УДК 517.988

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ ДЛЯ ПСЕВДОАЦИКЛИЧЕСКИХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Джамхур Аль-Обаиди

Воронежский Государственный Педагогический Университет

Поступила в редакцию 26.02.2014 г.

Аннотация: в работе изучаются псевдоациклические мультиотображения, являющиеся композициями мультиотображений, ацикличность значений которых нарушается только на подмножествах конечной топологической размерности, и непрерывных отображений. Определяется топологическая степень для класса компактных псевдоациклических многозначных векторных полей в локально выпуклых пространствах относительно выпуклых замкнутых подмножеств, описываются ее основные свойства и даются приложения к теоремам о неподвижной точке и точке совпадения. Отметим, в частности, обобщения теорем о неподвижной точке Шефера и Роте, а также теоремы Пуанкаре о совпадении. Вычисляется степень нечетных и эквивариантных псевдоациклических мультиполей.

Ключевые слова: топологическая степень, многозначное отображение, неподвижная точка, точка совпадения, локально выпуклое пространство.

TOPOLOGICAL DEGREE FOR PSEUDO-ACYCLIC MULTIVALUED VECTOR FIELDS

J. M. Al-Obaidi

Abstract: in the present work, we study pseudo-acyclic multimaps which are the compositions of multimaps, whose acyclicity of values is violated only on sets of a finite topological dimension, and continuous maps. The topological degree for a class of compact pseudo-acyclic multivalued vector fields in locally convex spaces relative to convex closed sets is defined, its main properties are described and applications to fixed point and coincidence point theorems are given. Notice, in particular, generalizations of the Schaefer and Rothe fixed point theorems and the Poincare theorem on coincidence. The degree of odd and equivariant pseudo-acyclic multifields is evaluated.

Keywords: topological degree, multivalued map, fixed point, coincidence point, locally convex space.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование многозначных отображений с ацикличными значениями и их неподвижных точек было начато в работе С. Эйленберга и Д. Монтгомери ([1]). В дальнейшем для различных классов отображений такого типа были предложены конструкции топологической степени, получены приложения к теоремам о неподвижной точке и применения к теории дифференциальных уравнений и включений (см., напр., [2], [3], [4], [5] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе определяется топологическая степень для псевдоациклических многозначных векторных полей относительно выпуклого замкнутого множества в локально выпуклом пространстве. Описываются свойства введенной характеристики и даются приложения к теоремам о неподвижной точке и совпадении. Отметим, что понятие относительной топологической степени (вращения) было введено Ю.Г. Борисовичем ([6], [7]) и с тех пор развивалось и применялось во многих работах.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Предварительные сведения

Пусть H обозначает функтор когомологий Александера-Спеньера с целыми коэффициентами (см., напр., [8]).

Непустое пространство X называется 0-ацикличным, если $H^0(X)=\mathbb{Z}$, k-ацикличным ($k \geqslant 1$), если $H^k(X)=0$ и ацикличным, если оно k-ациклично для любого $k \geqslant 0$.

Пусть A – подпространство топологического пространства X.

(1.1) Определение. (см. [9]) Относительной размерностью A в X ($\dim_X A$) называется величина $\sup\limits_{C\subset A} \dim C$, где C – замкнуто в X и $\dim C$ обозначает топологическую размерность C.

По определению полагаем, что $\dim_X A = -\infty$ в том и только в том случае, если $A=\varnothing$.

Непрерывное отображение $f: Y \to X$ называется собственным, если прообраз $f^{-1}(A)$ любого компактного множества $A \subset X$ компактен.

В дальнейших конструкциях существенную роль будет играть следующее обобщение теоремы Виеториса-Бегла ([10], [11]), предложенное Е.Г. Скляренко ([12]):

(1.2) Теорема. Пусть X, Y – паракомпактные топологические пространства, $f: Y\to X$ собственное и сюръективное непрерывное отображение,

$$M_f^i = \{x|\ x\in X,\ f^{-1}(x) \text{ не является } i-\text{ацикличным}\}.$$

Пусть $n = 1+\max\limits_{i\geqslant 0}(\dim_X M_f^i + i)$. Тогда для любого $k>n$ индуцированный гомоморфизм $f^{*\,k}: H^k(X)\to H^k(Y)$ является изоморфизмом. ■

(1.3) Замечание. Если $M_f^i=\varnothing$ для любого $i\geqslant 0$, то $\dim_X M_f^i = -\infty$ и из теоремы 1.2 следует, что $f^*: H^k(X)\to H^k(Y)$ – изоморфизм для любого $k\geqslant 0$. Это составляет содержание классической теоремы Виеториеса-Бегла.

(1.4) Определение. Отображение $p: Y\to X$ называется n-виеторисовским, если выполнены следующие два условия:
(i) p собственное и сюръективное отображение,
(ii) $\dim_X M_p^i \leqslant n-2-i$ для любого $i\geqslant 0$.

Отметим, что из теоремы 1.2 вытекает, что если $p: Y\to X$ – n-виеторисовское отображение, то $p^{*\,k}: H^k(X)\to H^k(Y)$ – изоморфизм для всех $k\geqslant n$.

(1.5) Лемма. Если $p: Y\to X$ – n-виеторисовское отображение и $A\subset X$ – замкнуто, то отображение $\widetilde{p}: p^{-1}(A)\to A$ – n-виеторисовское отображение, где $\widetilde{p}$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{p}(y)=p(y), \forall y\in p^{-1}(A).■$$

(1.6) Определение. Пусть X – топологическое пространство, A и B – подпространства X. Обозначим $i: (A, A\cap B)\to (X,B)$ и $j: (B, A\cap B)\to (X,A)$ – отображения вложения. Тройка (X,A,B) называется k-триадой, $k\geqslant 0$, если
(i) $X=A\cup B$ и
(ii) $i^{*\,l}: H^l(X,B)\to H^l(A,A\cap B)$ и $j^{*\,l}: H^l(X,A)\to H^l(B,A\cap B)$ – изоморфизмы для любого $l\geqslant k+1$. Если (X,A,B) – 0-триада, то (X,A,B) называется просто триадой.

(1.7.) Теорема Майера-Виеториса. Пусть (X, A, B) – k-триада. Тогда следующая последовательность

$$H^k(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(X) \xrightarrow{\alpha} H^{k+1}(A) \oplus H^{k+1}(B) \xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta} H^{k+1}(A \cap B) \longrightarrow \quad ...,$$

в которой Δ, α, β – гомоморфизмы Майера-Виеториса, точна.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы Майера-Виеториса для триад (см. [13]). ■

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $E^{k+1} \subset E^{k+2}$ – подпространства E, $\dim E^{k+1} = k+1$, $\dim E^{k+2} = k+2$

Обозначим E_+^{k+2} и E_-^{k+2} – два замкнутых полупространства E^{k+2} такие, что $E^{k+1} = E_+^{k+2} \cap E_-^{k+2}$.

(1.8) Определение. Подмножество X локально выпуклого пространства E называется конечно ограниченным, если пересечение X с любым конечномерным подпространством E ограничено.

