УДК 517.954.988.8

СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ*

А. С. Бондарев, В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.09.13 г.

Аннотация: в гильбертовом пространстве слабо разрешимое абстрактное линейное параболическое уравнение с периодическим условием на решение решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявного метода Эйлера. Установлены оценки погрешностей приближенных решений, из которых следует сходимость в различных нормах приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости, зависящие от гладкости точного решения. В качестве проекционных подпространств могут быть использованы подпространства типа конечных элементов, построенные для случая равномерного разбиения соответствующей области изменения пространственных переменных на конечные элементы.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, периодическое условие, проекционно-разностный метод, неявный метод Эйлера.

THE CONVERGENCE OF PROJECTION-DIFFERENCE METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF PARABOLIC EQUATION WITH A PERIODIC CONDITION ON THE SOLUTION

A. S. Bondarev, V. V. Smagin

Abstract: weakly souble abstract linear parabolic equation with a periodic contition on the solution is solved approximately in the Hilbert space by the projection-difference method using time-implicit Euler's method. Estimates of the approximate solution's errors and convergence of the approximate solution to the exact solution depending on the smoothness of the exact solution are obtained. Special subspaces of finite element's type can be used as the projection subspaces. It is constructed in the case of spatial variables' domain that is uniformly partitioned into finite elements.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, periodic conditions, projection-difference method, time-implicit Euler method.

ТОЧНАЯ И ПРИБЛИЖЕННАЯ ЗАДАЧИ

Предполагается, что задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. При почти всех $t \in [0,T]$ на $u, v \in V$ определены полуторалинейные формы $a(t,u,v)$. Предполагается, что функция $t \to a(t,u,v) \in$

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 13-01-00378

$\mathbb{C}^1$ при всех $u, v \in V$ измерима на $[0,T]$. Пусть для всех $u, v \in V$ и почти всех $t \in [0,T]$ выполнены оценки:

$$|a(t,u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(t,u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$ такой, что выполняется соотношение $a(t,u,v) = (A(t)u,\, v)$. Здесь под выражением типа $(z,\, v)$ понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение $(z,\, v)$, в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1]. Из определения оператора $A(t)$ следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$.

В пространстве V' на $[0,T]$ рассмотрим периодическую параболическую задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad u(0) = u(T)\,. \tag{2}$$

В (2) задана функция $t \to f(t) \in V'$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле [2].

В [2, с.289] приводится теорема о существовании слабого решения задачи (2).

Теорема 1. *Предположим, что в задаче (2) функция $f \in L_2(0,T;V')$. Тогда существует единственная функция $u(t)$ такая, что $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$. Функция $u(t)$ удовлетворяющая почти всюду на $[0,T]$ уравнению в (2), и для нее выполняется периодическое условие.*

Отметим [3] оценку решения задачи (2)

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\right) dt \leqslant C\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\,.$$

Заметим, что в [3] был исследован проекционный метод Галеркина приближенного решения задачи (2), который является полудискретным методом. Для построения полностью дискретного метода в нашей работе к дискретизации по пространственным переменным добавляется дискретизация по временной переменной. При этом по времени используется простейшая неявная схема Эйлера, которая как известно устойчива и является разностной схемой первого порядка аппроксимации. В итоге процесс нахождения приближенного решения задачи (2) сводится к нахождению решения конечной линейной системы алгебраических уравнений.

Следует указать, что для параболических уравнений с начальным условием на решение применение и сходимость проекционно-разностного метода достаточно хорошо исследовано. Отметим наиболее близкие к данной статье работы [4]–[6]. Отметим также работу [7], где рассматривается параболическая задача с интегральным условием на решение.

Итак, пусть V_h – конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h{}'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. В [8] замечено , что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'} \quad (u \in V'). \tag{3}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$, которое получается соответствующим предельным переходом [4].

Рассмотрим в V_h приближенную задачу

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h^k\, u_k^h = f_h^k \quad (k = \overline{1,N}), \qquad u_0^h = u_N^h\,, \tag{4}$$

где N – натуральное число, $\tau N = T$, $t_k = k\tau$,

$$A_h^k = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h A(t)\,dt, \qquad f_h^k = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)\,dt\,.$$

Лемма 1. *Задача (4) однозначно разрешима.*

Доказательство. Так как задача (4) конечномерна, то достаточно установить, что однородная задача имеет только нулевое решение.

