

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ПОСРЕДСТВОМ РЕДУЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ*

Ю. И. Сапронов, А. П. Карпова, В. В. Конев, А. С. Коротких

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.02.2014 г.

Аннотация: известно, что ряд подходов к построению приближенных аналитических решений уравнения Навье-Стокса основан на редукциях к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и к конечномерным динамическим системам с квадратичными нелинейностями (переходы к уравнениям Гельмгольца, Джеффри-Гамеля, к конечномерным системам гидродинамического типа и т.д.). Благодаря этому удается использовать метод Ляпунова-Шмидта в таких практически важных задачах, как моделирование течений жидкости в диффузоре, гидроциклоне и др. В настоящей статье предложены процедуры получения приближенных решений уравнения Навье-Стокса, моделирующих плоские периодические волны, близкие к ламинарному течению жидкости, а также стационарные течения в диффузорах и гидроциклонах. Теоретическую основу представленных разработок составляют функциональные редукции к краевым задачам для ОДУ (посредством подстановки Гамеля для вихревой функции и через галеркинские аппроксимации решений уравнения Гельмгольца). В случае задачи о течениях в диффузоре продемонстрирована возможность применения нелинейного метода Галеркина-Ритца в рамках обобщенной схемы Ляпунова-Шмидта. Итогом такого применения явилось получение компьютерных графических изображений линий уровня вихревых функций, траекторий частиц жидкости и эпор скоростей (примеры графических изображений приведены в статье).

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса и Гельмгольца, вихревая функция, стационарные течения, диффузор, подстановка Гамеля, периодические волны, метод Галеркина-Ритца, редукция Ляпунова-Шмидта, гидроциклон.

MODELLING CURRENTS OF LIQUID BY MEANS OF REDUCED EQUATIONS

Yu. I. Sapronov, A. P. Karpova, V. V. Konev, A. S. Korotkih

Abstract: it is known that the row of approaches to construction of approximate analytical solutions of Navier-Stokes equation is based on reductions to boundary value problems for ordinary differential equations and to finite dimensional dynamic systems with quadratic nonlinearity (reduction to Helmholtz equations, Jeffery-Hamel equations, finite dimensional systems of the hydrodynamical type etc.). Due to the above, it succeeds to use the Lyapunov-Schmidt method in such practically important problems like modelling of flows of liquids in diffusers, hydrocyclones etc. The procedure of approximate calculation for solutions of the Navier-Stokes equation, simulating flat periodic waves, close to the laminar flow of liquid, and stationary flows in diffusers and hydrocyclones is studied in the article. The methodological basis of the procedure is the functional reduction to the boundary problems for ODE (via Gamel substituting for vortex functions and Galerkin approximation of the Helmholtz equation).

* Работа выполнена при поддержке ОАО «Турбонасос»

Статья посвящена юбилею профессора В.А. Костина

© Сапронов Ю. И., Карпова А. П., Конев В. В., Коротких А. С., 2014

Possibility of application of the nonlinear Galerkin-Ritz method according to the Lyapunov-Schmidt scheme is demonstrated in the case of a problem for currents in the diffuser. The result of the application is obtaining of graphical pictures of level lines for vortex functions, trajectories of particles of liquid and velocity diagrams (examples of graphical pictures are given in the article).

Keywords: the Navier-Stokes and Helmholtz equations, vortex functions, stationary flows, diffuser, Gamel substituting, periodic waves, Galerkin-Ritz method, Lyapunov-Schmidt reduction, hydrocyclone.

ВВЕДЕНИЕ

Исходной точкой для развития темы данной статьи явилась работа [1], выполненная под руководством профессоров А.В. Костина и С.Г. Валухова в рамках прикладного проекта, разрабатываемого (в то время) в ВГУ коллективом кафедры математического моделирования совместно с ОАО «Турбонасос». В работе [1] была применена идея редукции — перехода к более простому уравнению, позволившая описать течения жидкости в гидроциклоне.

Как позже выяснилось, ряд известных подходов к построению приближенных аналитических решений уравнения Навье-Стокса также основан на редукции к конечномерным динамическим системам и краевым задачам для ОДУ [2] – [6]. Выяснилось также, что в задачах по динамике течений жидкости в диффузоре, гидроциклоне и др. имеется возможность применения нелокальной версии метода Ляпунова-Шмидта (конечномерной редукции модельной краевой задачи). При изучении течений в диффузоре, начиная с основополагающих работ Джефффри [7] и Гамеля [3,7] (1915 и 1917 гг.), используется краевая задача для упрощенного дифференциального уравнения (сведения о современных достижениях по моделированию течений в диффузоре на этой основе можно найти в [2], [9], [10]), допускающая редуцирующий переход к конечномерным динамическим системам с квадратичными нелинейностями.

Сейчас уже стало ясно, что и в задачах о течении жидкости в объемном диффузоре и «диффузоре-улитке» также имеется возможность применения нелокальной схемы Ляпунова-Шмидта [11], посредством которой можно сколь угодно точно описывать динамику скоростей и траектории частиц жидкости. Полное решение этих задач — дело ближайших лет.

Получаемые из уравнения Навье-Стокса упрощенные системы гидродинамического типа [5], [6], позволяют достаточно точно моделировать течения жидкости в областях достаточно произвольных геометрических форм.

Авторы благодарны профессору В.А. Костину, инициировавшему написание данной работы.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФФУЗОРЕ

В основу вычислительного процесса для плоского диффузора кладут редукцию к краевой задаче для ОДУ (посредством подстановки Гамеля для вихревой функции) с последующим использованием свойства полной интегрируемости полученного ОДУ. Но, как известно, представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к точности приближений — вследствие недостаточной точности ($10^{-4} - 10^{-6}$) существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. Требуемая же точность в современных прикладных задачах — $10^{-8} - 10^{-10}$ и выше. В работах [9] – [10] представлены результаты построения приближенных решений уравнения редуцированного уравнения на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях.

Используемый ниже подход (к построению математических моделей течений жидкости) основан на двухшаговой редукции — функциональной редукции к краевой задаче для ОДУ с квадратичной нелинейностью (первый шаг), и затем редукция к конечномерному алгебраическому уравнению (второй шаг) — через нелинейную аппроксимацию Галеркина-Ритца методом Ляпунова-Шмидта.

1.1. Двумерные уравнения Навье-Стокса и Гельмгольца

Обратимся к двумерному уравнению Навье-Стокса [2]

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \nu \Delta(v) - \text{grad}(p). \quad (1.1)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двумерный лапласиан, $\frac{\partial v}{\partial x}$ — матрица Якоби вектора скорости $v = v(x_1, x_2, t)$ по компонентам точки $x = (x_1, x_2)$, $p = p(x_1, x_2, t)$ — давление. Искомое поле векторов скорости v считается заданным на некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и «стандартными» краевыми условиями.

В полярных координатах стационарное уравнение Навье-Стокса принимает следующий вид (см. [2]):

$$\left. \begin{aligned} (U \cdot \tilde{\nabla})u - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\tilde{\Delta}u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right), \\ (U \cdot \tilde{\nabla})v + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \left(\tilde{\Delta}v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где

$$(U \cdot \tilde{\nabla}) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

К уравнениям Навье-Стокса добавляется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Имеют место также следующие соотношения (в полярных координатах):

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^\top, \quad \text{sgrad} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, -\frac{\partial}{\partial r} \right)^\top.$$

В преобразованиях, упрощающих уравнение (1.1), используются следующие соотношения (устанавливаемые непосредственной проверкой):

$$\text{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \text{grad}(\Delta \psi); \quad \text{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial x} v \right) = [\psi, \Delta(\psi)].$$

Здесь $\text{rot}(v) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, $\psi(x_1, x_2, t)$ — так называемая вихревая функция, $[\psi, \varphi]$ — якобиан функций ψ, φ .

Условие неразрывности $\text{div}(v) = 0$ для двумерной жидкости в односвязной области приводит к тому, что решение обязано принимать следующий вид:

$$v := \text{sgrad}(\psi) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^\top,$$

Для функции ψ естественно потребовать выполнение граничного условия

$$(n, \text{sgrad}(\psi)) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.3)$$

n — поле нормалей к границе области.