Пусть U – выпуклая конечно ограниченная открытая окрестность нуля в E. Обозначим через $S = \partial U$ границу U.

$$S_+^{k+1} = E_+^{k+2} \cap S,\ S_-^{k+1} = E_-^{k+2} \cap S, S^k = S \cap E^{k+1} = S_+^{k+1} \cap S_-^{k+1}.$$

Заметим, что $(S^{k+1}, S_+^{k+1}, S_-^{k+1})$ – триада и гомоморфизм Майера-Виеториеса. $\Delta : H^k(S^k) \to H^{k+1}(S^{k+1})$ – изоморфизм.

(1.9) Лемма. (см. [8]) Пусть $t, r : Y \to S^{k+1}$ – два непрерывных отображения такие, что:
(i) t – n-виеторисовское отображение, $n \leqslant k$;
(ii) $rt^{-1}(S_+^{k+1}) \subset S_+^{k+1}$ и
(iii) $rt^{-1}(S_-^{k+1}) \subset S_-^{k+1}$.

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H^k(S^k) & \xrightarrow{\Delta} & H^{k+1}(S^{k+1}) \\ {\scriptstyle (\bar{t}^{*\,k})^{-1}\bar{r}^{*\,k}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (t^{*\,k+1})^{-1}r^{*\,k+1}} \\ H^k(S^k) & \xrightarrow{\Delta} & H^{k+1}(S^{k+1}) \end{array}$$

где $\bar{t}, \bar{r} : t^{-1}(S^k) \to S^k$ – сужения отображений t и r соответственно.

Доказательство. Пусть $Y_+ = t^{-1}(S_+^{k+1})$, $Y_- = t^{-1}(S_-^{k+1})$. Тогда из леммы 1.5 и теоремы 1.2 заключаем, что тройка (Y, Y_+, Y_-) – k-триада, $Y_+ \cap Y_- = t^{-1}(S^k)$.

Из предположений (i) и (ii) получаем, что t, r – отображения из k-триады (Y, Y_+, Y_-) в k-триаду $(S^{k+1}, S_+^{k+1}, S_-^{k+1})$. Окончательно, из естественности теоремы Майера-Виеториеса для k-триад мы получаем требуемое утверждение. ■

Мы будем использовать также следующую теорему о квазиретракции, доказанную В.В. Обуховским и А.Г. Скалецким (см. [14]):

(1.10.) Теорема. Если N – предкомпактное подмножество локально выпуклого пространства E и p – непрерывная полунорма в E, то существует конечномерное подпространство $E' \subset E$, $E' \cap N \neq \varnothing$ и непрерывное отображение $\rho_p : E \to E' \cap \overline{co}N$, называемое квазиретракцией, такое, что $p(x - \rho_p(x)) < 1$ для любого $x \in N$. ■

1.1.1. Многозначные отображения

Напомним некоторые сведения из теории многозначных отображений (см., напр., [15]).

Обозначим $P(Y)$ совокупность всех непустых подмножеств множества Y. Многозначное отображение (кратко мультиотображение) F множества X в множество Y – это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subseteq Y$, называемое образом точки x, то есть это однозначное отображение $F : X \to P(Y)$.

Пусть $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Если $A \subseteq X$, то множество $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$ называется образом A при мультиотображении F. Если $D \subseteq Y$, то множество $F^{-1}(D) = \{x|\ x \in X,\ F(x) \subseteq D\}$ называется малым прообразом множества D при мультиотображении F.

Множество $\Gamma_F \subseteq X \times Y$, $\Gamma_F = \{(x,y)|\ x \in X,\ y \in F(x)\}$ называется графиком мультиотображения $F : X \to P(Y)$. С каждым мультиотображением $F : X \to P(Y)$ мы свяжем следующую диаграмму однозначных отображений:

$$X \xleftarrow{\ t\ } \Gamma_F \xrightarrow{\ r\ } Y,$$

где t и r – естественные проекции: $t(x,y) = x$, $r(x,y) = y$.

Пусть $X \subseteq Y$; $x \in X$ называется неподвижной точкой мультиотображения $F : X \to P(Y)$, если $x \in F(x)$. Множество всех неподвижных точек мультиотображения F обозначается $FixF$.

Пусть X, Y – топологические пространства.

(1.11) Определение. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху, если $F^{-1}(V)$ открыто для любого открытого подмножества $V \subseteq Y$.

Обозначим через $C(Y)$ совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства Y, а через $K(Y)$ совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства Y.

(1.12) Определение. Мультиотображение $F : X \to C(Y)$ называется замкнутым, если его график Γ_F – замкнутое подмножество в $X \times Y$.

Справедливо следующее утверждение (см. [15]):

(1.13) Лемма. Если пространство Y хаусдорфово, то всякое полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(Y)$ замкнуто. ■

(1.14) Определение. Мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется компактным, если образ $F(X)$ относительно компактен в Y (то есть $\overline{F(X)}$ – компактно). Компактное и полунепрерывное сверху мультиотображение называется вполне непрерывным.

Пусть теперь Y – хаусдорфово топологическое векторное пространство, $X \subseteq Y$. Всякое мультиотображение $F : X \to P(Y)$ определяет мультиотображение $\Phi : X \to P(Y)$, $\Phi(x) = x - F(x)$, называемое многозначным векторным полем (кратко мультиполем), соответствующим F. Обозначая $i : X \to Y$ отображение вложения, будем записывать $\Phi = i - F$. Точка $x \in X$ такая, что $0 \in \Phi(x)$, называется особой точкой мультиполя Φ. Ясно, что особые точки мультполя $\Phi = i - F$ являются неподвижными точками мультиотображения F и обратно. Если $FixF = \varnothing$, то $\Phi = i - F$ невырождено, то есть $\Phi : X \to P(Y \backslash 0)$.

Пусть L – компактное топологическое пространство. Вполне непрерывное мультиотображение $G : X \times L \to K(Y)$ определяет семейство $\Psi : X \times L \to K(Y)$, $\Psi(x,\lambda) = x - G(x,\lambda)$ вполне непрерывных мультиполей.

Нетрудно убедиться, что мультиполе $\Phi = i - F : X \to K(Y)$, соответствующее полунепрерывному сверху мультиотображению $F : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху. Если мультиотображение $F : X \to K(Y)$ вполне непрерывно, то соответствующее ему мультиполе также называется вполне непрерывным.

Отметим следующее важное свойство (см. [15]):

(1.15) Лемма. Если $X' \subset X$ замкнуто, $\Psi : X \times L \to K(Y)$ – семейство вполне непрерывных мультиполей, то множество $\Psi(X' \times L)$ замкнуто.

Нам понадобится также следующее легко проверяемое утверждение.