Возьмем произвольное $k = \overline{1,N}$. Пусть $u_k^h \in V_h$ – решение однородной задачи

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h u_k^h = 0, \quad (k = \overline{1,N}), \qquad u_0^h = u_N^h.$$

Умножим скалярно в H первое уравнение на τu_k^h, и возьмем удвоенную вещественную часть. Получим

$$2\mathrm{Re}\left(u_k^h - u_{k-1}^h, u_k^h\right) + 2\mathrm{Re}(A_k^h u_k^h, u_k^h)\tau = 0. \tag{5}$$

Заметим, что в (5) первое слагаемое

$$2\mathrm{Re}(u_k^h - u_{k-1}^h, u_k^h) = \|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2. \tag{6}$$

Оценим второе слагаемое в (5).

$$2\mathrm{Re}(A_k^h u_k^h, \tau u_k^h) = 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{Re}\, a(t, u_k^h, u_k^h)\,dt \geqslant 2\alpha \|u_k^h\|_V^2 \tau. \tag{7}$$

Из (5) с учетом (6) и (7) следует

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha\|u_k^h\|_V^2\tau \leqslant 0.$$

Последние неравенства суммируем по $k = \overline{1,N}$.

$$\|u_N^h\|_H^2 - \|u_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha\sum_{k=1}^N \|u_k^h\|_V^2\tau \leqslant 0.$$

Так как $u_0^h = u_N^h$, то получим $u_k^h = 0$ для всех $k = \overline{0,N}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть u_k^h, где $k = \overline{0,N}$, – решение задачи (4). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N \left(\|u_k^h\|_V^2\tau + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \left\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2 \tau \right) \leqslant C\sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{8}$$

Доказательство. Умножим уравнение в (4) скалярно в H на τu_k^h и возьмем удвоенную вещественную часть. Учитывая (1) и (6), получим оценку

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha\|u_k^h\|_V^2\tau \leqslant 2\|f_k^h\|_{V_h'}\|u_k^h\|_{V_h}\tau. \tag{9}$$

Так как

$$2\|f_k^h\|_{V_h'}\|u_k^h\|_{V_h}\tau \leqslant \alpha\|u_k^h\|_{V_h}^2\tau + \frac{1}{\alpha}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau\,,$$

то из (9) следует

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \alpha\|u_k^h\|_V^2\tau \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{10}$$

Суммируя оценки (10) по $k = \overline{1, N}$, получим

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \alpha\|u_k^h\|_V^2\tau\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{11}$$

Заметим теперь, что

$$\left\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2\tau = \|f_k^h - A_k^h u_k^h\|_{V_h'}^2\tau \leqslant 2\left(\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau + \|A_k^h u_k^h\|_{V_h'}^2\tau\right). \tag{12}$$

Из определения оператора A_k^h, оценок (1) и (3) следует

$$\|A_k^h u_k^h\|_{V_h'}^2\tau \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\overline{P_h}A(t)u_k^h\|_{V_h'}^2\,dt \leqslant M^2\|u_k^h\|_V^2\tau. \tag{13}$$

Таким образом, из (11), (12) и (13) получим

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2\tau \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau + M^2\sum_{k=1}^{N}\|u_k^h\|_V^2\tau\right) \leqslant 2\left(1 + \left(\frac{M}{\alpha}\right)^2\right)\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{14}$$

Оценка (8) следует теперь из (11) и (14). □

Лемма 3. *Пусть для $k = \overline{0, N}$ элементы $v_k^h \in V_h$. Пусть $N\tau = T$. Тогда*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|v_k^h\|_H^2 \leqslant 2\left(1 + \frac{c^2}{T}\right)\sum_{k=1}^{N}(\|v_{k-1}^h\|_V^2 + \|v_k^h\|_V^2)\tau + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2\tau\,, \tag{15}$$

где константа $c > 0$ такая, что $\|v\|_H \leqslant c\|v\|_V$ для всех $v \in V$.