Пусть $u := \text{rot}(v) = \Delta(\psi)$, и $\dot{u} = \text{rot}(\dot{v}) = \Delta(\dot{\psi})$. Применив двумерный ротор к левой и правой частям уравнения (1.1), получим уравнение Гельмгольца ([2], стр. 406)

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi). \quad (1.4)$$

1.2. Подстановка Гамеля и редукция к ОДУ

Анализ стационарного варианта

$$[\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi) = 0 \quad (1.5)$$

уравнения Гельмгольца (1.4) можно осуществить, используя редуцирующий переход к краевой задаче для ОДУ ([2], стр. 450-484). Наиболее известной редукцией является подстановка Гамеля, осуществляемая посредством сужения стационарного уравнения Гельмгольца на класс функций вида (см. [2], стр. 478) $\psi = Qq(\theta)$. Ниже $Q := \int_0^\beta r u d\theta$ — поток жидкости через диффузорную дугу окружности $\{0 \leq \theta \leq \beta, r = \text{const}\}$, β — величина раствора диффузорного угла.¹⁾

Используя соотношения

$$\Delta(\varphi) = Q \frac{q''}{r^2}, \quad [\Delta(\varphi), \varphi] = -Q^2 \frac{2q''q'}{r^4}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right) = \frac{6q''}{r^4},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q''}{r^2} \right) = -\frac{2q''}{r^4}, \quad \frac{1}{r^2} \left(\frac{q''}{r^2} \right)'' = \frac{q''''}{r^4}$$

получим (после подстановки Гамеля) вместо (1.5) следующее ОДУ (уравнение Джеффри-Гамеля):

$$q'''' + 4q'' + 2\mathcal{R}q''q' = 0, \quad (1.6)$$

где $\mathcal{R} = \frac{Q}{\nu}$ — число Рейнольдса.

В случае плоского диффузора уравнение (1.6) дополняется краевыми условиями (см. (1.3))

$$q(0) = 0, \quad q(\beta) = 1, \quad q'(0) = q'(\beta) = 0.$$

Условие $q(\beta) = 1$ вытекает из того, что $\int_0^\beta q' d\theta = \frac{1}{Q} \int_0^\beta r u d\theta = 1$ — (нормированный) поток через сечение диффузора окружностью $r = \text{const}$ (см. [9], [10]).

После масштабирующего преобразования угловой переменной $\theta \rightarrow \beta\theta$ получим краевую задачу

$$q'''' + \lambda q'' + 2\tilde{\mathcal{R}}q''q' = 0, \quad (1.7)$$

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 1, \quad q'(0) = q'(1) = 0, \quad (1.8)$$

где

$$\lambda = 4\beta^{-2}, \quad \tilde{\mathcal{R}} = \beta^{-1}\mathcal{R}.$$

Замечание 2. Нетрудно установить, что краевая задача (1.7) – (1.8) является вариационной: левая часть уравнения (1.7) является градиентом функционала

$$V = \int_0^1 L(q'', q') d\theta, \quad L(q'', q') = \frac{(q'')^2}{2} - \lambda \frac{(q')^2}{2} + \tilde{\mathcal{R}} \frac{(q')^3}{3}. \quad (1.9)$$

Таким образом, решения уравнения (1.7) являются экстремальями функционала (1.9) (при условии (1.8)). Следовательно, построение решений уравнения (1.7) можно осуществлять на основе локальной и нелокальной версий вариационного метода Ляпунова-Шмидта.

¹⁾ Позже Осен и Розенблатт расширили этот класс (см. [2], стр. 478, 479) до класса функций вида $\varphi = q(\theta) + cr$ и, соответственно, $\varphi = q_1(\theta) + q_2(\theta)r^m$.

Замечание 3. В работах [9], [10] представлены результаты построения приближенных решений уравнения (1.7) на основе специальной версии метода ускоренной сходимости. В этих же работах дано обоснование необходимости применения приближенных методов к построению решений уравнения (1.7) — в противовес методу использования точного аналитического решения в эллиптических функциях. Такая возможность имеется вследствие интегрируемости уравнения (1.7). Представление решений через эллиптические функции не удовлетворяет современным требованиям к приближениям вследствие недостаточной точности ($10^{-4} - 10^{-6}$) существующих таблиц значений эллиптических функций и интегралов. Требуемая точность в современных прикладных задачах — $10^{-8} - 10^{-10}$ и выше.

После первичного интегрирования уравнения (1.7) и замены $q' = u$ получим краевую задачу

$$u'' + \lambda u + \tilde{\mathcal{R}} u^2 = c, \quad c - \text{const}, \tag{1.10}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{1.11}$$

при дополнительном интегральном ограничении

$$\int_0^1 u \, d\theta = 1. \tag{1.12}$$

Левая часть уравнения (1.10) является градиентом функционала действия

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \left((u')^2 - \lambda u^2 \right) + \frac{1}{3} u^3 \, d\theta \tag{1.13}$$

при краевых условиях (1.11). Функционал действия удобно рассматривать (см. [11]) на гильбертовом пространстве $H^1[0, 1]$, состоящем из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию (1.11) и имеющих производную класса $L_2[0, 1]$. Скалярное произведение в $H^1[0, 1]$ задается соотношением $\langle u, v \rangle_1 = \int_0^1 u'v' \, d\theta$.

Интегрирование (вторичное) уравнения (1.10) приводит следующему соотношению (с двумя константами c, d): $\frac{1}{2}((u')^2 + \lambda u^2) + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}u^3 - cu = d$, или $\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}(u + \alpha)^3 - \tilde{c}u = \tilde{d}$, где $\alpha = \frac{\lambda}{2\tilde{\mathcal{R}}}$, $\tilde{c} = c + \frac{\lambda^2}{4\tilde{\mathcal{R}}}$, $\tilde{d} = d - \frac{\lambda^3}{24\tilde{\mathcal{R}}^2}$.

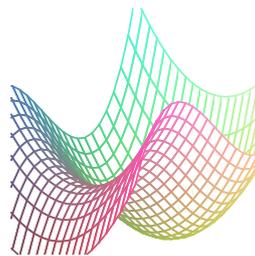


Рис. 1. График функции, равной интегралу уравнения (1.10).

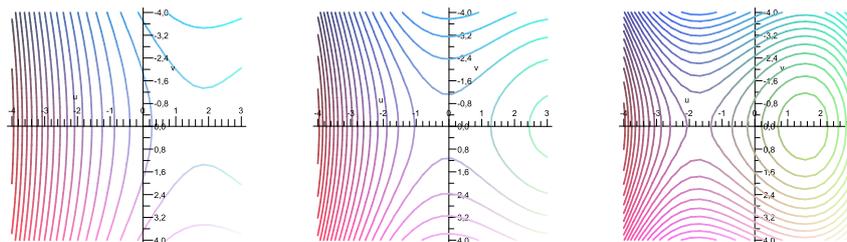


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (1.10) при различных значениях параметров.

Изменение значений параметров приводит к изменению графика (рис. (1)) и интегральных кривых (рис. (2)), вплоть до слияния (на фазовом портрете рис. (2)) локального минимума с седлом и их исчезновения (после перехода вектора параметров λ, \mathcal{R}, c через каустику функции $\frac{1}{2}(v^2 + \lambda u^2) + \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{3}u^3 - cu$).

«Управляя» параметрами $\lambda, \tilde{\mathcal{R}}, c, d$, можно получить изображения всевозможных геометрических форм интегральных кривых и их расположений относительно системы координат u, v ($v := u'$) на фазовой плоскости. Рассматривая пересечения интегральными кривыми прямой $u = 0$, можно получить представление о тех фрагментах интегральных кривых, которые дают решение краевой задачи (1.10) – (1.11). Приближенные аналитические формулы для этих фрагментов можно получить, применив специальные вычислительные методы (например, методы использованные в [9], [10], [11], [18]).

1.3. Случай нулевого значения числа Рейнольдса

Рассмотрим задачу (1.10) – (1.11) при $\tilde{\mathcal{R}} = 0$:

$$u'' + \lambda u = c, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \int_0^1 u \, d\theta = 1. \quad (1.14)$$

Решения задачи (1.14) являются критическими точками квадратичного функционала

$$\int_0^1 \frac{1}{2} ((u')^2 - \lambda u^2) \, d\theta \quad (1.15)$$

на гиперплоскости

$$\mathcal{M} = \{u \in H^1[0, 1] : \int_0^1 u \, d\theta = 1\} \quad (1.16)$$

в тройке $E = F = H = H^1[0, 1]$ (см. [11]).