(1.16) Лемма. Если мультиотображения $F_0, F_1 : X \to K(Y)$ вполне непрерывны, то мультиотображение $G : X \times [0,1] \to K(Y)$,

$$G(x, \lambda) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda) F_0(x)$$

также вполне непрерывно. ■

Пусть X, Y – топологические пространства, $F : X \to K(Y)$ мультиотображение. Для $i \geqslant 0$ обозначим

$$M_F^i = \{x |\ x \in X,\ F(x) \text{ не является } i-\text{ацикличным}\}.$$

(1.17) Определение. Полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется почти ациклическим, если:

(a) $M_F^i = \varnothing$ для всех i, начиная с некоторого $i_0 \geqslant 0$;

(b) $\chi = \max\limits_{0 \leqslant i < i_0} (\dim_X M_F^i) < \infty$.

Если для всех $i \geqslant 0$ $M_F^i = \varnothing$, то мультиотображение F называется ациклическим.

(1.18) Определение. Мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется псевдоациклическим, если существует топологическое пространство Z и непрерывное отображение $\Theta : Z \to Y$ такое, что F представимо в виде композиции

$$F = \Theta \circ \bar{F},$$

где $\bar{F} : X \to K(Z)$ почти ациклическое мультиотображение. Пара $(\Theta, \bar{F})$ будет называться разложением псевдоациклического мультиотображения F.

2. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ ПСЕВДОАЦИКЛИЧЕСКИХ МУЛЬТИПОЛЕЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $U \subset E$ – выпуклая конечно ограниченная открытая окрестность нуля.

Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E. Обозначим $U_T = U \cap T$.

Рассмотрим $F = \Theta \circ \bar{F} : \partial U \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что:

a) $F(\partial U \cap T) \subseteq T$;

b) $F|_{\partial U \cap T}$ вполне непрерывно;

c) $Fix F \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Нашей задачей является определение топологической степени мультиполя $\Phi = i - F$ относительно множества T.

Согласно лемме (1.16) найдется открытая абсолютно выпуклая окрестность нуля $V \subset E$ такая, что $V \cap \Phi(\partial U \cap T) = \varnothing$. Пусть $p_V : E \to \mathbb{R}$ – функционал Минковского, соответствующий окрестности V. Из теоремы (1.10) следует, что существует конечномерное подпространство $E' \subset E$, $E \cap F(\partial U \cap T) \neq \varnothing$ и квазиретракция

$$\rho_p : E \to E' \cap \overline{co} F(\partial U \cap T),$$

$p_V(x - \rho_p(x)) < 1$ для любого $x \in F(\partial U \cap T)$.

Без ограничения общности будем считать, что $\dim E' > \chi + i_0 + 1$, где χ, i_0 – параметры почти ациклического отображения $\bar{F}$ (см. определение (1.17)).

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\partial U \xleftarrow{\ t\ } \Gamma_{\bar{F}} \xrightarrow{\ r\ } Z \xrightarrow{\ \Theta\ } E \xrightarrow{\ \rho_p\ } E' \cap T.$$

Обозначим $q = \rho_p \circ \Theta \circ r$, $S = \partial U$, $S' = S \cap E'$, $\Gamma' = t^{-1}(S') = \Gamma_{\bar{F}|S'}$.

Рассмотрим следующую диаграмму

$$S' \xleftarrow{t'} \Gamma' \xrightarrow{q'} E' \cap T,$$

где t', q' – сужения на Γ' отображений t, q соответственно.

Обозначим через $\widetilde{q} : \Gamma' \to E'$ отображение $\widetilde{q} = t'(y) - q'(y)$, $y \in \Gamma'$.

(2.1) Лемма. $0 \notin \widetilde{q}(\Gamma')$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется $y \in \Gamma'$ такой, что $\widetilde{q}(y) = 0$. Получаем, что $x = t'(y) = q'(y) \in S' \cap T$ и

$$p_V(\widetilde{q}(y)) = p_V(t'(y) - q'(y)) = p_V(x - q(y)) =$$

$$= p_V(x - r(y) - (q(y) - r(y))) \geqslant p_V(x - r(y)) - p_V(q(y) - r(y)).$$

Но $x - r(y) \in \Phi(\partial U \cap T)$, следовательно, $p_V(x - r(y)) > 1$, а

$$p_V(q(y) - r(y)) = p_V(\rho_p r(y) - r(y)) < 1,$$

поскольку $r(y) \in F(\partial U \cap T)$. Следовательно, $p_V(\widetilde{q}(y)) > 0$, в противоречие с предположением. ■

Пусть $\dim E' = k + 1$. Тогда S' и $P' = E' \setminus 0$ являются когомологическими k-сферами. Ориентируем их, выбрав образующие элементы $\beta_1 \in H^k(S')$ и $\beta_2 \in H^k(P')$.

Нетрудно проверить, что отображение t' является k-виеторисовским отображением и, следовательно,

$$(t')^{*k} : H^k(S') \to H^k(\Gamma')$$

является изоморфизмом.

(2.2) Определение. Топологической степенью $\gamma_T^{\rho_p, E'}(\Phi)$ псевдоациклического мультиполя $\Phi = i - F$ относительно T называется целое число, определяемое следующим образом:
(a) $\gamma_T^{\rho_p, E'}(\Phi) = 0$, если $\bar{U} \cap T = \varnothing$;
(b) $\gamma_T^{\rho_p, E'}(\Phi) = \gamma$, где $[(t')^{*k}]^{-1} \widetilde{q}^{*k}(\beta_2) = \gamma \beta_1$, если $\bar{U} \cap T \neq \varnothing$ и $\partial U \cap T \neq \varnothing$; (c) $\gamma_T^{\rho_p, E'}(\Phi) = 1$, если $\bar{U} \cap T \neq \varnothing$ и $\partial U \cap T = \varnothing$.

Установим корректность данного определения.

(2.3) Лемма. Пусть ρ_p^0, $\rho_p^1 : E \to E' \cap T$ – две квазиретракции. Тогда

$$\gamma_T^{\rho_p^0, E'}(\Phi) = \gamma_T^{\rho_p^1, E'}(\Phi).$$

Доказательство. Пусть $q_0 = \rho_p^0 \circ \Theta \circ r$, $q_1 = \rho_p^1 \circ \Theta \circ r$, $\widetilde{q}_0(y) = t'(y) - q_0'(y)$, $\widetilde{q}_1(y) = t'(y) - q_1'(y)$.

Достаточно показать, что отображения $\widetilde{q}_0$, $\widetilde{q}_1 : \Gamma' \to P'$ гомотопны.

Определим отображение $h : \Gamma' \times [0, 1] \to E'$,

$$h(y, \lambda) = \lambda \widetilde{q}_1(y) + (1 - \lambda) \widetilde{q}_0(y).$$

Покажем, что отображение h действует в P'. Предположим противное. Пусть найдутся $y_0 \in \Gamma'$, $\lambda_0 \in [0, 1]$ такие, что $h(y_0, \lambda_0) = 0$. Тогда

$$\lambda_0 \widetilde{q}_1(y_0) + (1 - \lambda_0) \widetilde{q}_0(y_0) = \lambda_0(t'(y_0) - q_1'(y_0)) + (1 - \lambda_0)(t'(y_0) - q_0'(y_0)) =$$

$$= t'(y_0) - \lambda_0 q_1'(y_0) - (1 - \lambda_0) q_0'(y_0) = 0,$$

то есть $t'(y_0) \in S \cap T$.