Доказательство. Определим непрерывную кусочно-линейную функцию $v^h(t)$ со значениями в V_h, которая в $t \in [t_{k-1}, t_k]$ задается формулой

$$v^h(t) = v_{k-1}^h + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}(v_k^h - v_{k-1}^h)\,.$$

Поскольку функция $\|v^h(t)\|_H^2$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$, то для всех $t_0, t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\|v^h(t_0)\|_H^2 = \|v^h(t)\|_H^2 + \int\limits_{t}^{t_0}\frac{d}{ds}\big\|v^h(s)\big\|_H^2\,ds\,. \tag{16}$$

Так как $\frac{d}{ds}\|v^h(s)\|_H^2 = 2\mathrm{Re}(v^h(s)\,, \frac{d}{ds}v^h(s))$ почти всюду на $[0, T]$, то из (16) следует оценка

$$\|v^h(t_0)\|_H^2 \leqslant \|v^h(t)\|_H^2 + 2\left|\int\limits_{t}^{t_0}\|v^h(s)\|_V\big\|\frac{d}{ds}v^h(s)\big\|_{V_h'}\,ds\right| \leqslant$$

$$\|v^h(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds + \int\limits_0^T \Big\|\frac{d}{ds}v^h(s)\Big\|_{V_h'}^2\,ds\,. \qquad (17)$$

Интегрируем (17) по t от 0 до T.

$$T\|v^h(t_0)\|_H^2 \leqslant \int\limits_0^T \|v^h(t)\|_H^2\,dt + T\int\limits_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds + T\int\limits_0^T \Big\|\frac{d}{ds}v^h(s)\Big\|_{V_h'}^2\,ds\,. \qquad (18)$$

В силу непрерывного вложения $V \subset H$ получим $\|v^h(s)\|_H \leqslant c\|v^h(s)\|_V$. Тогда из (18) следует

$$T\|v^h(t_0)\|_H^2 \leqslant (c^2+T)\int\limits_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds + T\int\limits_0^T \|\frac{d}{ds}v^h(s)\|_{V_h'}^2\,ds\,.$$

Учитывая, что $t_0 \in [0,T]$ произвольно, из последней оценки следует

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v^h(t)\|_H^2 \leqslant \frac{c^2+T}{T}\int\limits_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds + \int\limits_0^T \|\frac{d}{ds}v^h(s)\|_{V_h'}^2\,ds\,. \qquad (19)$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds = \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|v^h(s)\|_V^2\,ds\,,$$

Проведем оценку

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|v^h(s)\|_V^2\,ds = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|v_{k-1}^h + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}(v_k^h - v_{k-1}^h)\right\|_V^2\,ds =$$

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\frac{t-t_{k-1}}{\tau}\,v_k^h + \left(1-\frac{t-t_{k-1}}{\tau}\right)v_{k-1}^h)\right\|_V^2\,ds \leqslant$$

$$2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|v_k^h\|_V^2\,ds + 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|v_{k-1}^h\|_V^2\,ds = 2(\|v_{k-1}^h\|_V^2\tau + \|v_k^h\|_V^2\tau).$$

Итак, получаем оценку

$$\int\limits_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds \leqslant 2\sum_{k=0}^N (\|v_{k-1}^h\|_V^2 + \|v_k^h\|_V^2)\tau. \qquad (20)$$

Рассмотрим теперь

$$\int\limits_0^T \|\frac{d}{ds}v^h(s)\|_{V_h'}^2\,ds = \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2 ds = \sum_{k=1}^N \left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2 \tau\,. \qquad (21)$$

Осталось заметить, что $v^h(t_k) = v_k^h$ для $k = \overline{0,N}$. Поэтому

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|v_k^h\|_H^2 \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v^h(t)\|_H^2\,. \qquad (22)$$

В результате оценка (15) следует из (22), (19), (20) и (21). □

Следствие 1. *Пусть* u_k^h, *где* $k=\overline{0,N}$, *– решение задачи (4). Тогда вместе с оценкой (8) выполняется оценка*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|u_k^h\|_H^2\leqslant C\sum_{k=1}^N\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{23}$$

Доказательство. Напомним, что $u_0^h=u_N^h$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^N(\|u_{k-1}^h\|_V^2+\|u_k^h\|_V^2)\tau=2\sum_{k=1}^N\|u_k^h\|_V^2\tau\,.$$

