УДК 517.977

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СИНГУЛЯРНОЙ СТРУНЫ*

М. Б. Зверева, Ф. О. Найдюк, Ж. О. Залукаева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 04.10.2013 г.

Аннотация: изучению задач граничного управления посвящено много работ. Особенно можно выделить публикации В.А. Ильина и его учеников. Основной целью исследований является получение условий, при которых процесс колебаний распределенной системы может быть переведен из начального состояния в наперед заданное финальное. При этом не просто обосновывается существование управления, а предъявляется его явная формула.

В настоящей работе рассматривается модель колебаний сложносочлененной системы, состоящей из двух кусков струн, соединенных между собой с помощью пружины. Такого рода задача возникает при моделировании процессов, часть которых скрыта от наблюдения. Изучена задача выбора граничных режимов, позволяющая перевести систему из начального состояния в заданное финальное состояние. Получен аналог формула Даламбера.

Ключевые слова: колебания струны, разрывные решения, формула Даламбера.

MODELING VIBRATIONS OF SINGULAR STRING

M. B. Zvereva, F. O. Naidjuk, Zh. O. Zalukaeva

Abstract: the study of the problems of boundary control a lot of works are devoted. Especially it is possible to allocate the publications of V.A. Il'in and his disciples. The main purpose of the research is to obtain conditions under which the process of oscillations of a distributed system can be transferred from the initial state in predetermined final. In these papers the existence of the control is proved, and its explicit formula is presented.

In this paper we consider the oscillations model of discontinuous system, consisting of two pieces of strings, connected by a spring. Such a problem occurs when modeling processes, part of which is hidden from the observation. The problem of choice of a boundary conditions, allowing put the system from the initial state to the desired final the condition is studied. Analogue D'Alambert's formula is obtained.

Keywords: vibration of the string, discontinuous solutions, D'Alambert's formula.

Изучению задач управления распределенными системами и их оптимизации посвящены работы многих математиков. Особенно можно выделить публикации В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, Л. Н. Знаменской, А. И. Егорова, А. В. Боровских, В. В. Провоторова [1]–[6]. Основной целью исследований является получение условий, при которых процесс колебаний распределенной системы под воздействием некоторого граничного локального или нелокального управления может быть переведен из одного состояния, заданного начальными смещениями и скоростями системы, в наперед заданное финальное.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ВГУ (№ ПСР-МГ/04-13), грантов РФФИ № 12-01-00392, РФФИ 14-01-00867

В настоящее время в теории граничной управляемости появились новые направления, открытые работами В.А. Ильина – конструктивная управляемость, когда не просто обосновывается существование управления, а предъявляется его явная формула и относительная управляемость, когда полной управляемости нет, но она возникает при выполнении некоторых выписываемых явно соотношений между параметрами задачи.

В настоящей работе рассматривается задача граничного управления колебаниями разрывной струны для случая малого промежутка времени. Найден явный вид функций управления.

Пусть исследуемая модель представляет собой два куска струны единичной длины, натянутые вдоль отрезка $[-1,1]$ и прикрепленные в точке 0 к вертикальной спице, по которой они могут перемещаться (без учета трения). При этом предполагается, что куски дополнительно соединены между собой пружиной жесткости γ. Обозначим через $u(x,t)$ отклонение такой системы в точке x от положения равновесия в момент времени t. Заметим, что в точке 0 функция $u(x,t)$ не определена. Определены и имеют физический смысл лишь предельные значения $u(-0,t)$, $u(+0,t)$ — отклонения соответствующих концов кусков струн. Колебания такой системы могут быть заданы с помощью волновых уравнений $u''_{xx} = u''_{tt}$, где $0 < x < 1$, $-1 < x < 0$.

Рассмотрим задачу выбора режимов $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, позволяющих перевести данную систему из начального состояния $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = \psi(x)$ в финальное состояние

$$u(x,T) = \varphi^*(x), \quad u'_t(x,T) = \psi^*(x) \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \tag{1}$$

за малый промежуток времени $0 < T < 1$.

Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0,t) = \gamma \Delta u(0,t), \\ u'_x(-0,t) = \gamma \Delta u(0,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x,0) = \psi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u(-1,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{2}$$

где скачок $\Delta u(0,t) = \dfrac{u(+0,t) - u(-0,t)}{2}$.

Найдем функции $\mu_i(t)$, позволяющие перевести механическую систему из заданного начального состояния в заданное финальное состояние, т.е. обеспечить выполнение условий (1).