Получим:

$$p_V(\lambda_0\widetilde{q}_1(y_0) + (1-\lambda_0)\widetilde{q}_0(y_0)) = p_V(t'(y_0) - \lambda_0 q_1'(y_0) - (1-\lambda_0)q_0'(y_0)) =$$
$$= p_V(t(y_0) - \lambda_0\rho_p^1 \circ \Theta r(y_0) - (1-\lambda_0)\rho_p^0 \circ \Theta r(y_0)) =$$
$$= p_V(t(y_0) - \Theta r(y_0) - [\lambda_0(\rho_p^1 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) +$$
$$+ (1-\lambda_0)(\rho_p^0 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0))]) \geqslant$$
$$\geqslant p_V(t(y_0) - \Theta r(y_0)) - \lambda_0 p_V(\rho_p^1 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) -$$
$$-(1-\lambda_0)p_V(\rho_p^0 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)).$$

Но

$$p_V(t(y_0) - \Theta r(y_0)) > 1,$$
$$p_V(\rho_p^1 \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) < 1,$$
$$p_V(\rho_p^0 \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) < 1,$$

поэтому $p_V(\lambda_0\widetilde{q}_1(y_0) + (1-\lambda_0)\widetilde{q}_0(y_0)) > 0$, что противоречит нашему предположению. ■

(2.4) Лемма. Пусть E', E'' – два подпространства E такие, что $\dim E' = k+1$, $\dim E'' = k+2$ и $E' \subset E''$. Пусть $\rho_p^0 : E \to E' \cap T$ – квазиретракция и $\rho_p^1 : E \to E'' \cap T$ – отображение, заданное формулой $\rho_p^1(z) = \rho_p^0(z)$ для любых $z \in E$.

Тогда

$$\gamma_T^{\rho_p^0, E'}(\Phi) = \gamma_T^{\rho_p^1, E''}(\Phi).$$

Доказательство. Пусть $P' = E' \setminus 0$, $P'' = E'' \setminus 0$, $S' = S \cap E'$,$S'' = S \cap E''$. Определим отображение $l' : P' \to S'$, $l'' : P'' \to S''$, положив $l'(z) = \frac{z}{||z||}$, $l''(z) = \frac{z}{||z||}$. Ориентируем S', P', S'', P'' таким образом, чтобы

$$\deg \widetilde{q}' = \deg(l' \circ \widetilde{q}'), \ \deg \widetilde{q}'' = \deg(l'' \circ \widetilde{q}''),$$

где deg обозначает топологическую степень отображений когомологических сфер ([16]). Применив теперь к паре $(t'', l'' \circ \widetilde{q}'')$ лемму (1.9), получим утверждение леммы. ■

Из лемм (2.3) и (2.4) вытекает, что введенная топологическая степень не зависит от выбора квазиретракции ρ_p и аппроксимирующего пространства E', то есть

$$\gamma_T^{\rho_p, E'}(\Phi) = \gamma_T(\Phi).$$

Введем теперь понятие гомотопии псевдоациклических мультиполей.

(2.5) Определение. Пусть $F_0 = \Theta_0 \circ \bar{F}_0$, $F_1 = \Theta_1 \circ \bar{F}_1 : \partial U \to K(E)$ – псевдоациклические мультиотображения такие, что
(a) $F_i(\partial U \cap T) \subset T$;
(b) $F_i|_{\partial U \cap T}$ вполне непрерывно;
(c) $Fix F_i \cap \partial U \cap T = \varnothing$; $i = 0, 1$.

Назовем мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ гомотопными, если существуют почти ациклическое мультиотображение $\bar{F} : \partial U \times [0,1] \to K(Z)$ и непрерывное отображение $\Theta : Z \times [0,1] \to E$ такие, что:
(i) $\bar{F}(\cdot, 0) = \bar{F}_0$, $\bar{F}(\cdot, 1) = \bar{F}_1$;
(ii) $\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0$, $\Theta(\cdot, 1) = \Theta_1$;
(iii) для псевдоациклического мультиотображения $\widetilde{F} : \partial U \times [0,1] \to K(E)$, заданного как

$$\widetilde{F}(x, \lambda) = \Theta(\bar{F}(x, \lambda), \lambda)$$

выполнено:
(1) $\widetilde{F}((\partial U \cap T) \times [0,1]) \subseteq T$;
(2) $\widetilde{F}|_{(\partial U \cap T)\times[0,1]}$ вполне непрерывно;
(3) $x \notin \widetilde{F}(x,\lambda)$ для всех $(x,\lambda) \in (\partial U \cap T) \times [0,1]$.

Ясно, что можно отождествить $\widetilde{F}(\cdot,0) = F_0$, $\widetilde{F}(\cdot,1) = F_1$. Гомотопные мультиполя мы будем обозначать символом $\Phi_0 \sim \Phi_1$.

Справедливо следующее свойство гомотопической инвариантности топологической степени.

(2.6) Теорема. Если псевдоациклические мультиполя Φ_0 и Φ_1 гомотопны, то

$$\gamma_T(\Phi_0) = \gamma_T(\Phi_1).$$

Доказательство. Обозначим $\Phi : \partial U \times [0,1] \to K(E)$, $\Phi(x,\lambda) = x - \widetilde{F}(x,\lambda)$ семейство мультиполей, осуществляющих гомотопию между Φ_0 и Φ_1. Множество $\Phi((\partial U \cap T) \times [0,1])$ – замкнуто, следовательно, найдется абсолютно выпуклая открытая окрестность нуля V такая, что $\Phi((\partial U \cap T) \times [0,1]) \cap V = \varnothing$. Действуя так же, как и при определении топологической степени, находим квазиретракцию

$$\rho_p : E \to E' \cap \overline{co}\widetilde{F}((\partial U \cap T) \times [0,1]),$$

где $\dim E' > \chi + i_0 + 1$, где χ, i_0 – параметры почти ациклического мультиотображения $\bar{F} : \partial U \times [0,1] \to K(Z)$.

Рассмотрим диаграмму

$$\partial U \times [0,1] \xleftarrow{\ t\ } \Gamma_{\bar{F}} \xrightarrow{\ r\ } Z \times [0,1] \xrightarrow{\ \Theta\ } E \xrightarrow{\ \rho_p\ } E' \cap T,$$

где r определено для $(x,\lambda,y) \in \Gamma_{\bar{F}}$ как $r(x,\lambda,y) = (y,\lambda)$. Обозначим $q = \rho_p \circ \Theta \circ r$, $S' = \partial U \cap E'$, $\Gamma' = t^{-1}(S' \times [0,1])$.