Отсюда, учитывая оценки (8) и (15), получаем оценку (23). □

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Лемма 4. *Пусть* $u(t)$ *— слабое решение задачи (2), а* u_k^h, *где* $k=\overline{0,N}$, *— решение задачи (4). Тогда для* $z_k^h=P_hu(t_k)-u_k^h$ *справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^N\left(\|z_k^h\|_V^2\tau+\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_H^2+\|(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\right)\leqslant$$

$$C\left(\int_0^T\big\|(I-P_h)u(t)\big\|_V^2\,dt+\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\big\|P_h[u(t_k)-u(t)]\big\|_V^2\,dt\right). \tag{24}$$

Доказательство. К (2) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство интегрируем по t от t_{k-1} до t_k, и делим на τ. Учитывая далее (4), получим тождество

$$\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+A_k^hz_k^h=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P_h}A(t)[P_hu(t_k)-u(t)]\,dt\,. \tag{25}$$

Заметим, что $z_0^h=z_N^h$. Тогда (25) можно рассматривать как задачу типа (4), а для z_k^h будут выполнены оценки подобные (8) и (23), то есть

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^N\left(\|z_k^h\|_V^2\tau+\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_H^2+\|(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\right)\leqslant C\sum_{k=1}^N\big\|\varphi_k^h\big\|_{V_h'}^2\tau\,, \tag{26}$$

где $\varphi_k^h=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P_h}A(t)[P_hu(t_k)-u(t)]\,dt$.

Учитывая (3) и (1), получим оценку

$$\sum_{k=1}^N\big\|\varphi_k^h\big\|_{V_h'}^2\tau\leqslant\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\big\|A(t)[P_hu(t_k)-u(t)]\big\|_{V'}^2\,dt\leqslant M^2\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\big\|P_hu(t_k)-u(t)\big\|_V^2\,dt\,. \tag{27}$$

Заметим, что $P_hu(t_k)-u(t)=(P_h-I)u(t)+P_h[u(t_k)-u(t)]$. С учетом последнего замечания оценка (24) следует непосредственно из (26) и (27). □

Перед формулировкой утверждения о погрешности отметим, что решение задачи (2) $u \in L_2(0,T;V)$ и, вообще говоря, значение в точке (на множестве меры нуль) $u(t_k) \in V$ не определено. Поэтому вместо $\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau$ имеет смысл оценивать

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt - u_k^h \Big\|_V^2 \tau \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2 dt.$$

Теорема 2. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2), а u_k^h, где $k = \overline{0,N}$, — решение задачи (4). Тогда справедливы оценки:*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N} \big\|u(t_k) - u_k^h\big\|_H^2 \leqslant C \Bigg(\max_{0\leqslant t\leqslant T} \big\|(I - P_h)u(t)\big\|_H^2 +$$

$$\int\limits_0^T \big\|(I - P_h)u(t)\big\|_V^2\,dt + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big\|P_h[u(t_k) - u(t)]\big\|_V^2\,dt \Bigg), \qquad (28)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2 dt \leqslant C \Bigg(\int\limits_0^T \big\|(I - P_h)u(t)\big\|_V^2\,dt + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big\|P_h[u(t_k) - u(t)]\big\|_V^2\,dt \Bigg), \qquad (29)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \Big\|_{V'}^2 \tau \leqslant 2 \int\limits_0^T \big\|(I - \overline{P}_h)u'(t)\big\|_{V'}^2 dt + 2 \sum_{k=1}^{N} \big\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\big\|_{V'}^2 \tau\,. \qquad (30)$$

Доказательство. Оценка (28) следует из неравенства треугольника и оценки (24).

Оценка (29) следует из равенства

$$u(t) - u_k^h = (I - P_h)u(t) + P_h[u(t) - u(t_k)] + z_k^h\,,$$

неравенства треугольника и оценки (24).