Будем предполагать, что $\varphi^*, \varphi \in C^2[-1,0) \bigcup (0,1]$; $\psi^*, \psi \in C^1[-1,0) \bigcup (0,1]$; $\mu_i \in C^2[0,T]$; $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$; $\varphi'(+0) = \gamma(\varphi(+0) - \varphi(-0))$; $\varphi'(-0) = \gamma(\varphi(+0) - \varphi(-0))$; $\varphi''(1) = \varphi''(-1) = 0$; $\psi(+0) = \psi(-0)$; $\psi'(+0) = -\psi'(-0)$;$\psi(1) = \psi(-1) = 0$.

Теорема 1.*Решение $u(x,t)$ задачи (2) может быть представлено в виде*

$$u(x,t) = \begin{cases} \underline{\mu_1}(t + x - 1) + \dfrac{\Phi^+(x-t) + \Phi^+(x+t)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \Psi^+(s)ds, \quad x > 0 \\ \underline{\mu_2}(t - x - 1) + \dfrac{\Phi^-(x-t) + \Phi^-(x+t)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \Psi^-(s)ds, \quad x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$\underline{\mu_i}(t) = \begin{cases} \mu_i(t), t \geqslant 0 \\ 0, t < 0; \end{cases}$$

$$\Phi^+(x) = \begin{cases} \varphi(x), 0 < x \leqslant 1 \\ \varphi(+0), x = 0 \\ -\varphi(2-x), 1 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{\varphi(-x)+\varphi(x)}{2} + e^{2\gamma x}\left(\dfrac{\varphi(+0)-\varphi(-0)}{2} - \int\limits_x^0 g(-s)e^{-2\gamma s}ds\right), -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{-\varphi'(t)-\varphi'(-t)}{2} + \gamma(\varphi(t)-\varphi(-t)) + 2\gamma\int\limits_0^t (\psi(\xi)-\psi(-\xi))d\xi;$$

$$\Psi^+(x) = \begin{cases} \psi(x), 0 < x \leqslant 1 \\ \psi(+0), x = 0 \\ \psi(-x), -1 \leqslant x < 0 \\ -\psi(2-x), 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$$

$$\Phi^-(x) = \begin{cases} \varphi(x), -1 \leqslant x < 0 \\ \varphi(-0), x = 0 \\ -\varphi(-2-x), -2 \leqslant x < -1 \\ \dfrac{\varphi(-x)+\varphi(x)}{2} + e^{-2\gamma x}\left(\dfrac{\varphi(-0)-\varphi(+0)}{2} + \int\limits_0^x g(s)e^{2\gamma s}ds\right), 0 < x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\Psi^-(x) = \begin{cases} \psi(x), -1 \leqslant x < 0 \\ \psi(-0), x = 0 \\ \psi(-x), 0 < x \leqslant 1 \\ -\psi(-2-x), -2 \leqslant x < -1. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость теоремы доказывается путем подстановки формулы (3) в задачу (2). Представление (3) было получено из суммы решений задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0,t) = \gamma\Delta u(0,t), \\ u'_x(-0,t) = \gamma\Delta u(0,t), \\ u(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u(-1,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0,t) = \gamma\Delta u(0,t), \\ u'_x(-0,t) = \gamma\Delta u(0,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x,0) = \psi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u(-1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(1,t) = 0. \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{5}$$

Решение задачи (5) было найдено путем сложения на соответствующих промежутках решений задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1 \\ u(1,t) = 0, \\ u'_x(+0,t) = 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(-x) + \psi(x)}{2} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0 \\ u(-1,t) = 0, \\ u'_x(-0,t) = 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(-x) + \psi(x)}{2} \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1 \\ u(1,t) = 0, \\ u'_x(+0,t) = 2\gamma u(+0,t), \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(x) - \psi(-x)}{2} \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0 \\ u(-1,t) = 0, \\ u'_x(-0,t) = -2\gamma u(-0,t), \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(x) - \psi(-x)}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Единственность решения задачи (5) была доказана в [7]. Решение задач (6), (7) можно выписать с помощью формулы Даламбера [8]. Решение задач (8), (9) может быть получено с помощью аналога формулы Даламбера [9].