Теорема 1. Совокупность экстремалей сужения функционала (1.15) на гиперплоскость (1.16) есть объединение следующих серий векторов (при соответствующих значениях параметра λ):

$$s_{0,k} = \frac{\pi k}{2} \sin(\pi k \theta), \quad \lambda = \lambda_{0,k} := (\pi k)^2; \quad (\mathcal{S}_0)$$

$$s_{\varepsilon,k} = a(\varepsilon) \sigma_{\varepsilon}(\theta), \quad \sigma_{\varepsilon}(\theta) := \sin(\varepsilon + (\pi k - 2\varepsilon)\theta) - \sin(\varepsilon), \quad (\mathcal{S}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,k} := (\pi k - 2\varepsilon)^2; \quad k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$a(\varepsilon)$ – величина, обратная к среднему значению функции $\sigma_{\varepsilon}(\theta)$;

$$s_{\varepsilon,2m} = \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\sin(2\pi m \theta - \varepsilon) + \sin(\varepsilon)) =$$

$$= \frac{1}{\sin(\varepsilon)} (\cos(\varepsilon) \sin(2\pi m \theta) + \sin(\varepsilon)(1 - \cos(2\pi m \theta))), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (\mathcal{SC}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \lambda_{\varepsilon,2m} := (2\pi m)^2, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$f_{0,j} = 1 - \cos(2j\pi\theta), \quad \lambda = \mu_{0,j} := (2j\pi)^2; \quad (\mathcal{C}_0)$$

$$f_{\varepsilon,j} = b(\varepsilon) \rho_{\varepsilon}(\theta), \quad \rho_{\varepsilon}(\theta) = \cos(\varepsilon + 2(j\pi - \varepsilon)\theta) - \cos(\varepsilon), \quad (\mathcal{C}_{\varepsilon})$$

$$\lambda = \mu_{\varepsilon,j} := 4(j\pi - \varepsilon)^2, \quad j = 1, 2, \dots;$$

$b(\varepsilon)$ – величина, обратная к среднему значению функции $\rho_{\varepsilon}(\theta)$.

Доказательство проводится на основе общей формулы решений линейного неоднородного уравнения (1.14) с последующим подбором констант, соответствующих второму и третьему соотношениям в (1.14).

1.4. Случай конечного значения числа Рейнольдса

При малых значениях числа Рейнольдса экстремали функционала (1.13), суженного на гиперплоскость (1.16), можно вычислять как ветви экстремалей, зависящих от числа Рейнольдса, — посредством теории возмущений, основанной на непосредственном применении теоремы о неявной функции. При «конечных» значениях числа Рейнольдса возникает необходимость применения более мощных средств нелинейного анализа [13], например, применения нелинейного метода Галеркина-Ритца по схеме Ляпунова-Шмидта.

Возможность нелокальной конечномерной редукции в краевой задаче (1.10) – (1.11) поясним сначала на простейшем примере: правая часть уравнения $x = \varepsilon(x - x^2 + 1)$ является сжимающим отображением $[-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ при достаточно малых значениях параметра ε . Зарождение свойства сжатия для отображения $x \rightarrow \varepsilon(x - x^2 + 1)$ отражено в следующих графиках.

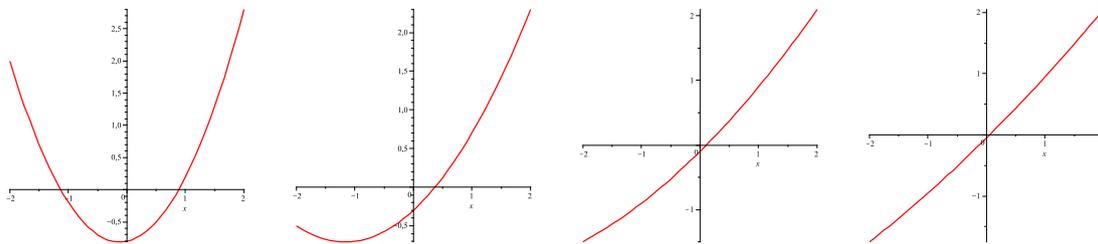


Рис. 3. Графики функции $f(x) = x - \varepsilon(x - x^2 + 1)$ при $\varepsilon = 0.8, 0.3, 0.1, 0.05$.

Аналогичный эффект сжимаемости имеет место и в случае общего операторного уравнения

$$x = \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c), \quad x \in F \tag{1.17}$$

в банаховом пространстве F , если норма $\|\mathcal{B}\|_F$ достаточно мала (здесь $g(x, x)$ — непрерывный квадратичный оператор $F \rightarrow F$, \mathcal{B}, \mathcal{C} — линейные непрерывные операторы $F \rightarrow F$, $c \in F$).

Свойство сжимаемости оператора $K(x) := \mathcal{B}(g(x, x) + \mathcal{C}x + c)$ позволяет разыскивать приближенные решения уравнения (1.17) посредством стандартных итераций $x_n = K(x_{n-1})$ [13].

Для осуществления нелокальной редукции Ляпунова-Шмидта в краевой задаче (1.10) – (1.11) запишем ее в виде операторного уравнения

$$f(w) := \mathcal{A}w - \lambda w + g(w, w) + c = 0, \quad w \in E, \tag{1.18}$$

где $E = C^2[0, 1] \cap \{w(0) = w(1) = 0\}$, $\mathcal{A} = -d^2/d\theta^2$, $g(w, w) := \tilde{\mathcal{R}}w^2$, $c = \text{const}$. Оператор f действует из E в $F = C[0, 1]$. Линейный оператор \mathcal{A} является положительным и диагонализуемым:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^2 \xi_k e_k, \tag{1.19}$$

$e_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \sin(\pi k \theta)$ — собственная функция оператора \mathcal{A} , отвечающая собственному значению $(\pi k)^2$. Заметим, что собственные функции e_k образуют ортонормированную систему в $H^1[0, 1]$.

Перепишем уравнение (1.18) в виде

$$w - \mathcal{A}^{-1}(g(w, w) + \lambda w - c), \quad w \in H^1[0, 1]. \tag{1.20}$$

Используя процедуру ортогонального разложения пространства в сумму подпространств, разобьем уравнение (1.20) в систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} u - \mathcal{A}_1^{-1}(g_1(w, w)) + \lambda u - a &= 0, \\ v - \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(w, w)) + \lambda v - b &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

где $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}|_N$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}|_{N^\perp \cap E}$, $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, $w = u + v$, $u = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $v = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k$,

$a = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, $b = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k$, $\alpha_k = \langle c, e_k \rangle_1$. Второе уравнение системы (1.21) рассмотрим

в пространстве функций $N^\perp \cap H^1[0, 1]$. Из спектральных свойств оператора A (см. (1.19)) вытекает, что при достаточно больших размерностях редукции n норма оператора $\mathcal{A}_2^{-1} : N^\perp \cap H^1 \rightarrow N^\perp \cap H^1$ становится малой и поэтому оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(u+v, u+v)) + \lambda v - b$ переводит некоторый шар $\|v\|_{H^1} \leq L$ (в $N^\perp \cap H^1$) в себя, являясь при этом сжимающим. То есть мы оказываемся в условиях второго замечания. Это означает, что решения второго уравнения системы (1.21) можно получать в аналитической форме

$$v = \Phi(u), \quad (1.22)$$

с любой наперед заданной точностью, посредством итераций $v_n = K(v_{n-1})$. Подставив выражение (1.22) в первое уравнение системы (1.21), получим так называемое ключевое уравнение

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0 \quad (1.23)$$

на конечномерном пространстве N . Все аналитические и топологические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями [11]. Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется формулой

$$w = u + \Phi(u).$$

Уравнение (1.23) является потенциальным с потенциалом (ключевой функцией)

$$W(u) := V(u + \Phi(u)), \quad u \in N.$$

Поиск и анализ экстремалей функционала V можно осуществлять посредством изучения экстремалей ключевой функции W . Вычисление функции W и анализ ее критических точек можно осуществлять по технологиям, изложенным в [11], [13] – [18].

Заключительный этап предложенной здесь вычислительной схемы состоит в отборе тех решений задачи (1.10) – (1.11), для которых выполняется ограничение (1.12).

1.5. Области редуцируемости модельного уравнения

Посредством оценок размера образа отображения K и его константы Липшица можно точно указать область, на которой допускается конечномерная редукция уравнения $w = K(w)$.