Для получения оценки (30) воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (I - \overline{P}_h)u'(t)\,dt + \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau},$$

из которого следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \Big\|_{V'}^2 \tau \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (I - \overline{P}_h)u'(t)\,dt \Big\|_{V'}^2 \tau + 2 \sum_{k=1}^{N} \big\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\big\|_{V'}^2 \tau \leqslant$$

$$2 \int\limits_0^T \big\|(I - \overline{P}_h)u'(t)\big\|_{V'}^2 dt + 2 \sum_{k=1}^{N} \big\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\big\|_{V'}^2 \tau\,. \quad \square$$

СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Перейдем к условиям, позволяющим из оценок (28), (29) и (30) делать вывод о сходимости погрешностей в соответствующих нормах к нулю.

Предположим, что задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств пространства V, которая является предельно плотной в V при $h \to 0$. Это означает, что для любого $v \in V$ при $h \to 0$

$$\|(I - Q_h)v\|_V \to 0\,, \tag{31}$$

где Q_h – ортогональный проектор пространства V на V_h.

Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ является предельно плотной последовательностью в H и V' [3].

Отметим также оценку для произвольного $v_h \in V_h$ [3]

$$\|v_h\|_{V'} \leqslant \|P_h\|_{V\to V}\, \|v_h\|_{V_h'}\,. \tag{32}$$

Предположим далее, что подпространства V_h удовлетворяют условиям:

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant r_1 h \|v\|_V, \tag{33}$$

$$\|v_h\|_V \leqslant r_2 h^{-1} \|v_h\|_H, \tag{34}$$

где r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и h.

Условие (33) типично для метода конечных элементов, а условие (34) в приложениях метода конечных элементов означает равномерное разбиение области пространственных переменных. Заметим, что в простейшем одномерном случае такими являются, например, подпространства непрерывных кусочно линейных на равномерной сетке функций [9], [10].

Из (33) и (34) следуют [3] необходимые в дальнейшем оценки:

$$\|\overline{P}_h\|_{V'\to V'} \leqslant \|P_h\|_{V\to V} \leqslant r_1 r_2 + 1\,, \tag{35}$$

$$\|v_h\|_H \leqslant r_2 h^{-1} \|u_h\|_{V_h'}\,. \tag{36}$$

Теорема 3. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а u_k^h, где $k = \overline{0,N}$, – решение задачи (4). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (33) и (44). Наконец, пусть τ и h такие, что $\tau h^{-2} \to 0$ при $h \to 0$. Тогда*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N} \left\|u(t_k) - u_k^h\right\|_H + \left(\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2 dt\right)^{1/2} +$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau\right)^{1/2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \tag{37}$$

Доказательство. С учетом (34) и (36) получим почти при всех $t \in (t_{k-1}, t_k)$ оценку

$$\|P_h[u(t_k) - u(t)]\,\|_V^2 = \left\|\int\limits_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)\,ds\right\|_V^2 \leqslant r_2^4 h^{-4} \left\|\int\limits_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)\,ds\right\|_{V_h'}^2 \leqslant r_2^4\, \tau\, h^{-4} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(t)\|_{V'}^2 dt.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h[u(t_k) - u(t)]\,\|_V^2\, dt \leqslant r_2^4\, \tau^2\, h^{-4} \int\limits_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2 dt. \tag{38}$$

Заметим также, что для любого $v \in V$ при $h \to 0$

$$\|(I - P_h)v\|_V = \|(I - P_h)(v - Q_h v)\|_V \leqslant (1 + \|P_h\|_{V\to V})\ \|(I - Q_h)v\|_V \to 0. \qquad (39)$$

Из оценок (28), (29), (38) и (39) теперь следует сходимость к нулю первых двух слагаемых в (37).

Перейдем к рассмотрению последнего в (37) слагаемого. Из (32) и (35) для $v_h \in V_H$ следует оценка $\|v_h\|_{V'} \leqslant (r_1 r_2 + 1)\|v_h\|_{V_h'}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{N} \big\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\big\|_{V'}^2 \tau \leqslant (r_1 r_2 + 1)^2 \sum_{k=1}^{N} \big\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\big\|_{V_h'}^2 \tau\,. \qquad (40)$$

Оценку (40) подставим в оценку (30) и воспользуемся оценкой (24). Заметим, что для любого $v \in V'$ при $h \to 0$, в силу предельной плотности последовательности $\{V_h\}$ в V',

$$\|(I - \overline{P}_h)v\|_{V'} \leqslant (1 + \|P_h\|_{V\to V})\ \|(I - S_h)v\|_{V'} \to 0\,, \qquad (41)$$

где S_h – ортогональный проектор пространства V' на V_h. Таким образом, стремление к нулю третьего слагаемого в (37) следует из (30), (24), (38), (39), (40) и (41). □

Далее покажем, что при условии дополнительной гладкости решения $u(t)$ из оценок теоремы 2 следует, что требование $\tau = o(h^2)$ в (15) можно существенно ослабить.