Тогда приходим к диаграмме:

$$S' \times [0,1] \xleftarrow{\ t'\ } \Gamma' \xrightarrow{\ \widetilde{q}\ } P',$$

где $t' = t|_{\Gamma'}$, $q' = q|_{\Gamma'}$,$\widetilde{q} = t' - q'$.

Как и прежде, можно установить, что $\widetilde{q}$ действует в P'. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
S' \times \{0\} \arrow[d, "i_0"'] & t'^{-1}(S' \times \{0\}) \arrow[l, "t'_0"'] \arrow[d, "j_0"] \arrow[dr, "\widetilde{q}_0"] & \\
S' \times [0,1] & \Gamma' \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "\widetilde{q}"] & P' \\
S' \times \{1\} \arrow[u, "i_1"] & t'^{-1}(S' \times \{1\}) \arrow[l, "t'_1"'] \arrow[u, "j_1"'] \arrow[ur, "\widetilde{q}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой $\widetilde{q}_1$, $\widetilde{q}_0$ – сужения $\widetilde{q}$; t'_0, t'_1 – ограничения отображения t'; i_0, i_1, j_0, j_1 – вложения.

Переходя к когомологиям, получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H^k(S' \times \{0\}) \arrow[r, "(t'_0)^{*k}"] & H^k(t'^{-1}(S' \times \{0\})) & \\
H^k(S' \times [0,1]) \arrow[u, "i_0^{*k} \simeq"] \arrow[d, "i_1^{*k} \simeq"'] \arrow[r, "(t')^{*k}"] & H^k(\Gamma') \arrow[u, "j_0^{*k}"'] \arrow[d, "j_1"] & H^k(P') \arrow[l, "\widetilde{q}^{*k}"'] \arrow[ul, "\widetilde{q}_0^{*k}"'] \arrow[dl, "\widetilde{q}_1^{*k}"] \\
H^k(S' \times \{1\}) \arrow[r, "(t'_1)^{*k}"] & H^k(t'^{-1}(S' \times \{1\})) &
\end{tikzcd}$$

Учитывая, что по теореме Виеториса-Бегла-Скляренко (1.2) $(t'_0)^{*k}$, $(t')^{*k}$, $(t'_1)^{*k}$ являются изоморфизмами, получаем
$(\mathbf{2.7})[i_0^{*k}]^{-1}[t_0'^{*k}]^{-1}\widetilde{q}_0^{*k} = [i_1^{*k}]^{-1}[t_1'^{*k}]^{-1}\widetilde{q}_1^{*k}$.

Окончательно, отождествляя $S'\times\{0\}$ и $S'\times\{1\}$ с S', из (2.7) получаем, что $\gamma_T(\Phi_0) = \gamma_T(\Phi_1)$. ■

3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ И ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ И СОВПАДЕНИИ

3.1. Некоторые теоремы о неподвижной точке

(3.1) Теорема. Пусть $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что
(a) $F(\bar{U} \cap T) \subset T$;
(b) $F|_{\bar{U}\cap T}$ – вполне непрерывно;
(c) $FixF \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Если $\gamma_T(i - F|_{\partial U}) \neq 0$, то существует точка $x_0 \in U \cap T$ такая, что $x_0 \in F(x_0)$.

Доказательство. Предположим противное, то есть $x \notin F(x)$ для всех $x \in \bar{U}_T = \bar{U} \cap T$. Найдем такую абсолютно выпуклую окрестность нуля V, что $V \cap \Phi(\bar{U}_T) = \varnothing$, где $\Phi = i - F$. Пусть $\rho_p : E \to E' \cap \overline{co}F(\bar{U}_T)$ – квазиретракция, $\dim E' > \chi + i_0 + 1$; χ, i_0 – параметры почти ациклического мультиотображения $\widetilde{F}$, где $F = \Theta \circ \widetilde{F}$. Рассмотрим диаграмму:

$$\bar{U} \xleftarrow{\ t\ } \Gamma_F \xrightarrow{\ r\ } Z \xrightarrow{\ \Theta\ } E \xrightarrow{\ \rho_p\ } E' \cap T.$$

Пусть $\bar{U}' = \bar{U} \cap E'$, $\Gamma' = t^{-1}(\bar{U}')$, $t' = t|_{\Gamma'}$, $q = \rho_p \circ \Theta \circ r$, $q' = q|_{\Gamma'}$, $\widetilde{q} = t' - q'$.

Как и прежде, можно показать, что $\widetilde{q}$ действует в $P' = E' \setminus 0$.

Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\bar{U}' & \Gamma' \arrow[l, "t'"'] \arrow[dr, "\widetilde{q}"] & \\
 & & P', \\
S' \arrow[uu, "i"] & t'^{-1}(S') \arrow[l, "\widehat{t'}"'] \arrow[uu, "j"] \arrow[ur, "\widehat{\widetilde{q}}"'] &
\end{tikzcd}$$

где $S' = \partial U \cap E'$; $\widehat{t'}$, $\widehat{\widetilde{q}}$ – сужения отображений t', $\widetilde{q}$ соответственно; i, j – вложения.

Перейдем к соответствующей диаграмме в когомологиях:

$$\begin{tikzcd}
H^k(\bar{U}') \arrow[r, "(t')^{*k}"] \arrow[dd, "i^{*k}"'] & H^k(\Gamma') \arrow[dd, "j^{*k}"] & \\
 & & H^k(P') \arrow[ul, "\widetilde{q}^{*k}"'] \arrow[dl, "\widehat{\widetilde{q}}^{*k}"] \\
H^k(S') \arrow[r, "(\widehat{t'})^{*k}"] & H^k(t'^{-1}(S')) &
\end{tikzcd}$$

Учитывая тот факт, что $H^k(\bar{U}') = 0$, получаем, что $[(\widehat{t'})^{*k}]^{-1} \circ \widehat{\widetilde{q}}^{*k} = 0$, а следовательно, $\gamma_T(\Phi) = 0$, что противоречит условию теоремы. ■

Доказанный общий принцип открывает возможности для формулировки различных теорем о неподвижной точке. Рассмотрим следующее утверждение.

(3.2) Теорема. Пусть $\bar{U}_T \neq \varnothing$, $\varphi = i - f : \bar{U} \to E$ – однозначное поле такое, что:
(a) $f(\bar{U}_T) \subset T$;
(b) $f|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно;
(c) $Fix\, f \cap \partial U \cap T = \varnothing$;
(d) $\gamma_T(i - f|_{\partial U}) \neq 0$.

Пусть $\Phi = i - F$ – псевдоациклическое мультиполе такое, что:
(i) $F(\bar{U}_T) \subset T$;
(ii) $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно;
(iii) $Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Предположим далее, что

(3.3) $\mu\varphi(x) \notin \Phi(x)$ для всех $\mu < 0$, $x \in \partial U \cap T$. Тогда найдется точка $x \in \bar{U}_T$ такая, что $x \in F(x)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство мультиотображений

$$G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E),$$

$$G(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) F(x).$$

Тогда $G(\bar{U}_T \times [0,1]) \subset T$ в силу выпуклости T, $G|_{\bar{U}_T \times [0,1]}$ – вполне непрерывно.