Предварительно заметим, что имеют место следующие неравенства:

$$\|w\|_F \leq \|w\|_1 \quad \forall w \in H^1, \quad \|\mathcal{A}_2^{-1}(v)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \|v\|_1 \quad \forall v \in N^\perp \cap H^1 \quad (1.24)$$

(см. (1.19)). Следовательно,

$$\|g(w, w)\|_1 = 2 \sqrt{\int_0^1 (ww')^2 d\theta} \leq 2\|w\|_F \|w\|_1 \leq 2\|w\|_1^2. \quad (1.25)$$

Пусть $w \in T_L = \{w \in H^1[0, 1] : \|w\|_1 \leq L\}$. Из оценки (1.25) получаем

$$\|K(v)\|_1 = \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda v + g_2(w, w) - b)\|_1 \leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta), \quad (1.26)$$

где $\beta = \|b\|_1$. Следовательно, если $\|K(v)\|_1 \leq L$, то оператор K переводит шар T_L в себя. Последнее утверждение справедливо в случае выполнения соотношения (см. (1.26))

$$\frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda L + 2L^2 + \beta) \leq L$$

или

$$L^2 - pL + q \leq 0, \quad (1.27)$$

где $p = \frac{\pi^2(n+1)^2 - \lambda}{2}$, $q = \frac{\beta}{2}$. Для обеспечения свойства сжимаемости оператора $K : T_L \rightarrow T_L$ обратимся к оценке нормы разности значений K в произвольной паре точек v_1, v_2 :

$$\begin{aligned} \|K(v_2) - K(v_1)\|_1 &= \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda(v_2 - v_1) + \mathcal{R}((u + v_2)^2 - (u + v_1)^2))\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda + 4L) \|v_2 - v_1\|_1. \end{aligned}$$

Получаем то, что для обеспечения свойства сжимаемости K достаточно потребовать выполнения условия

$$\gamma := \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} (\lambda + 4L) < 1, \quad (1.28)$$

или, что одно и то же, условия

$$\lambda + 4L < \pi^2(n+1)^2. \quad (1.29)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение:

Теорема 2. При выполнении условий (1.27), (1.29) и при $\|u\|_1 \leq L$ оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(\mathcal{R}(u + v)^2 + \lambda v - b)$ переводит шар $T_L = \{v \in H^1[0, 1] : \|v\|_1 \leq L\}$ в себя и является сжимающим отображением $T_L \rightarrow T_L$.

Замечание 4. Константа γ (см. (1.28)) позволяет оценивать скорость сходимости итераций $v_{m+1}(u) = K(v_m(u))$ к редуцирующему отображению $\Phi(u)$:

$$\|v_m(u) - \Phi(u)\|_1 \leq \gamma^m \frac{\mathcal{D}}{1 - \gamma}, \quad \mathcal{D} = \frac{\mathcal{R}L + \beta}{\pi^2(n+1)^2}.$$

1.6. Примеры эпюр скоростей стационарных течений, соответствующих экстремалам функционала действия

Ниже приведены примеры приближенно вычисленных эпюр скоростей на окружности $r = 1$ для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$.

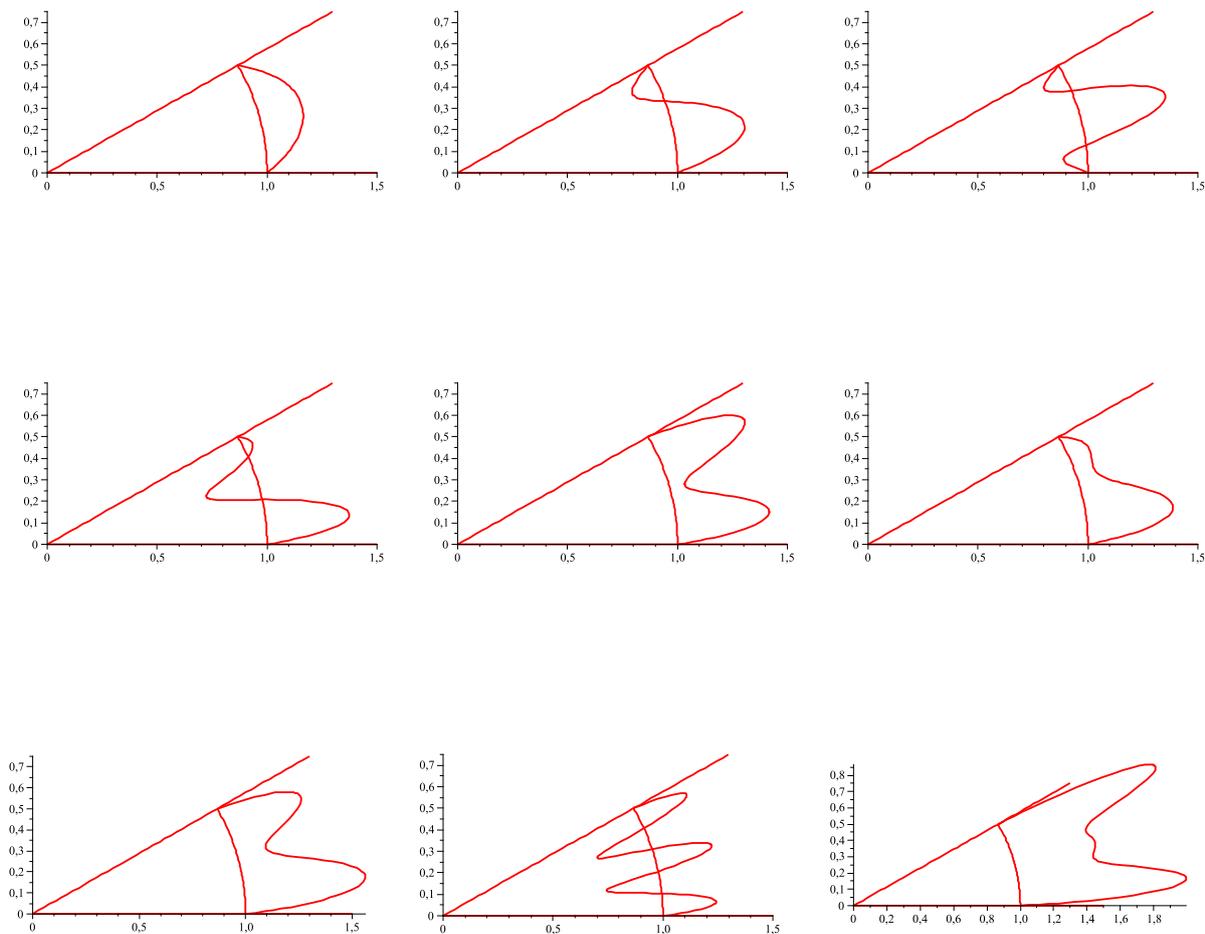


Рис. 4. Эпюры скоростей для течений, близких к n -модовым, $n \leq 5$.

Замечание 5. Вслед за вычислением поля скоростей можно вычислить давление непосредственно на основе (1.2) (уравнения Навье-Стокса в полярных координатах).

2. СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА И РЕДУКЦИЯ ЛЯПУНОВА-ШМИДТА

2.1. Переход к системе гидродинамического типа

Рассмотрим далее обобщенное двумерное уравнение Навье-Стокса

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \nu \Delta(v) + \mu v + c \operatorname{grad}(P) + \lambda B \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (2.1)$$

которое кроме традиционного вектора силы вязкости содержит вектор дополнительных сил торможения μv и нелинейной упругой вязкости $\lambda B \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$ [4]. Положим, для определенности,

$$B \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) := \operatorname{div}(dD) = D \operatorname{grad}(d) + \frac{1}{2} d \Delta(v).$$

Такая модель используется при изучении течений жидкости, имеющей усложненную реологию [4].

Для простоты, ограничимся рассмотрением решений, периодических по x_1, x_2 (случай уравнения на плоском торе). Будем разыскивать решение в виде $v := \text{sgrad}(\psi) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^\top$, $\psi(x_1, x_2) = bx_1 - ax_2 + \varphi(x_1, x_2)$, φ – вихревая функция,

$$\varphi(x_1 + X_1, x_2) \equiv \varphi(x_1, x_2 + X_2) \equiv \varphi(x_1, x_2), \quad a = p \frac{2\pi}{X_1}, \quad b = q \frac{2\pi}{X_2},$$

$p, q \in \mathbb{N}$ (течения, близкие к ламинарному: $v = (a, b)^\top$).

