УДК 532.543

ОБЩАЯ ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГИДРАВЛИКИ ДВУХМЕРНЫХ В ПЛАНЕ СТАЦИОНАРНЫХ БУРНЫХ ВОДНЫХ ПОТОКОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Н. Г. Папченко

Донской государственный аграрный университет

Поступила в редакцию 26.03.2014 г.

Аннотация: в работе была сформулирована общая технология решения практических задач гидравлики двухмерных плановых стационарных бурных водных потоков аналитическим методом с использованием плоскости годографа скорости. В частности она была опробована при решении задач радиального растекания потока и обтекания выпуклого угла бурным потоком, а также задача свободного растекания бурного потенциального потока. Решение задачи свободного растекания бурного потока важно в теории и практике мелиоративного, водного и дорожного хозяйства для разработки конструкции ГТС, в которых протекают потоки близкие к модели плановых, потенциальных потоков.
Ключевые слова: двухмерный в плане водный поток, плоскость годографа скорости.

THE GENERAL TECHNOLOGY OF SOLVING PRACTICAL PROBLEMS OF HYDRAULICS OF TWO-DIMENSIONAL IN TERMS OF STATIONARY TURBULENT WATER FLOWS ANALYTICAL METHOD USING THE HODOGRAPH PLANE SPEED

N. G. Papchenko

Abstract: the paper was formulated by the General technology of the decision of practical problems of hydraulics of two-dimensional planned stationary turbulent water flows analytical method using the hodograph plane speed. In particular, it was tested at solving problems of the radial spreading flow and flow of a convex angle rapid flow, as well as the task of the free rapid spreading of potential flow. The solution of the free flow of turbulent flow is important in the theory and practice of reclamation, water and road management for design of hydraulic structures, which flow streams close to the model, plan, potential flow.
Keywords: two-dimensional in terms of water flow, the hodograph plane speed.

Потоки близкие к двухмерным в плане встречаются за водопропускными трубами, малыми мостами. Для строительства ГТС и обеспечения требуемой надежности сооружений необходимы знания всего комплекса параметров потока. Для упрощенной модели поток зачастую можно считать потенциальным [1]. При расчетах параметров потенциального потока наряду с методом характеристик применяют аналитические методы с использованием плоскости годографа скорости [2]. В работах [3], [4] были решены задачи радиального растекания потока и обтекание выпуклого угла бурным потоком. Это позволило сформулировать общую технологию решения различных практических задач по плановому растеканию потоков.

Вначале подбираются приемлемые решения системы дифференциальных уравнений в плоскости годографа скорости для функции тока, исходя из физики процесса:

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} A_k \psi_k (\tau, \theta) \tag{1}$$

и линии тока

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} A_k \psi_k (\tau, \theta) = const.$$

К примеру для задачи радиального растекания потока известен вид функции тока и линии тока:

$$\psi = C_1 \theta, \quad \psi = C_1 \theta = const, \tag{2}$$

где C_1 — константа.

Для течения двухмерного в плане водного потока справедлива следующая система уравнений [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{h_0}{2H_0} \cdot \frac{3\tau - 1}{\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2h_0}{H_0} \cdot \frac{\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \end{cases}, \tag{3}$$

где φ, ψ — соответственно потенциальная функция и функция тока; θ — угол наклона вектора скорости жидкой частицы к оси Ox; $\tau = \frac{V^2}{2gH_0}$ — квадрат скоростного коэффициента λ, $\lambda = \frac{V}{\sqrt{2gH_0}}$ — скоростной коэффициент; g — ускорение свободного падения; V_0 — модуль вектора скорости потока на выходе из трубы; h_0 — глубина потока на выходе из трубы; H_0 — постоянная; $H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0$.

Затем определяется из системы (3) решение для потенциальной функции и эквипотенциали.

Так для радиального растекания выражение для потенциальной функции будет иметь вид:

$$\varphi = -\frac{C_1 h_0}{2H_0} \left[-\frac{2}{1-\tau} + \ln \frac{\tau}{1-\tau} \right], \tag{4}$$

где C_1 — константа.

А для эквипотенциали

$$\varphi = -\frac{C_1 h_0}{2H_0} \left[-\frac{2}{1-\tau} + \ln \frac{\tau}{1-\tau} \right] = const. \tag{5}$$

Для задач с твердыми боковыми стенками определяются постоянные A_k из граничных условий. Для задач с одной степенью свободы используется принцип оптимальности в природе и далее, исходя из этого принципа и граничных условий, определяются постоянные A_k.