Найдем теперь функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ такие, чтобы выполнялись условия (1). Обозначим через $h(x,t)$ решение задачи (4), $v(x,t)$ — решение задачи (5). Как было уже замечено, решение $u(x,t)$ исходной задачи (2) представимо в виде $u(x,t) = h(x,t) + v(x,t)$, причем,

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\Phi^+(x-t) + \Phi^+(x+t)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \Psi^+(s)ds, \quad x > 0 \\ \dfrac{\Phi^-(x-t) + \Phi^-(x+t)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \Psi^-(s)ds, \quad x < 0. \end{cases}$$

Тогда $h(x,T) = \varphi^*(x) - v(x,T) = \widetilde{\varphi}(x)$, $h'_t(x,T) = \psi^*(x) - v_t(x,T) = \widetilde{\psi}(x)$. Рассмотрим случай $x > 0$. Тогда

$$\underline{\mu_1}(T + x - 1) = \widetilde{\varphi}(x),$$

$$\underline{\mu_1'}(T+x-1)=\widetilde{\psi}(x).$$

Значит,

$$\widetilde{\varphi}(t)-\widetilde{\varphi}(t_0)-(\widehat{\widetilde{\psi}}(t)-\widehat{\widetilde{\psi}}(t_0))\equiv 0,$$

где $\widehat{\widetilde{\psi}}(t)$—какая-то первообразная для $\widetilde{\psi}(t)$, $t_0\in(0,1]$. Выберем первообразную так, чтобы

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(t_0)-\widetilde{\varphi}(t_0)=0. \tag{10}$$

Тогда получим равенство

$$\widetilde{\varphi}(t)-\widehat{\widetilde{\psi}}(t)=0,$$

справедливое для всех $t\in(0,1]$. С другой стороны,

$$2\underline{\mu_1'}(T+x-1)=\widetilde{\varphi}'(x)+\widetilde{\psi}(x).$$

Значит, при $0<x\leqslant 1-T$ получим, что

$$\widetilde{\varphi}'(x)+\widetilde{\psi}(x)\equiv 0.$$

Зафиксируем любое $t_0\in(0,1-T]$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}(t)-\widetilde{\varphi}(t_0)+\widehat{\widetilde{\psi}}(t)-\widehat{\widetilde{\psi}}(t_0)\equiv 0,$$

где $\widehat{\widetilde{\psi}}(t)$—какая-то первообразная для $\widetilde{\psi}(t)$, $t_0\in(0,1-T]$. Выберем ее так, чтобы

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(t_0)+\widetilde{\varphi}(t_0)=0. \tag{11}$$

Тогда для всех $0<t\leqslant 1-T$ получим, что

$$\widetilde{\varphi}(t)+\widehat{\widetilde{\psi}}(t)=0.$$

Так как $\widetilde{\varphi}(x)=\underline{\mu_1}(T+x-1)$, то $\widetilde{\varphi}(x)\equiv 0$ при $x\leqslant 1-T$. Следовательно, если $t_0\in(0,1-T]$, то $\widetilde{\varphi}(t_0)=0$. Таким образом, для $t_0\in(0,1-T]$ равенства (10), (11) эквивалентны. Получаем, что

$$\widetilde{\varphi}(t)-\widehat{\widetilde{\psi}}(t)=0,\quad t\in(0,1] \tag{12}$$

$$\widetilde{\varphi}(t)+\widehat{\widetilde{\psi}}(t)=0,\quad t\in(0,1-T]. \tag{13}$$

Первообразная $\widehat{\widetilde{\psi}}(t)$ для функции $\widetilde{\psi}(t)$ выбирается так, чтобы $\widehat{\widetilde{\psi}}(t_0)+\widetilde{\varphi}(t_0)=0$, где $t_0\in(0,1-T]$. Вернувшись к исходным обозначениям, перепишем (11), (12), (13) как

$$\varphi^*(t)-v(t,T)-\widehat{\psi}^*(t)+\widehat{v}(t,T)=0,\quad t\in(0,1], \tag{14}$$

$$\varphi^*(t)-v(t,T)+\widehat{\psi}^*(t)-\widehat{v}(t,T)=0,\quad t\in(0,1-T], \tag{15}$$

$$\varphi^*(t_0)-v(t_0,T)+\widehat{\psi}^*(t_0)-\widehat{v}(t_0,T)=0,\quad t_0\in(0,1-T]. \tag{16}$$

Здесь

$$\widehat{v}(x,t)=\frac{\Phi^+(x+t)-\Phi^+(x-t)}{2}+\frac{1}{2}(\widehat{\Psi^+}(x+t)+\widehat{\Psi^+}(x-t)),$$

где $\widehat{\Psi^+}(t)$ — какая-то первообразная для $\Psi^+(t)$. С учетом формулы (3), (14), (15), (16) можем переписать в виде

$$\varphi^*(t)-\widehat{\psi}^*(t)-\Phi^+(t-T)+\widehat{\Psi^+}(t-T)=0,\quad t\in(0,1], \tag{17}$$

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \Phi^+(t+T) - \widehat{\Psi^+}(t+T) = 0, \quad t \in (0, 1-T], \tag{18}$$