Далее, мультиотображение G порождает гомотопию псевдоациклических мультиполей. Действительно, пусть $F = \Theta \circ \widetilde{F}$ – разложение псевдоациклического мультиотображения F:

$$\bar{U} \overset{\widetilde{F}}{\multimap} Z \xrightarrow{\Theta} E.$$

Обозначим $Z_G = E \times Z$ – пространство с естественной метрикой и заметим, что мультиотображение $\widetilde{G} : \bar{U} \times [0,1] \to K(Z_G)$,

$$\widetilde{G}(x, \lambda) = \{f(x)\} \times \widetilde{F}(x),$$

очевидно, почти ациклично. Зададим теперь отображение $\Theta_G : Z_G \times [0,1] \to E$ как композицию

$$E \times Z \times [0,1] \xrightarrow{(id_E \times \Theta \times id_{[0,1]})} E \times E \times [0,1] \xrightarrow{\psi} E,$$

где id_E, $id_{[0,1]}$ – тождественные отображения в E и $[0,1]$ соответственно, а ψ определено как

$$\psi(y_1, y_2, \lambda) = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2.$$

Ясно, что мультиотображение G может теперь быть записано как

$$G(x, \lambda) = \Theta_G(\widetilde{G}(x, \lambda), \lambda),$$

что согласуется с определением (2.5).

Докажем, что $x \notin G(x, \lambda)$, $(x, \lambda) \in (\partial U \cap T) \times [0,1]$.

Предположим противное. Тогда для некоторых $x_0 \in \partial U \cap T$, $\lambda_0 \in (0,1)$:

$$x_0 \in \lambda_0 f(x_0) + (1 - \lambda_0) F(x_0) \text{ или}$$

$$\lambda_0 (x_0 - f(x_0)) \in (\lambda_0 - 1)(x_0 - F(x_0)),$$

то есть $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \varphi(x_0) \in \Phi(x_0)$, что противоречит (3.3).

Следовательно, $i - G$ – почти псевдоациклическая гомотопия, соединяющая мультиполе Φ и поле φ. Из теоремы (2.6) следует тогда, что $\gamma_T(\varphi) = \gamma_T(i - F) \neq 0$ и доказываемое утверждение вытекает теперь из предыдущей теоремы. ■

(3.4) Следствие 1 (Теорема Шефера). Пусть $0 \in T$, $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что:
(i) $F(\bar{U}_T) \subset T$;
(ii) $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно.

Пусть $\mu x \notin F(x)$ для всех $\mu > 1$, $x \in \partial U \cap T$. Тогда найдется $x \in \bar{U}_T$ такое, что $x \in F(x)$.

Доказательство. Без ограничения общности будем полагать, что

$$Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing.$$

Положим в Теореме 3.2 $\varphi(x) \equiv x$. Тогда условия (a), (b), (c), (d), (i), (ii), (iii) предыдущей теоремы выполнены. Предположение (3.3) также выполнено, так как, полагая противное, найдем $x_0 \in \partial U \cap T$ и $\mu_0 < 0$ такие, что $\mu_0 x_0 \in x_0 - F(x_0)$, то есть $(1 - \mu_0)x_0 \in F(x_0)$, что противоречит условию теоремы.■

(3.5) Следствие 2 (Теорема Роте). Пусть $0 \in T$, $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение, $F(\bar{U}_T) \subset T$, $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно. Пусть $F(\partial U \cap T) \subset \bar{U}_T$. Тогда найдется $x \in \bar{U}_T$ такой, что $x \in F(x)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что условия теоремы Шефера здесь выполнены. ■

3.2. Теорема о совпадении типа Пуанкаре

Те же методы позволяют доказать следующую теорему о совпадении типа Пуанкаре.

(3.6) Теорема. Пусть $T \subset E$ – конус с вершиной в нуле. Пусть $\varphi = i - f : \bar{U} \to E$ – однозначное поле такое, что условия (a), (b), (c), (d) теоремы (3.2) выполнены. Пусть $\Phi = i - F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиполе, удовлетворяющее условиям (i), (ii), (iii) той же теоремы.

(3.7) Предположим далее, что $\mu\varphi(x) \notin F(x)$ для всех $\mu > 1$, $x \in \partial U \cap T$. Тогда найдется точка $x \in \bar{U}_T$ такая, что $\varphi(x) \in F(x)$.

Доказательство. Рассмотрим мультиотображение $\varphi - F : \bar{U} \to K(E)$, задаваемое формулой

$$(\varphi - F)(x) = \varphi(x) - F(x).$$

Без ограничения общности можно считать, что $0 \notin (\varphi - F)(x)$ для всех $x \in \partial U \cap T$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $0 \in (\varphi - F)(U_T)$.

Рассмотрим мультиотображение $G : \bar{U} \times [0, 1] \to K(E)$,

$$G(x, \lambda) = f(x) + \lambda F(x), x \in \bar{U}, \lambda \in [0, 1].$$

Легко проверить, что $G(\bar{U}_T \times [0, 1]) \subset T$, $G|_{\bar{U}_T \times [0,1]}$ – вполне непрерывно. Остается доказать, что $x \notin G(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in (\partial U \cap T) \times [0, 1]$. Для $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ этот факт очевиден. Предположим противное, то есть $x_0 \in f(x_0) + \lambda_0 F(x_0)$ при некоторых $x_0 \in \partial U \cap T$, $\lambda_0 \in (0, 1)$.

Тогда $\varphi(x_0) \in \lambda_0 F(x_0)$, $\frac{1}{\lambda_0}\varphi(x_0) \in F(x_0)$ и так как $\frac{1}{\lambda_0} > 1$, то получим противоречие условию (3.7) теоремы.

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве Теоремы 3.2, мы приходим к выводу, что G порождает псевдоациклическую гомотопию, соединяющую поле φ и мультиполе $\varphi - F$. Из теоремы (2.6) следует, что

$$\gamma_T(\varphi) = \gamma_T(\varphi - F) \neq 0$$

и теперь, применяя теорему (3.1), получаем, что $0 \in (\varphi - F)(\bar{U}_T)$. ■

3.3. Эквивариантные и нечетные мультиполя

В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые обобщения работ Я.А. Израилевича и В.В. Обуховского ([18], [19]).

Пусть $d : E \to E$ – непрерывный линейный оператор, удовлетворяющий следующим условиям: $d^k = id_E$, $k \geqslant 2$; если $L = Fix\, d$, то $d^i(y) \neq y$, $y \notin L$, $i \not\equiv 0 (mod\, k)$, то есть d является полусвободным периодическим оператором порядка k.

Пусть U, как и прежде, выпуклая конечно ограниченная окрестность нуля, $S = \partial U$ и пусть $d(S) = S$.