Для определения параметров потока в точке пересечения заданной линии тока и заданной эквипотенциали решается система:

$$\begin{cases} \psi = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \psi_k (\tau, \theta) = C_1; \\ \varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} B_k \varphi_k (\tau, \theta) = C_2; \end{cases} \tag{6}$$

где C_1 — задается удельным расходом потока отнесенным заданной линией тока; C_2 — определяется назначением параметра τ в характерных точках (к примеру на оси симметрии потока).

Для перехода в физическую плоскость растекания потока воспользуемся формулой связи физической плоскости и плоскости годографа скорости [2]:

$$d\left(x+iy\right)=\frac{1}{V}e^{i\theta}\left(d\varphi+i\frac{h_0}{h}d\psi\right). \tag{7}$$

Так для радиального растекания из системы (6) непосредственным дифференцированием следует:

$$\begin{aligned} &d\psi=C_1 d\theta;\\ &d\varphi=-\tfrac{C_1 h_0}{2H_0}\left[\tfrac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2}\right]d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

Вдоль линии тока, полагая в (7) $\psi = const, d\psi = 0$, получим:

$$\begin{cases} dx=\frac{\cos\theta d\varphi}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}};\\ dy=\frac{\sin\theta d\varphi}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}}. \end{cases} \tag{9}$$

Для эквипотенциалей с учетом $d\varphi = 0$, следует:

$$\begin{cases} dx=-\frac{h_0}{H_0}\frac{\sin\theta d\psi}{\tau^{1/2}(1-\tau)\sqrt{2gH_0}};\\ dy=\frac{h_0}{H_0}\frac{\cos\theta d\psi}{\tau^{1/2}(1-\tau)\sqrt{2gH_0}}. \end{cases} \tag{10}$$

Подставляя выражение для $d\varphi$ в систему (9), а выражение для $d\psi$ в систему (10), получим:

$$\begin{cases} dx=-\frac{C_1 h_0}{2H_0}\cdot\frac{(1-3\tau)\cos\theta d\tau}{\tau^{3/2}(1-\tau)^2\sqrt{2gH_0}};\\ dy=-\frac{C_1 h_0}{H_0}\cdot\frac{(1-3\tau)\sin\theta d\varphi}{\tau^{3/2}(1-\tau)^2\sqrt{2gH_0}}. \end{cases} \tag{11}$$

Проинтегрировав систему (11) и упростив, получим выражения для линии тока:

$$\begin{aligned} x&=\tfrac{C_1 h_0\cos\theta}{H_0\sqrt{2gH_0}}\cdot\tfrac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)};\\ y&=\tfrac{C_1 h_0\sin\theta}{H_0\sqrt{2gH_0}}\cdot\tfrac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Возводя обе части каждого уравнения системы (12) в квадрат и складывая почленно, получим:

$$x^2+y^2=C_1^2\frac{h_0^2}{H_0^2}\cdot\frac{1}{\tau\left(1-\tau\right)^2}\cdot\frac{1}{2gH_0}. \tag{13}$$

Полагая $\tau = const$, получим, что эквипотенциали представляют собой концентрические окружности при любом фиксированном τ.

Учитывая, что на радиусе r_0, $\tau = \tau_0$ из выражения (13) следует:

$$C_1^2=\frac{r_0^2 H_0^2\tau_0\left(1-\tau_0\right)^2 2gH_0}{h_0^2}. \tag{14}$$

Из системы (6) определяются параметры τ, θ и далее

$$\begin{aligned} h&=H_0\left(1-\tau\right);\\ V&=\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}. \end{aligned} \tag{15}$$

Решение задачи в физической плоскости.

Координаты точки пересечения заданной линии тока и заданной эквипотенциали определяются из дифференциальной связи между планом течения потока и плоскостью годографа скорости (7).

По данной технологии была решена также задача свободного растекания бурного потенциального потока. Автором разработан пакет программ, результаты счета подтверждают более высокую адекватность полученных модельных параметров в сравнении с экспериментальными и натурными данными и с результатами раннее известных методов без использования плоскости годографа скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Емцев Б.Т. Двухмерные бурные потоки. — М.: Энергия, 1967. — 212 с.