где первообразные $\widehat{\Psi^+}(t)$, $\widehat{\psi}^*(t)$ выбираются так, чтобы

$$\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) - \Phi^+(t_0+T) - \widehat{\Psi^+}(t_0+T) = 0, \quad t_0 \in (0, 1-T]. \tag{19}$$

Равенство (17) распадается на два. Если $T \leqslant t \leqslant 1$, то оно принимает вид

$$\varphi^*(t) - \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t-T) + \widehat{\psi}(t-T) = 0.$$

Если же $0 < t < T$, получаем выражение

$$\varphi^*(t) - \widehat{\psi}^*(t) -$$

$$-\left(\frac{\varphi(T-t)+\varphi(t-T)}{2} + e^{2\gamma(t-T)}\left(\frac{\varphi(+0)-\varphi(-0)}{2} - \int\limits_{t-T}^{0} g(-s)e^{-2\gamma s}ds\right)\right) - \widehat{\psi}(T-t) = 0.$$

Рассмотрим равенство (18). При $0 < t \leqslant 1-T$ получим, что

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t+T) - \widehat{\psi}(t+T) = 0.$$

Из (19) следует, что первообразные $\widehat{\psi^*}$ и $\widehat{\psi}$ нужно выбирать так, чтобы

$$\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) - \varphi(t_0+T) - \widehat{\psi}(t_0+T) = 0,$$

где $t_0 \in (0, 1-T]$. Сложив равенства

$$\underline{\mu_1}'(T+x-1) = \widetilde{\varphi}'(x),$$

$$\underline{\mu_1'}(T+x-1) = \widetilde{\psi}(x),$$

получим, что

$$2\underline{\mu_1'}(T+x-1) = \varphi^{*'}(x) + \psi^*(x) - \Phi^{+'}(x+T) - \Psi^+(x+T),$$

откуда при $0 \leqslant t \leqslant T$ получим явное представление для граничного управления, имеющее вид

$$\mu_1(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(t+1-T) + \widehat{\psi^*}(t+1-T) + \varphi(1-t) - \widehat{\psi}(1-t)).$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим, что

$$\mu_2(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(T-1-t) - \widehat{\psi^*}(T-1-t) + \varphi(t-1) + \widehat{\psi}(t-1)).$$

При этом функции φ, ψ, φ^*, ψ^* должны быть связаны между собой равенствами:

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) -$$

$$-\left(\frac{\varphi(-T-t)+\varphi(t+T)}{2} + e^{-2\gamma(t+T)}\left(\frac{\varphi(-0)-\varphi(+0)}{2} + \int\limits_{0}^{T+t} g(s)e^{2\gamma s}ds\right)\right) + \widehat{\psi}(-T-t) = 0,$$

где $-T < t < 0$;

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t+T) - \widehat{\psi}(t+T) = 0,$$

где $-1 \leqslant t \leqslant -T$;

$$-\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) + \varphi(t-T) - \widehat{\psi}(t-T) = 0,$$

где $T-1 \leqslant t < 0$. Здесь первообразные выбираются так, чтобы

$$-\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) + \varphi(t_0-T) - \widehat{\psi}(t_0-T) = 0,$$

где $t_0 \in [T-1, 0)$.

Следует отметить, что моделирование колебаний систем с особенностями изучалось также в работах [10] – [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ильин В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев //Успехи математических наук .— М., 2005 .— Т. 60, вып. 6 (366). — С. 89-114.

[2] Избранные труды В.А. Ильина: В 2-х томах: Том 2. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 692 с.

[3] Егоров А. И. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Тр. ИММ УрО РАН, 2011. — Т. 17, вып. 1.— С. 85-92.

[4] Егоров А. И. Наблюдаемость колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами в точке соединения / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2011, № 1.— С. 142-146

[5] Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной / А.В. Боровских //Дифференциальные уравнения, 2007. — Т. 43, вып. 1.— С.64-89.

[6] Провоторов В.В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн / В.В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. — Санкт-Петербург, 2012. — Вып. 1. — С. 62–71.

[7] Найдюк Ф.О. О свойствах решений гиперболических уравнений с сингулярными коэффициентами : дис. . канд. физ.-мат. наук / Ф.О. Найдюк; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж, 2004 .— 133 с.

[8] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Издательство МГУ, 1999. — 797 с.

[9] Найдюк Ф.О. Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода / Ф.О. Найдюк, В.Л. Прядиев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 115–122.

[10] Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

[11] Лылов Е.В. Анализ математической модели, реализуемой в виде гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 230–235.