После применения ротора к обеим частям уравнения (2.1) получим скалярное уравнение в виде обобщенного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi), \psi] + \nu \Delta^2(\psi) + \mu \Delta(\psi) + \tilde{B} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right). \quad (2.2)$$

Будем далее рассматривать движения жидкости, близкие к ламинарному течению со скоростью $v_0 = (p, q)^\top$, $p, q \in \mathbb{N}$. Функцию ψ будем искать в виде $\psi(x_1, x_2) = qx_1 - px_2 + \varphi(x_1, x_2)$. Учитывая, что $\tilde{B}(\psi) = \tilde{B}(\varphi)$ и

$$\begin{aligned} [\Delta(\psi), \psi] &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta(\psi) \frac{\psi}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta(\psi) \frac{\psi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta(\varphi) \left(-p + \frac{\varphi}{\partial x_2} \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta(\varphi) \left(q + \frac{\varphi}{\partial x_1} \right) = [\Delta(\varphi), \varphi] - \left(p \frac{\partial}{\partial x_1} + q \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Delta(\varphi), \end{aligned}$$

произведя затем замену уравнения (2.2) на

$$\begin{aligned} \Delta(\dot{\varphi}) &= [\Delta(\varphi), \varphi] - \left(a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Delta(\varphi) + \nu \Delta^2(\varphi) + \mu \Delta(\varphi) + \\ &+ \tilde{B} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right), \end{aligned}$$

получим (введя переменную $u = \Delta(\varphi)$) уравнение в следующем виде:

$$\dot{u} = [u, \Delta^{-1}(u)] - \left(a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u + \nu \Delta(u) + \mu u + \mathcal{B}^{(3)}(u, u, u). \quad (2.3)$$

2.2. Случай 2π -периодичности вихревой функции по каждой переменной

Рассмотрим далее галеркинскую аппроксимацию решений уравнения (2.3) по базису из начальных функций оператора Лапласа: $c_1 = 2 \cos(x_1)$, $c_2 = 2 \cos(x_2)$, $c_3 = 2 \cos(x_1 + x_2)$, $s_1 = 2 \sin(x_1)$, $s_2 = 2 \sin(x_2)$, $s_3 = 2 \sin(x_1 + x_2)$ при $X_1 = X_2 = 2\pi$. Так как $\Delta c_1 = -c_1$, $\Delta c_2 = -c_2$, $\Delta s_1 = -s_1$, $\Delta s_2 = -s_2$, $\Delta c_3 = -2c_3$, $\Delta s_3 = -2s_3$, то линейная часть уравнения (2.3) примет следующий вид:

$$A(u) = \nu \Delta^2(u) + \mu(\Delta u) - \left(q \frac{\partial}{\partial x_2} + p \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Delta u.$$

Подставив $u = \sum_{j=1}^n (\xi_j c_j + \eta_j s_j)$, получим $A(u) = (\mu - \nu)\xi_1 c_1 + (\mu - \nu)\xi_2 c_2 + (\mu - \nu)\eta_1 c_1 s_1 + (\mu - \nu)\eta_1 s_2 + q\xi_2 s_2 - q\eta_2 c_2 + p\xi_1 s_1 - p\eta_1 c_1 + 2(\mu - 2\nu)\xi_3 c_3 + 2(\mu - 2\nu)\eta_3 s_3 + 2q\xi_3 s_3 + 2p\xi_3 s_3 - 2q\eta_3 c_3 - 2p\eta_3 c_3$.

После проецирования уравнения на линейную оболочку N (базисной системы) получим

$$A(u) = \begin{pmatrix} \mu - \nu & -p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & \mu - \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \nu & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & \mu - \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - 2\nu & -(p+q) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q & \mu - 2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \xi_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Для вычисления квадратичной части необходимо подставить в слагаемые $[\Delta(\psi), \psi]$ сумму $qx - py + \sum_{j=1}^3 \xi_j c_j + \eta_j s_j$ вместо ψ , а результат подстановки спроецировать на N . Это нетрудно сделать, если предварительно вычислить $[\Delta c_j, s_k]$.

Для $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in N$: введем обозначение $[\varphi_1, \varphi_2]_0 := P_r \cdot [\varphi_1, \varphi_2]$, где P_r — ортопроектор на N (галеркинская аппроксимация якобиана). Вычисление $[\cdot, \cdot]_0$ проще провести, если учесть, что

$$\begin{aligned} [c_k, c_k]_0 &= [c_k, s_k]_0 = [s_k, s_k]_0 = 0, \\ [c_1, c_2]_0 &= -c_3, & [c_2, c_3]_0 &= -c_1, & [c_3, c_1]_0 &= -c_2, \\ [s_1, s_2]_0 &= c_3, & [c_2, c_3]_0 &= -c_1, & [c_3, c_1]_0 &= -c_2, \\ [c_1, s_2]_0 &= -s_3, & [c_2, s_3]_0 &= -s_1, & [c_3, s_1]_0 &= -s_2, \\ [s_1, c_2]_0 &= -s_3, & [s_2, c_3]_0 &= -s_1, & [s_3, c_1]_0 &= -s_2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что для квадратичной части имеет место представление

$$B(w, w) = \left(-w_3 w_5 - w_4 w_6, -w_4 w_5 - w_3 w_6, w_1 w_5 + w_2 w_6, w_2 w_5 + w_1 w_6, 0, 0 \right)^T.$$

В итоге получим (обобщенную) конечномерную систему ОДУ гидродинамического типа

$$\dot{w} = A(w) + B(w, w) + C(w, w, w), \quad w \in \mathbb{R}^6,$$

в которой матрица A кососимметрична (см. (2.4)), M — симметричная матрица, а $C(w, w, w)$ — некоторое кубическое отображение.

Таким образом, имеет место следующая теорема (см. [12]).

Теорема 3. *Галеркинская аппроксимация уравнения (2.3) по базису*

$$c_1 = 2 \cos(x), \quad c_2 = 2 \cos(y), \quad c_3 = 2 \cos(x + y),$$

$$s_1 = 2 \sin(x), \quad s_2 = 2 \sin(y), \quad s_3 = 2 \sin(x + y),$$

приводит к динамической системе

$$\dot{w} = Aw + B(w, w) + C(w, w, w), \quad w \in \mathbb{R}^6, \quad (2.6)$$

в которой

$$A = \begin{pmatrix} -\delta_1 & p + \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p - \varepsilon_1 & -\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_1 & q + \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q - \varepsilon_2 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_2 & p + q + O(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(p + q) + O(\varepsilon) & -\delta_2 \end{pmatrix},$$

$$B(w, w) = \frac{1}{2}t(-w_3w_5 - w_4w_6, -w_3w_6 - w_4w_5, w_1w_5 + w_2w_6, w_1w_6 + w_2w_5, 0, 0)^T,$$

$$\delta_1 = \nu - \mu + O(\varepsilon), \quad \delta_2 = 2\nu - \mu + O(\varepsilon).$$

Коэффициенты кубической части $C(w, w, w)$ допускают явное представление через константы, входящие в уравнение (2.3).

Здесь налицо двукратное вырождение в нуле с резонансом $p : q$ без выполнения условия трансверсальности (вследствие одномерности параметра). Выполнения условия трансверсальности можно добиться за счет «шевеления» периодов по t, x_1, x_2 .

2.3. Вариация периодов, переход к ключевому уравнению

При вариации периодов $X_1 = 2\pi(1 + \varepsilon_2)$, $X_2 = 2\pi(1 + \varepsilon_3)$, вызванной заменой переменных

$$x_1 \longrightarrow (1 + \varepsilon_2)x_1, \quad x_2 \longrightarrow (1 + \varepsilon_3)x_2,$$

получим вместо (2.3) уравнение

$$\dot{\omega} = [\omega, \tilde{\Delta}^{-1}(\omega)] - \left(\tilde{a} \frac{\partial}{\partial x_1} + \tilde{b} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \omega + \nu \tilde{\Delta}(\omega) + \mu \omega + \tilde{B}^{(3)}(\omega, \omega, \omega), \quad (2.7)$$

$$\tilde{\Delta} = (1 + \varepsilon_2)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (1 + \varepsilon_3)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\tilde{a} = (1 + \varepsilon_2) a, \quad \tilde{b} = (1 + \varepsilon_3) b.$$

Запишем уравнение (2.7) в операторном виде

$$f(w, \delta, \varepsilon) = 0, \quad (2.8)$$

где $f(w, \delta, \varepsilon) = \dot{w} - \tilde{A}(\delta, \varepsilon)w - \tilde{B}(w, w) - \tilde{C}(w, w, w)$. $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ — соответствующие возмущения операторов A, B, C . Как обычно, анализ этого уравнения начинается с рассмотрения линеаризованного уравнения $\frac{\partial f}{\partial w}(0, \delta, \varepsilon)h = 0$, рассмотренного при значениях параметров δ, ε , близких к нулю. При этом $N := Ker \frac{\partial f}{\partial z}(0) = Span_{\mathbb{C}}\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, где

$$g_1 = (\cos(pt), -\sin(pt), 0, 0, 0, 0)^T, \quad g_2 = (\sin(pt), \cos(pt), 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$g_3 = (0, 0, \cos(qt), -\sin(qt), 0, 0)^T, \quad g_4 = (0, 0, \sin(qt), \cos(qt), 0, 0)^T.$$

Пространство $E := \Pi_{2\pi}^1$ разложим в прямую сумму подпространства N и ортогонального к нему (в метрике $L_2[0, 2\pi]$) дополнения $R_* := N^\perp \cap E$. Таким образом,

$$x = u + v, \quad u \in N, \quad v \perp N, \quad u = \xi_1 \cdot g_1 + \xi_2 \cdot g_2 + \xi_3 \cdot g_3 + \xi_4 \cdot g_4. \quad (2.9)$$

В соответствии со схемой Ляпунова-Шмидта [13], уравнение (2.8) разбивается в систему

$$\left. \begin{aligned} f^{(4)}(u + v, \delta, \varepsilon) &= 0, \\ f^{(\infty-4)}(u + v, \delta, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где

$$f^{(4)}(u + v, \delta, \varepsilon) = \sum_{i=1}^4 \langle f(u + v, \delta, \varepsilon), g_i \rangle \cdot g_i,$$

$$f^{(\infty-4)}(u + v, \delta, \varepsilon) = f(u + v, \delta, \varepsilon) - f^{(4)}(u + v, \delta, \varepsilon),$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x(t) y(t)) dt, \quad (x, y) = \sum_{i=1}^4 x_i(t) y_i(t).$$

Переменная v явно выражается, в силу второго уравнения системы (2.10), через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. На основе полученных ранее соотношений можно вычислить коэффициенты главной части ключевого уравнения и, соответственно, приведенного уравнения.