(3.8) Определение. Мультиотображение $F : S \to K(E)$ называется эквивариантным относительно d, если

$$F \circ d = d \circ F.$$

Будем предполагать, что если эквивариантное относительно d мультиотображение $F : S \to K(E)$ псевдоациклично, и $L \neq 0$, то мультиотображение $F_L : S \cap L \to K(L)$, $F_L(x) = F(x) \cap L$ определено и псевдоациклично, причем $\dim L > i'_0 + \chi' + 1$, где i'_0, χ'– параметры F_L (это условие выполнено, например, если все образы $F(x)$ выпуклы для $x \in S \cap L$).

(3.9) Теорема. Пусть $F : S \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение, эквивариантное относительно периодического оператора d периода k. Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E такое, что $d(T) = T$ и $T \cap L \neq \varnothing$ в случае, если $L \neq 0$ и $T \cap \bar{U} \neq \varnothing$.

Пусть $F(\partial U \cap T) \subset T$, $F|_{\partial U \cap T}$ – вполне непрерывно, $Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing$. Тогда

$$\gamma_T(i - F) \equiv \gamma_{T\cap L}(i - F_L)(mod\, k), \text{если}\, L \neq 0,$$

$$\gamma_T(i - F) \equiv 1(mod\, k), \text{если}\, L = 0.$$

Доказательство. Пусть $L \neq 0$. Пусть, как и прежде, V – абсолютно выпуклая открытая окрестность нуля такая, что $V \cap \Phi(\partial U \cap T) = \varnothing$. Пусть V_1 – такая абсолютно выпуклая открытая окрестность нуля, что

$$d^i(V_1) \subset V,\ 0 \leqslant i \leqslant k - 1,$$

и пусть $\rho_{V_1} : E \to E' \cap \overline{co}F(S \cap T)$ – соответствующая квазиретракция на $F(S \cap T)$. Без ограничения общности пространство E' можно считать d-инвариантным (в противном случае его можно расширить, перейдя к линейной оболочке d-итераций базисных векторов).

Тогда отображение

$$\rho = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} d^{k-i}\rho_{V_1}d^i : E \to E' \cap \overline{co}F(S \cap T)$$

является эквивариантной квазиретракцией относительно полунормы p_V. В самом деле, эквивариантность ρ очевидна, а если $y \in F(S \cap T)$, то

$$p_V(\rho(y) - y) = p_V(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} d^{k-i}\rho_{V_1}d^i(y) - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} d^{k-i}d^i(y)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} p_V(d^{k-i}(\rho_{V_1}d^i(y) - d^i(y)) < 1,$$

поскольку $\rho_{V_1}d^i(y) - d^i(y) \in V_1$. Рассмотрим теперь, как прежде, диаграмму

$$S' \xleftarrow{t'} \Gamma' \xrightarrow{\widetilde{q}} P',$$

где $\widetilde{q} = t' - q'$, $q' = \rho \circ \Theta \circ r|_{\Gamma'}$.

Определим полусвободное периодическое отображение $\widetilde{d} : \Gamma' \to \Gamma'$ формулой

$$\widetilde{d}(x, y) = (d(x), d(y)).$$

Период $\widetilde{d}$ равен k, а $Fix\, \widetilde{d} = \widetilde{L}$ – график отображения $F_L|_{S' \cap L}$. Отметим, что отображения t' и $\widetilde{q}$ эквивариантны:

$$t'\widetilde{d} = dt', \ \widetilde{q}\widetilde{d} = d\widetilde{q}.$$

Определим сужения

$$t'_{\widetilde{L}} : L' \to L \cap S', \ \widetilde{q}_{\widetilde{L}} : \widetilde{L} \to L \cap P'.$$

Пусть $\dim(L \cap S') = m$, в силу теоремы (1.2)

$$(t')^{*\,k} : H^k(S') \to H^k(\Gamma') \text{ и}$$

$$(t'_{\widetilde{L}})^{*\,m} : H^m(L \cap S') \to H^m(\widetilde{L})$$

– изоморфизмы. Считая ориентации когомологических сфер S', Γ' и $L \cap S'$, $\widetilde{L}$ согласованными, имеем $deg\, t' = deg\, t'_{\widetilde{L}} = 1$. Тогда по теореме 4 ([17]) имеем: $ind\, \widetilde{d} = ind\, d$, где ind означает индекс Смита периодического отображения. Но, применив ту же теорему к отображениям $\widetilde{q}$, $\widetilde{q}_{\widetilde{L}}$, получаем:

$$deg\, \widetilde{q} \cdot ind\, \widetilde{d} \equiv deg\, \widetilde{q}_{\widetilde{L}} \cdot ind\, d (mod\, k),$$

откуда

$$deg\, \widetilde{q} \equiv deg\, \widetilde{q}_{\widetilde{L}} (mod\, k).$$

В силу (2.2) имеем

$$\gamma_T(\Phi) = deg\, \widetilde{q}, \ \gamma_T(i - F_L) = deg\, \widetilde{q}_{\widetilde{L}},$$

что и завершает доказательство.

Доказательство для случая случая $L = 0$ аналогично. ■

(3.10) Следствие 1 (Теорема о нечетном поле). Пусть U – абсолютно выпуклая открытая конечно ограниченная окрестность нуля, $F : \partial U \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение, T – симметричное относительно нуля выпуклое замкнутое подмножество E. Пусть $F(\partial U \cap T) \subset T$, $F|_{\partial U \cap T}$ – вполне непрерывно, $Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing$ и

$$F(-x) = -F(x)$$

для всех $x \in \partial U$. Тогда $\gamma_T(i - F) \equiv 1 (mod\, 2)$.

(3.11) Следствие 2. Пусть U – открытая выпуклая конечно ограниченная окрестность нуля такая, что $d(U) = U$, $d(\partial U) = \partial U$, где $d : E \to E$ – непрерывный линейный периодический оператор периода k. Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E такое, что $d(T) = T$ и $T \cap L \neq \varnothing$ в случае $L = Fix\, d \neq 0$ и $T \cap \bar{U} \neq \varnothing$. Пусть $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что $F(\bar{U}_T) \subset T$, $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно, Пусть F эквивариантно на ∂U относительно d и выполнено одно из следующих условий:

(i) $L = 0$,

(ii) $L \neq 0$ и $\gamma_{T \cap L}(i - F_L) \not\equiv 0 (mod\, k)$.

Тогда существует неподвижная точка $x \in \bar{U} \cap T$, $x \in F(x)$.

Замечание. Приложения данной теории топологической степени к исследованию некомпактных многозначных векторных полей, точек совпадения с фредгольмовыми операторами и к разрешимости некоторых краевых задач для дифференциальных включений предполагается дать в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Eilenberg S., Montgomery D. Fixed point theorems for multi-valued transformations/ Amer. J. Math. 68 – 1946. – P. 214–222.

[2] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / УМН 35:1. — 1980. — С. 59–126.

[3] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначные отображения / Итоги науки и математики. Матем. анализ. — Т. 19. ВИНИТИ. — М. — 1982. — С. 127–231.

[4] Górniewicz L. Topological fixed point theory of multivalued mappings / Second Edition. Springer, Dordrecht. — 2006. — 538 p.