[2] Коханенко В.Н. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков: монография. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. — 168 с.

[3] Коханенко В.Н. Вывод основной системы уравнений движения двухмерного потока в плоскости годографа скорости и поиск ее частных решений: монография / В.Н. Коханенко // М.: Деп. в ВИНИТИ 10.12.96 № 3584. — В 96., 1996. — 98 с.

[4] Мицик М.Ф. Модель двухмерного бурного планового потока для случая радиального растекания / М.Ф. Мицик // Мелиорация антропогенных ландшафтов: межвуз. сб. науч. тр. – Т. 16: Проблемы гидрологии, гидротехники и орошаемого земледелия. — Новочеркасск, 2002. — С. 11–14.

[5] Звягин А.В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А.В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.

[6] Орлов В.П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 190–197.

[7] Орлов В.П. Об одной априорной оценке решений неоднородной начально-краевой задачи динамики вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 171–178.

[8] Свиридова Е.А. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости с переменной стационарной плотностью / Е.А. Свиридова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 133–140.

REFERENCES

[1] Emtsev B.T. Two-Dimensional turbulent flows. [Emcev B.T. Dvuxmernye burnye potoki]. Moscow: Energiya, 1967, 212 p.

[2] Kokhanenko V.N. Simulation of one-dimensional and two-dimensional open water streams. [Koxanenko V.N. Modelirovanie odnomernyx i dvuxmernyx otkrytyx vodnyx potokov]. Rostov n/D: publishing house of the Southern Federal University, 2007, 168 p.

[3] Kokhanenko V.N. The main conclusion of the system of equations of motion of two-dimensional flow in the plane of the hodograph speed and search for her private decisions. [Koxanenko V.N. Vyvod osnovnoj sistemy uravnenij dvizheniya dvuxmernogo potoka v ploskosti godografa skorosti i poisk ee chastnyx reshenij: monografiya]. Moscow: Dec. in VINITI 10.12.96 № 3584–96., 1996, 98 p.

[4] Mytsyk M.F. Model of two-dimensional turbulent planned flow for the case of radial flow / M.F. Mytsyk. Reclamation of anthropogenic landscapes: meiwes. collected scientific articles. Vol. 16: Problems hydrology, hydraulic engineering and irrigated agriculture. [Micik M.F. Model' dvuxmernogo burnogo planovogo potoka dlya sluchaya radial'nogo rastekaniya. Melioraciya antropogennyx landshaftov. T. 16: Problemy gidrologii, gidrotexniki i oroshaemogo zemledeliya]. Novocherkassk, 2002, pp. 11–14.

[5] Zviagin A. V. Investigation of the solvability of a stationary non-Newtonian fluid motion model in an unbounded domain. [Zvyagin A.V. Issledovanie razreshimosti odnoj stacionarnoj

modeli dvizheniya nen'yutonovoj zhidkosti v neogranichennoj oblasti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 118–121.

[6] Orlov V.P. Strong a priori estimates of solutions of an inhomogeneous boundary-value problem of one model of a viscoelastic medium. [Orlov V.P. Sil'nye apriornye ocenki reshenij neodnorodnoj nachal'no-kraevoj zadachi odnoj modeli vyazkouprugoj sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 190–197.

[7] Orlov V.P. About a priori estimate for solutions of the inhomogeneous initial-boundary value problem of the dynamics of a viscoelastic medium. [Orlov V.P. Ob odnoj apriornoj ocenke reshenij neodnorodnoj nachal'no-kraevoj zadachi dinamiki vyazkouprugoj sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 171–178.

[8] Sviridova E. A. Small oscillations of viscous compressible fluid with variable stationary density. [Sviridova E.A. Malye kolebaniya vyazkoj szhimaemoj zhidkosti s peremennoj stacionarnoj plotnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 133–140.

Папченко Наталья Геннадиевна, старший преподаватель кафедры Механики, оборудования и процессов пищевых производств Донского государственного аграрного университета, поселок Персиановский, Октябрьский район, Ростовская область, Российская Федерация
E-mail: igorpapchenko@yandex.ru
Тел.: 8(919)8851838

Papchenko Natalia Gennadievna, senior lecturer of the Department of Mechanics, equipment and processes of food production of the don state agrarian University, the village Persianovka, Oktyabrsky district, Rostov region, Russian Federation
E-mail: igorpapchenko@yandex.ru
Tel.: 8(919)8851838