В случае резонанса 1:2, сделав замену $\xi_1 = r_1 \cos \alpha, \xi_2 = r_1 \sin \alpha, \xi_3 = r_2 \cos \beta, \xi_4 = r_2 \sin \beta$, получим асимптотическое представление решения ключевого уравнения в виде

$$= \left(r_1 \cos(\alpha + \tilde{a}t), r_1 \sin(\alpha + \tilde{a}t), r_2 \cos(\beta + \tilde{b}t), r_2 \sin(\beta + \tilde{b}t), 0, 0 \right)^\top + o(r_1, r_2),$$

где r_1, α и r_2, β — полярные координаты в плоскостях переменных ξ_1, ξ_2 и ξ_3, ξ_4 , $r_1 = O(\varepsilon), r_2 = O(\varepsilon)$ — амплитудные переменные.

Соответственно, получим представление

$$\psi(x_1, x_2, t) = \tilde{b}x_1 - \tilde{a}x_2 + \varphi(x_1, x_2, t), \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, t) &= r_1(\cos(\alpha + \tilde{a}t) \cos(x_1) + \sin(\alpha + \tilde{a}t) \sin(x_1)) + \\ &+ r_2(\cos(\beta + \tilde{b}t) \cos(x_2) + \sin(\beta + \tilde{b}t) \sin(x_2)) + o(r_1, r_2) = \\ &= r_1 \cos(x_1 - \alpha - \tilde{a}t) + r_2 \cos(x_2 - \beta - \tilde{b}t) + o(r_1, r_2) = \\ &= r_1 \cos(\tilde{x}_1) + r_2 \cos(\tilde{x}_2) + o(r_1, r_2) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \end{aligned}$$

— после замены $x_1 - \alpha - \tilde{a}t = \tilde{x}_1, x_2 - \beta - \tilde{b}t = \tilde{x}_2$.

Зарождающиеся волновые движения жидкости определяется двумерной гамильтоновой системой

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

или системой уравнений

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}_2}, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}_1}. \quad (2.12)$$

Замечание 6. *Переход к системе (2.12) можно осуществить и без промежуточного перехода к системе (2.8), для чего достаточно представить решение уравнения (2.2) в форме бегущей волны (2.11). Это дает возможность сведения поиска решения уравнения (2.2) к отысканию решения стационарного уравнения Навье-Стокса, для которого можно непосредственно применить схему Ляпунова-Шмидта [13], [14].*

2.4. Компьютерные изображения линий уровня вихревой функции и траекторий частиц жидкости

Ниже приведены компьютерные изображения линий уровня вихревой функции и траекторий частиц жидкости, полученные на основе изложенной выше вычислительной схемы.

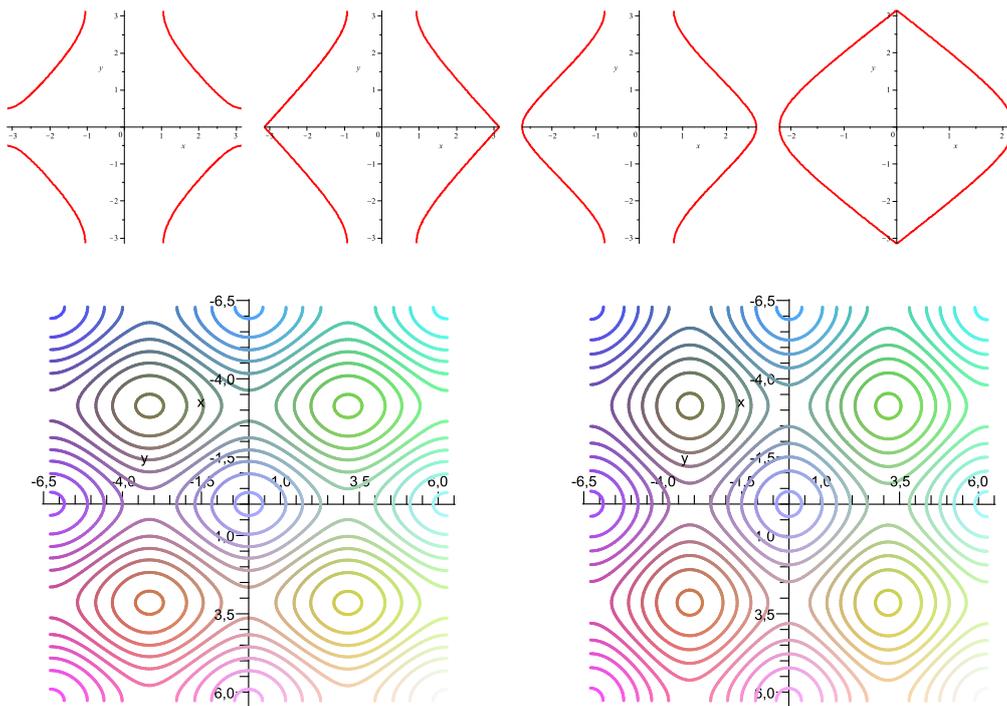


Рис. 5. Фрагменты линий уровня вихревой функции.

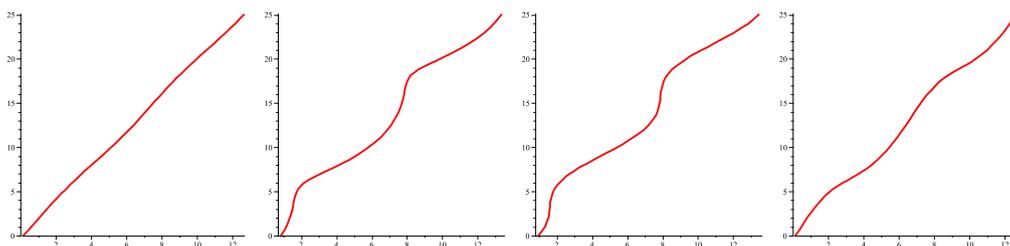


Рис. 6. Траектории частиц жидкости.

Рисунки получены для случая малых волн вблизи ламинарного течения $x_1 = t$, $x_2 = 2t$. Амплитуды циклических переменных выбраны с изменением масштабов (в целях усиления эффекта визуализации).

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ГИДРОЦИКЛОНЕ

3.1. Трехмерное уравнение Навье-Стокса

Как известно, основным модельным соотношением в гидродинамике является трехмерное уравнение Навье-Стокса [2], [3]:

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \nu \Delta(v) + \text{grad}(p). \tag{3.1}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

— лапласиан, ν — параметр вязкости, $\frac{\partial v}{\partial x}$ — матрица Якоби вектора скорости $v = v(x_1, x_2, x_3, t)$ ($v = (v_1, v_2, v_3)^\top$) по компонентам точки $x = (x_1, x_2, x_3)$, $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ — давление. Уравнение (3.1) будем рассматривать при условии несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div}(v) = 0.$$

Искомое поле векторов скорости $v(x_1, x_2, x_3, t)$ рассматривается, как правило, на некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей и «какими-нибудь» стандартными краевыми условиями.

В случае осесимметричных областей удобно описывать течения жидкости посредством уравнения Навье-Стокса в цилиндрической системе координат r, φ, z [2], [5]:

$$\left. \begin{aligned} (U \cdot \nabla)u - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2}\right), \\ (U \cdot \nabla)v + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2}\right), \\ (U \cdot \nabla)w &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где

$$(U \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— «цилиндрический» лапласиан.

К уравнениям Навье-Стокса добавляется «цилиндрическое» уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

u, v, w — радиальная, тангенциальная и осевая компоненты вектора скорости.

3.2. Редукция к линейному уравнению

Среди многочисленных применений гидроциклонов выделяется их использование в составе нефтяных насосных агрегатов в качестве фильтров для очистки перекачиваемой нефти от механических примесей. Сама перекачиваемая нефть применяется при этом и как рабочая жидкость для обслуживания (охлаждения, промывки, смазки) торцовых уплотнений насосного агрегата.