[12] Глотов Н.В. Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях трансмиссии типа «жидкого» трения / Н.В. Глотов, В.Л. Прядиев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 2. — С. 185–193.

[13] Копытин А.В. Об аналоге формулы Даламбера и спектре лапласиана на графе с соизмеримыми ребрами / А.В. Копытин, В.Л. Прядиев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2001. — № 1. — С. 106–109.

REFERENCES

[1] Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimization of boundary controls of string vibrations. [Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimizaciya granichnyx upravlenij kolebaniyami struny]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2005, Vol. 60, issue 6 (366), pp. 89–114.

[2] Selected works of V. A. Il'in: 2 volumes: V. 2. [Izbrannye trudy V.A. Il'ina: V 2-x tomax: Tom 2.]. Moscow: MAKS Press, 2008, 692 p.

[3] Egorov A. I., Znamenskaya L.N. On the controllability of elastic oscillations connected in series objects with distributed parameters. [Egorov A. I., Znamenskaya L. N. Ob upravlyaemosti uprugix kolebanij posledovatel'no soedinennyx ob"ektov s raspredelennymi parametrami]. *Trudy instituta matematiki i mexaniki UrO RAN — Supplement to Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 2011, Vol. 17, issue 1, pp. 85–92.

[4] Egorov A. I., Znamenskaya L. N. Observability of oscillations of a network of related objects the distributed and concentrated parameters in the connection point. [Egorov A. I., Znamenskaya L. N. Nablyudaemost' kolebanij seti iz svyazannyx ob"ektov s raspredelennymi i sosredotochennymi parametrami v tochke soedineniya]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2011, no. 1, pp. 142–146.

[5] Borovskikh A. V. Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. [Borovskix A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoj strunoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, Vol. 43, issue 1, pp. 64–89.

[6] Provotorov V. V. Construction of boundary controls in the problem of oscillation of a system of strings. [Provotorov V.V. Postroenie granichnyx upravlenij v zadache o gashenii kolebanij sistemy strun]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 1, pp. 62–71.

[7] Naydyuk F. O. On properties of solutions of hyperbolic equations with singular coefficients. [Najdyuk F.O. O svojstvax reshenij giperbolicheskix uravnenij s singulyarnymi koe'fficientami : dis. . kand. fiz.-mat. nauk]. Voronezh, 2004, 133 p.

[8] Tihonov A.N., Samarskij A.A. Equations of mathematical physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. *M.: Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta — Moscow: Moscow state University*, 1999, 797 p.

[9] Naydyuk F.O., Pryadiev V.L. Formula continue the initial data in the solution of the d'Alembert for the wave equation on a segment with a boundary condition of the third kind. [Najdyuk F.O., Pryadiev V.L. Formula prodolzheniya nachal'nyx dannyx v reshenii Dalambera dlya volnovogo uravneniya na otrezke s kraevym usloviem tret'ego roda]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 1, pp. 115–122.

[10] Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. On uniqueness of the solution of a mathematical model of forced vibrations of a string with singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 50–55.

[11] Lylov E.V. The analysis of mathematical model, implemented in the form of a hyperbolic equation with two independent variables. [Lylov E.V., Shabrov S.A. Analiz matematicheskoj modeli, realizuemoj v vide giperbolicheskogo uravneniya s dvumya nezavisimymi peremennymi].

Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2013, no. 2, pp. 230–235.

[12] Glotov N.V., Pryadiev V.L. Description of solutions of the wave equation on finite and bounded geometrical graph in terms of the transmission conditions of "liquid" friction type kind. [Glotov N.V., Pryadiev V.L. Opisanie reshenij volnovogo uravneniya na konechnom i ogranichennom geometricheskom grafe pri usloviyax transmissii tipa «zhidkogo» treniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 2, pp. 185–193.

[13] Kopytin A.V., Pryadiev V.L. About an analogue of the formulas of d'Alembert and the spectrum of the Laplacian on a graph with commensurable edges kind. [Kopytin A.V., Pryadiev V.L. Ob analoge formuly Dalambera i spektre laplasiana na grafe s soizmerimymi rebrami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2001, no. 1, pp. 106–109.

Зверева Маргарита Борисовна, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: (473)220–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: (473)220–86–90

Найдюк Филипп Олегович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: xakepph@yandex.ru
Тел.: (473)–220–86–90

Naidjuk Filipp Olegovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: xakepph@yandex.ru
Tel.: (473)–220–86–90

Залукаева Жанна Олеговна, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Тел.: (473)–220–86–90

Zalukaeva Zhanna Olegovna, graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Tel.: (473)–220–86–90