиции Гельмгольца и Ходжа-Гельмгольца в том, что может быть использован к системам любой размерности. Применение метода декомпозиции на основе построения оператора гомотопии с использование криволинейных координат позволяет применять методы оптимизации преобразованием координат; предполагается исследование методов оптимизации преобразованием координат в последующих работах. Предложен метод SVD-декомпозиции для определения эквивалентности векторных полей. Метод может быть использован для построения функций Ляпунова динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Saffman P.G. Vortex dynamics. — Cambridge University Press. — 1992. — 312 p.

[2] Chukanov S.N. Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems // Pattern Recognition and Image Analysis. — Vol.19, No 2. — 2009. — pp. 303–305.

[3] Multimedia tools for communicating mathematics (ed. K. Polthier, J. Rodrigues). — Springer-Verlag. — 2002. — pp. 241–264.

[4] Edelen D.G.B. Applied Exterior Calculus. — John Wiley&Sons, Inc. — 1985. — 472 p.

[5] Wang Y., Lia Ch., Cheng D. Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems // Automatica, Vol. 39. — 2003. — pp. 1437–1443.

[6] Sage A.P., White Ch.C. Optimum system control. — New Jersey: Prentice-Hal, Inc. — 1977. — 392 p.

[7] Wang Y., Cheng D., Ge S.S. Approximate Dissipative Hamiltonian Realization and Construction of Local Lyapunov Functions. // Systems and Control Letters, vol. 56. — 2007. — pp. 141–149.

[8] Hudon, N., Hoffner K., Guay M. Equivalence to Dissipative Hamiltonian Realization. In: Proceedings of the 47-th Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico. 2008. — pp. 3163–3168.

[9] Cheng D., Shen T., Tarn T.J. Pseudo-hamiltonian realization and its application // Communications in information and systems. — Vol. 2, No. 2. Dec. 2002. — pp. 91–120.

REFERENCES

[1] Saffman P.G. Vortex dynamics. Cambridge University Press. 1992. 312 p.

[2] Chukanov S.N. Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems. Pattern Recognition and Image Analysis. Vol.19, No 2. 2009. pp. 303–305.

[3] Multimedia tools for communicating mathematics (ed. K. Polthier, J. Rodrigues). Springer-Verlag. 2002. pp. 241–264. [4] Edelen D.G.B. Applied Exterior Calculus. John Wiley&Sons, Inc. 1985. 472 p.

[5] Wang Y., Lia Ch., Cheng D. Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems. Automatica, Vol. 39. 2003. pp. 1437–1443.

[6] Sage A.P., White Ch.C. Optimum system control. New Jersey: Prentice-Hal, Inc. 1977. 392 p.

[7] Wang Y., Cheng D., Ge S.S. Approximate Dissipative Hamiltonian Realization and Construction of Local Lyapunov Functions. Systems and Control Letters. Vol. 56. 2007. pp. 141–149.

[8] Hudon N., Hoffner K., Guay M. Equivalence to Dissipative Hamiltonian Realization. In Proceedings of the 47-th Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico. 2008. pp. 3163–3168.

[9] Cheng D., Shen T., Tarn T.J. Pseudo-hamiltonian realization and its application. Communications in information and systems. Vol. 2, No. 2. Dec. 2002. pp. 91–120.

Чуканов Сергей Николаевич, Ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, доктор технических наук, профессор, г. Омск, Российская Федерация
E-mail: ch_sn@mail.ru

Chukanov Sergey Nikolaevich, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Omsk branch Position: Leading Researcher, Doctor of Technical Sciences, Professor, Russian Federation
E-mail: ch_sn@mail.ru

Ульянов Дмитрий Владимирович, ФГБОУ ВПО Омский государственный технический университет, Аспирант кафедры "Автоматизированные системы обработки информации и управления", г. Омск, Российская Федерация
E-mail: grayfox@list.ru

Ulyanov Dmitry Vladimirovich, Omsk State Technical University, Graduate student "Automated Information Processing Systems and Control"
E-mail: grayfox@list.ru