При перекачке нефти используются также блоки — для получения требуемого фракционного состава рудной суспензии методом центробежного разделения (в гидроциклонах).

Для нужд разработки программного обеспечения оптимизации проточной части насосов, для повышения уровня к.п.д. насосов на всех этапах эксплуатации нефтепроводов, и для оптимизации насоса в целом необходима информация о строении потоков жидкости в камерах гидроциклонов. Такую информацию можно добывать, используя редуцированные уравнения гидродинамики.

В качестве примера рассмотрим простейший гидроциклон с цилиндрической камерой. Будем отталкиваться при этом от публикации [1].

Течения стационарно вращающейся вязкой жидкости в цилиндрическом гидроциклоне удобно описывать уравнениями Навье-Стокса в цилиндрической системе координат r, φ, z [5]:

$$\left. \begin{aligned} (U \cdot \nabla)u - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2}\right), \\ (U \cdot \nabla)v + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \left(\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2}\right), \\ (U \cdot \nabla)w &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

где

$$(U \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(«цилиндрический» лапласиан), p — давление. Предполагается, что вязкость равна единице, $|z| \leq l$ и $\delta \leq r \leq \alpha(z)$, $\delta > 0$ ($\alpha(z)$ — гладкая выпуклая функция). К уравнениям Навье-Стокса добавляется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.5)$$

Если, по аналогии с течением Куэтта, положить $v \equiv \frac{B}{r}$, B — константа, то второе уравнение системы (3.4) удовлетворится автоматически. Оставшиеся компоненты (по радиальному и осевому направлениям) будут связаны системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\Delta - \frac{1}{r^2})u + \frac{B^2}{r^3} - u \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial r} \\ \Delta w - u \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.6)$$

Предположив, что

$$u = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r}, \quad (3.7)$$

где H — некоторая достаточно гладкая функция (гамильтониан), мы автоматически удовлетворим уравнение неразрывности (последнее уравнение системы (3.6)). После исключения из системы (3.2) давления получим определяющее соотношение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} w - \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right) + \\ + \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Так как $\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) H$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} = \\ = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{u}{r} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) H \end{aligned}$$

то приходим к следующему (основному) уравнению относительно H :

$$A^2(H) + [A(H), H] - \frac{1}{r} \{A(H), H\} = 0. \quad (3.9)$$

Здесь $A = \Delta - \frac{1}{r^2}$, а $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор: $[H, Q] := \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial r}$ (скобка Пуассона), $\{H, Q\} := \frac{\partial H}{\partial z} Q + H \frac{\partial Q}{\partial z}$. Соотношение (3.9) выделяет класс стационарных течений, определяемых линейным уравнением $A(H) = 0$. Таким образом, мы осуществили редуцирующий переход к линейному дифференциальному уравнению.

Итак, установлена следующая теорема

Теорема 4. *Функциональная подстановка (3.7):*

$$u = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r},$$

где H — достаточно гладкая функция (гамильтониан), приводит, после исключения из системы (3.2) давления, к следующему определяющему соотношению для H :

$$A^2(H) + [A(H), H] - \frac{1}{r} \{A(H), H\} = 0.$$

3.3. Учет краевых условий

Краевые условия можно записать в операторном виде $G(H)|_{\Omega} = g$, где

$$G(H) = \left\{ -\frac{\partial H}{\partial z}(r_0, z), -\frac{\partial H}{\partial z}(r_1, z), \frac{\widehat{\partial} H}{\partial r}(r, 0), \frac{\widehat{\partial} H}{\partial r}(r, l) \right\},$$

$$g = \left\{ 0, \xi \mathcal{X}_{l-h_1, l}(z), -\eta \mathcal{X}_{r_0, r_0+h_0}(r), \eta \mathcal{X}_{r_0, r_0+h_0}(r) \right\}.$$

Здесь $\widehat{\frac{\partial}{\partial r}} := \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$, $\mathcal{X}_{a,b}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$. На первом этапе осуществляется подбор функции H_0 так, что $G(H_0)|_{\Omega} = g$. Функцию H_0 задается в виде произведения $H_0(r, z) = \widehat{\alpha}(r)\widehat{\beta}(z)$, в котором $\widehat{\alpha}(r)$ и $\widehat{\beta}(z)$ — первообразные (в цилиндрических координатах) к некоторым заранее заданным функциям $\alpha(r) = \sum_k a_k e_k(r)$ и $\beta(z) = \sum_j b_j f_j(z)$.

То есть $\widehat{\frac{\partial}{\partial r}} \widehat{\alpha} = \alpha$, $\frac{\partial}{\partial z} \widehat{\beta} = \beta$. Здесь $e_k(r) = J_1(m_k r)$, $f_j(z) = \sin\left(\frac{\pi j}{l} z\right)$, a_k, b_j — коэффициенты Фурье (J_1 — функция Бесселя первого рода), m_1, m_2, \dots — последовательность (возрастающая) положительных нулей функции Бесселя.

Рассмотрим уравнение

$$A(X) := \Delta X - \frac{H}{r^2} = V \tag{3.10}$$

в области Ω , где $V = A(H_0)$, $X = H_0 - H$, при однородном краевом условии $G(X)|_{\Omega} = 0$. Если $V(r, z) = \sum_{k,j} V_{k,j} g_k(r) f_j(z)$ — разложение Фурье, где f_j определено выше, а $g_k(r) = \sin\left(\frac{\pi(r-r_0)}{(r_1-r_0)} z\right)$, то решение уравнения (3.10) при указанных выше краевых условиях можно представить в виде

$$X(r, z) = \sum_{k,j} X_{k,j} g_k(r) f_j(z), \quad k, j \leq K.$$

Элементы $X_{k,j}$ являются коэффициентами ритцевской аппроксимации экстремали функционала $\frac{1}{2}(A(X), X) - (V, X)$ ((\cdot, \cdot) — стандартное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ (в цилиндрических координатах): $(V, X) := \int_0^l \int_{r_0}^{r_1} r \operatorname{tr}(V^T X) dr dz$.)

3.4. Вычисление правой части и приближенное решение неоднородного уравнения

Решение основного уравнения удобнее разыскивать в виде $H = H_0 - X$, где H_0 «устраняет неоднородность» краевых условий, но вводит неоднородность в линейное уравнение: $A(X) = V$. Здесь $V := A(H_0) - A(H) = A(H_0)$. Например, правую часть V можно вычислить «прямой подстановкой в оператор» аргумента $H_0 = \widehat{\alpha}(r)\widehat{\beta}(z)$, где

$$\widehat{\alpha}(r) = \begin{cases} \eta \frac{r^2 - r_0^2}{2r}, & r_0 \leq r \leq r_0 + h_0, \\ \eta \frac{2r_0 h_0 + h_0^2}{2r}, & r_0 + h_0 \leq r \leq r_1, \end{cases}$$

$$\widehat{\beta}(z) = \begin{cases} -\xi h_1/2, & 0 \leq z \leq l - h_1, \\ -\xi h_1/2 + \xi(z - (l - h_1)), & l - h_1 \leq z \leq l. \end{cases}$$

В итоге получим $V = V_1 + V_2 = \sum_{i=1}^2 L_i(r) M_i(z) = \widehat{\alpha}(r) \xi \delta(z - l + h_1) - \eta \delta(r - r_0) \widehat{\beta}(z)$. Решение неоднородной задачи можно представить в виде ряда по собственным функциям оператора $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (или, что эквивалентно, по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (по переменной z), вытекающей из однородного уравнения $A(X) = V$ после разделения переменных). Собственными функциями оператора $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (при нулевых граничных условиях) будут $Z_n(z) = \sin(\sqrt{\lambda_n} z) = \sin\left(\frac{\pi k}{l} z\right)$.

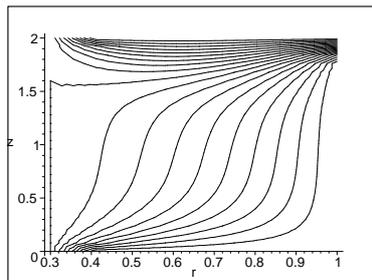


Рис. 7. Сечения поверхностей тока в камере гидроциклона, построенные²⁾ посредством описанного выше алгоритма.

Замечание 7. Описанная выше схема приближенного вычисления траекторий частиц жидкости (в гидроциклоне) и линий уровня вихревой функции допускает распространение (с соответствующими модификациями) на случай нецилиндрической камеры гидроциклона.

Замечание 8. Важнейшим моментом в представленной здесь вычислительной схеме является построение собственных функций и собственных векторов оператора Лапласа на 2-мерной области — осевом сечении камеры гидроциклона (при краевых условиях Дирихле).