[5] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / Walter de Gruyter, Berlin New York. — 2001. — 231 p.

[6] Борисович Ю.Г. Об одном применении понятия вращения векторного поля / Ю.Г. Борисович // ДАН. — 1963. — 153:1. — С. 12–15.

[7] Борисович Ю.Г. Об относительном вращении компактных векторных полей в линейных пространствах / Ю.Г. Борисович // Труды сем. по функц. анализу, Воронеж. — 1969. — Вып. 12. — С. 3–27.

[8] Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир. — 1971. — 693 с.

[9] Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. — М: Наука, 1973. — 576 с.

[10] Begle E.G. The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces / Ann. of Math. 51:2. — 1950. — P. 534–543.

[11] Vietoris L. *Ü*ber den hogeren Zusammenhang kompakter R*ä*ume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen / Math. Ann. — 1927. — 97. — P. 454–472.

[12] Скляренко Е.Г. О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии / Е.Г. Скляренко // УМН 19:6. – 1964. – С. 47–70.

[13] Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. — М.: Физматгиз. — 1968. — 403 с.

[14] Обуховский В.В. Некоторые теоремы о продолжении непрерывных отображений / В.В. Обуховский, А.Г. Скалецкий // Сиб. мат. ж. — 1982. – Т. 23, № 4. — С. 137–141.

[15] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либроком. — 2011. — 216 с.

[16] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. — М: Мир. — 1976. — 467 с.

[17] Израилевич Я.А. О понятии относительного вращения многозначного векторного поля / Я.А. Израилевич // Труды сем. по функц. анализу, Воронеж. — 1969. — Вып. 12. — С. 111–115.

[18] Израилевич Я.А. Об эквивариантных многозначных отображений / Я.А. Израилевич, В.В. Обуховский // ДАН СССР. 1972. Т. 205, № 1. — С. 16–18.

[19] Израилевич Я.А., Обуховский В.В. О некоторых топологических характеристиках эквивариантных многозначных отображений / Труды матем. ф-та ВГУ, Воронеж. — 1973. — Вып. 10. — С. 52–61.

REFERENCES

[1] Eilenberg S., Montgomery D., Fixed point theorems for multi-valued transformations. Amer. J. Math. 1946, 68, pp. 214–222.

[2] Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V., Topological methods in the fixed-point theory of multi-valued mappings. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D.,

Obuxovskij V.V. Topologicheskie metody v teorii nepodvizhnyx tochek mnogoznachnyx otobrazhenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1980, Vol. 35, pp. 65–143.

[3] Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V., Multivalued mappings. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Mnogoznachnye otobrazheniya]. *Itogi nauki i matematiki. Matem. analiz — J. Soviet Math*, 1984, 24, pp. 719–791.

[4] Górniewicz L. Topological fixed point theory of multivalued mappings / Second Edition. Springer, Dordrecht, 2006, 538 p.

[5] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / Walter de Gruyter, Berlin New York, 2001, 231 p.

[6] Borisovich Yu.G., An application of the concept of rotation of a vector field. [Borisovich Yu.G. Ob odnom primenenii ponyatiya vrashheniya vektornogo polya]. *Doklady Akademii nauk — Soviet Mathematics. Doklady*, 1963, Vol. 153, no. 1, pp. 12–15.

[7] Borisovich Yu.G., On the relative rotation of compact vector fields in linear spaces. [Borisovich Yu.G. Ob otnositel'nom vrashhenii kompaktnyx vektornyx polej v linejnyx prostranstvax]. *Trudy seminara po funkcional'nomu analizu — Proceedings of the seminar on functional analysis*, Voronezh State University, 1969, issue 12, pp. 3–27.

[8] Spanier E.H. Algebraic topology. [Spen'er E'. Algebraicheskaya topologiya]. Moscow: Mir, 1971, 693 p.

[9] Aleksandrov P.S., Pasynkov B.A., Introduction to dimension theory. [Aleksandrov P.S., Pasynkov B.A. Vvedenie v teoriyu razmernosti]. Moscow: Nauka, 1973, 576 p.

[10] Begle E.G. The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces / Ann. of Math, 1950, 51:2, pp. 534–543.

[11] Vietoris L. *Ü*ber den hogeren Zusammenhang kompakter R*ä*ume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen / Math. Ann., 1927, 97, pp. 454–472.

[12] Sklyarenko E.G. On some applications of sheaf theory in general topology. [Sklyarenko E.G. O nekotoryx prilozheniyax teorii puchkov v obshhej topologii]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1964, Vol. 19, no.6, pp. 47–70.

[13] Eilenberg S., Steenrod N., Foundations of algebraic topology. [Stinrod N., E'jlenberg S. Osnovaniya algebraicheskoj topologii]. Moscow: Fizmatgiz, — 1958, 403 p.

[14] Obukhovskii V.V., Skaletskii A.G., Some theorems on the extension and quasiextension of continuous mappings. [Obuxovskij V.V., Skaleckij A.G. Nekotorye teoremy o prodolzhenii nepreryvnyx otobrazhenij]. *Сибирский математический журнал — Siberian Mathematical Journal*, 1982, Vol. 23, no. 4, pp. 137–141.

[15] Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V., Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazhenij i differencial'nyx vklyuchenij]. Moscow: Librokom, 2011, 216 p.

[16] Dold A., Lectures on algebraic topology. [Dol'd A. Lekcii po algebraicheskoj topologii]. Moscow: Mir, 1976, 467 p.

[17] Izrailevich Ya. A., On the concept of relative rotation of a multivalued vector field. [Izrailevich Ya.A. O ponyatii otnositel'nogo vrashheniya mnogoznachnogo vektornogo polya]. *Trudy seminara po funkcional'nomu analizu — Proceedings of the seminar on functional analysis*, Voronezh State University, 1969, issue 12, pp. 111–115.

[18] Izrailevich Ya.A., Obukhovskii V.V. On equivariant multi-valued maps. [Izrailevich Ya.A., Obukhovskii V.V. Ob e'kvivariantnyx mnogoznachnyx otobrazhenij]. *Doklady Akademii nauk — Soviet Mathematics. Doklady*, 1972, Vol. 205, no. 1. pp. C. 16–18.

[19] Izrailevich Ya.A., Obukhovskii V.V., Certain topological characteristics of equivariant multivalued maps. [Izrailevich Ya.A., Obuxovskij V.V. O nekotoryx topologicheskix xarakteristikax

e'kvivariantnyx mnogoznachnyx otobrazhenij]. *Trudy matematicheskogo fakul'teta Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta — Proceedings of the mathematical faculty of the Voronezh state University*, 1973, issue. 10, pp. 52–61.

Джамхур Аль-Обаиди, аспирант кафедры высшей математики Воронежского Государственного Педагогического Университета
E-mail: alobadi@mail.ru
Тел.: +7–(950)–776–15–64

J.M. Al-Obaidi, Post-graduate student of the chair of higher mathematics of the Voronezh State Pedagogical University
E-mail: alobadi@mail.ru
Tel.: +7–(950)–776–15–64