Аналогичную спектральную задачу необходимо решать и в случаях гидроциклонов, имеющих более сложную геометрию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Борзаков А.Ю. Стационарные осесимметричные течения в цилиндрическом гидроциклоне / А.Ю. Борзаков, С.Г. Валухов, В.А. Костин, В.П. Орлов, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж: ВорГУ, 2001. — С. 19–24.
- [2] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика, ч. 2. — М.: Физматгиз, 1963. — 728 с.
- [3] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир. 1981. — 408 с.
- [4] Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. — М.: Высш. шк. 1983. — 399 с.
- [5] Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. — Л.: Гидрометеиздат, 1988. — 414 с.
- [6] Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. — М.: МЦНМО, 2007. — 392 с.
- [7] Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid / G.B. Jeffery // Phil. Mag. — 1915. — Ser. 6, V. 29, № 172. — P. 455–465.
- [8] Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten / G. Hamel // Jahresber. Detsch. Math. — Ver. 1917, Bd 25. — S. 34–60.
- [9] Акуленко Л. Д. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре / Л. Д. Акуленко, С. А. Кумакшев // Изв. РАН. МЖГ. — 2005. — № 3. — С. 25–36.
- [10] Акуленко Л.Д. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре / Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев // ПММ. — 2008. — Т. 72, вып. 3. — С. 431–441.
- [11] Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

²⁾ Рисунок изготовлен А.Ю. Борзаковым

[12] Карпова А.П. Моделирование течений жидкости посредством редуцированных гидродинамических уравнений / А.П. Карпова, Ю.И. Сапронов // Насосы. Турбины. Системы. — Воронеж: ООО ИПЦ «Научная книга». — 2012. — № 4(5). — С. 47–53.

[13] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

[14] Карпова А.П. Зарождение волновых движений несжимаемой вязкой жидкости на двумерном торе / А.П. Карпова // Препринт НИИМ ВорГУ № 28. Декабрь 2008. Воронеж: ВорГУ. — 10 с.

[15] Борзаков А.Ю. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей / А.Ю. Борзаков, А.А. Лемешко, Ю.И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2003. — № 2. — С. 100–112.

[16] Борзаков А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга / А.Ю. Борзаков // Сборник трудов матем. ф-та ВГУ. — 2005. — Вып. 9. — С. 9–22.

[17] Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 418, № 4. — С. 295–299.

[18] Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений / Т.И. Костина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 181–186.

REFERENCES

[1] Borzakov A.Yu., Valiuhov S.G, Kostin V.A., Orlov V.P., Sapronov Yu. I. Stationary axisymmetric flows in a cylinder hydrocyclone. [Borzakov A.Yu., Valyuhov S.G., Kostin V.A., Orlov V.P., Sapronov Yu.I. Stacionarnye osesimmetrichnye techeniya v cilindricheskom gidrociklone]. *Matematicheskie modeli i operatornye uravneniya — Mathematical models and operational equations*, Voronezh: Voronezh State University, 2001, pp. 19–24.

[2] Kochin N.E., Kibel' I.A., Rose N.V. Theoretical hydrodynamics, Vol. 2. [Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. Teoreticheskaya gidrodinamika, ch. 2]. Moscow: Physmathgis, 1963, 728 p.

[3] Temam R. Navier-Stokes' Equations. Theory and numerical analysis. [Temam R. Uravneniya Nav'e-Stoksa. Teoriya i chislennyj analiz]. Moscow: Mir, 1981, 408 p.

[4] Zhhermen P. The course of continuum mechanics. General Theory. [Zhhermen P. Kurs mexaniki sploshnyx sred. Obshhaya teoriya]. Moscow: Vysshaia shkola, 1983, 399 p.

[5] Obukhov A.M. Turbulence and dynamics of atmosphere. [Obuxov A.M. Turbulentnost' i dinamika atmosfery]. Leningrad: Hydrometeoisdat, 1988, 414 p.

[6] Arnold V.I., Khesin B.A. Topological methods in hydrodynamics. [Arnol'd V.I., Xesin B.A. Topologicheskie metody v gidrodinamike]. Moscow: MTsNMO, 2007, 392 p.

[7] Jeffery G.B. The two-dimensional steady notion of a viskous fluid. *Phil. Mag*, 1915, Ser. 6, Vol. 29, no. 172, pp. 455–465.

[8] Hamel G. Spiral movements of viscous liquids. *The Annual of The German Mathematical Society*. 1917, Vol. 25, pp. 34–60.

[9] Akulenko L.D., Kumakshev S.A. Bifurcations of the basic stationary flow of viscous liquid in a plane diffuser. [Akulenko L. D. Bifurkaciya osnovnogo stacionarnogo techeniya vyazkoj zhidkosti v ploskom diffuzore]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mexanika zhidkosti i gaza — A Journal of Russian Academy of Sciences. Fluid Dynamics*, 2005, issue 3, pp. 25–36.

[10] Akulenko L.D., Kumakshev S.A. Bifurcations of multimode flows of viscous liquid in a plane diffuser. [Akulenko L.D. Bifurkaciya mnogomodovyx techenij vyazkoj zhidkosti v ploskom diffuzore]. *Prikladnaya matematika i mexanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, Vol. 72, issue. 3, pp. 431–441.

[11] Darinskii B.M., Sapronov Yu. I., Tsarev S.L. Bifurcations of extremals of

Fredholm functional. [Darinskij B.M., Sapronov Yu.I., Carev S.L. Bifurkacii e'kstremalej fredgol'movyx funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Journal of Mathematical Sciences*, 2004, Vol. 12, pp. 3–140.

[12] Karpova A.P., Sapronov Yu. I. Modelling of flows of liquid via reduced hydrodynamical equations. [Karpova A.P., Sapronov Yu.I. Modelirovanie techenij zhidkosti posredstvom reducirovannykh gidrodinamicheskix uravnenij]. *Nasosy. Turbiny. Sistemy — Pumps. Turbines. Systems. Voronezh: OOO IPTs «Nauchnaja kniga»*, 2012, № 4(5), pp. 47–53.

[13] Krasnosel'skii M.A., Zabrejko P.P. Geometrical methods of nonlinear analysis. [Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P. Geometricheskie metody nelinejnogo analiza]. Moscow: Nauka, 1975, 512 p.

[14] Karpova A.P. The origin of movements of incompressible viscous liquid on a two-dimensional torus. [Karpova A.P. Zarozhdenie volnovyx dvizhenij neszhimaemoj vyazkoj zhidkosti na dvumernom tore]. *Preprint NIIM VorGU № 28. Dekabr' 2008. Voronezh: VorGU — Preprint Scientific Research Institute of Mathematics of the VSU № 28. December 2008. Voronezh: VSU*, 10 p.

[15] Borzakov A.Yu., Lemeshko A.A., Sapronov Yu. I. Nonlinear Ritz approximations and visualization of bifurcations of extremals. [Borzakov A.Yu., Lemeshko A.A., Sapronov Yu.I. Nelinejnye ritcevskie approksimacii i vizualizacii bifurkacij e'kstremalej]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2003, no. 2, pp. 100–112.

[16] Borzakov A.Yu. Application of methods of finite-dimensional reduction to global analysis of boundary value problems for the Duffing equation. [Borzakov A.Yu. Primenenie metodov konechnomernoj redukcii k global'nomu analizu kraevyx zadach na primere uravneniya Duffinga]. *Sbornik trudov matematicheskogo fakul'tata Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta — The collections of treatises of the Department of Mathematics of the Voronezh State University*, 2005, Vol. 9, pp. 9–22.

[17] Kostin D.V. About a scheme of analysis of two-mode flexures of a weakly heterogeneous resilient girder. [Kostin D.V. Ob odnoj sxeme analiza dvuxmodovyx progibov slabo neodnorodnoj uprugoj balki]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, Vol. 418, Ser. 4, pp. 295–299.

[18] Kostina T.I. Nonlocal calculation of key functions in the problem of periodic solutions of the variational equations. [Kostina T.I. Nelokal'noe vychislenie klyuchevyx funkcij v zadache o periodicheskix resheniyax variacionnyx uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, Vol. 1, pp. 181–186.

Сапронов Юрий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: yusapr@mail.ru

Sapronov Yu. I., doctor of physico-mathematical Sciences, Professor of Department of mathematical modeling, mathematics faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: yusapr@mail.ru

Карпова А.П., кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: karpovaantonina@mail.ru

Karпова A.P., candidate of physico-mathematical Sciences, assistant of the Department of mathematical modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: karpovaantonina@mail.ru

Конев В.В., аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: victor.konev@mail.ru

Konev V.V., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: victor.konev@mail.ru

Коротких А.С., аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: korotkikh.andrey@gmail.com

Korotkikh A.S., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: korotkikh.andrey@gmail.com