Следствие 2. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2) обладает дополнительной гладкостью*

$$u' \in L_p(0,T;H) \qquad (1 \leqslant p \leqslant 2)\,, \qquad (42)$$

а u_k^h, где $k = \overline{0,N}$, – решение задачи (4). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (33), (34). Наконец, пусть τ и h такие, что $\tau^{3/2-1/p}h^{-1} \to 0$ при $h \to 0$. Тогда вновь выполняется сходимость (37).

Доказательство. Как видно из доказательства теоремы 3, следует лишь модернизировать оценку (38).

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h[u(t_k) - u(t)]\,\|_V^2\, dt \leqslant r_2^2 h^{-2} \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big\| \int_t^{t_k} P_h u'(s) ds \Big\|_H^2 dt \leqslant$$

$$r_2^2 h^{-2} \tau \sum_{k=1}^{N} \Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(s)\|_H\, ds \Big)^2 \leqslant r_2^2\, \tau^{3-2/p} h^{-2} \Big(\int_0^T \|u'(t)\|_H^p\, dt \Big)^{2/p}. \quad \square \qquad (43)$$

Теперь предположим, что $u(t)$ – слабое решение задачи (2) обладает дополнительной гладкостью

$$u' \in L_p(0,T;V) \qquad (1 \leqslant p \leqslant 2)\,. \qquad (44)$$

В этом случае имеет смысл кроме (37) рассмотреть сходимость к нулю и выражения $\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau$. При этом не требуется согласования параметров τ и h.

Следствие 3. *Пусть для $u(t)$ – слабого решение задачи (2) выполняется (44), а u_k^h – решение задачи (4). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (33) и (34). Тогда при $\tau \to 0$ и $h \to 0$ вновь выполняется сходимость (37), а также*

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau \longrightarrow 0\,. \qquad (45)$$

Доказательство. Для получения сходимости (37), как и в следствии 2, следует модернизировать оценку (38).

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k)-u(t)]\|_V^2\,dt \leqslant (r_1r_2+1)^2\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\int\limits_{t}^{t_k}u'(s)\,ds\right\|_V^2 dt \leqslant$$

$$(r_1r_2+1)^2\tau^{3-2/p}\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_V^p\,ds\Bigg)^{2/p} \leqslant (r_1r_2+1)^2\tau^{3-2/p}\Bigg(\int\limits_{0}^{T}\|u'(t)\|_V^p\,dt\Bigg)^{2/p}. \qquad (46)$$

Чтобы получить (45), рассмотрим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau \leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_V^2dt + 2\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2dt \leqslant$$

$$2\tau^{3-2/p}\Bigg(\int\limits_{0}^{T}\|u'(t)\|_V^p\,dt\Bigg)^{2/p} + 2\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2dt\,. \qquad (47)$$

В правой части (47) первое слагаемое стремится к нулю при $\tau \to 0$, а сходимость к нулю второго слагаемого установлена выше. □

Покажем теперь, что из оценок (28)–(30) следуют и порядки скорости сходимости, не только по времени, но и по пространству.

Предполагаем далее, что существует гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ (см. [2, с.23]). Например, если оператор $A(t)$ порожден в области с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем

$$V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ H = L_2(\Omega),\ E = W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\,.$$

Если же на границе Ω задано краевое условие Неймана, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\ V = W_2^1(\Omega),\ E = W_2^2(\Omega)\,.$$

Пусть теперь подпространства $V_h \subset V$ такие, что для $v \in E$

$$\|(I-Q_h)v\|_V \leqslant rh\|v\|_E\,. \qquad (48)$$

Условие (48), как и (33), типично для метода конечных элементов [9], [10].

В [6] показано, что из (48) для $v \in V$ следует оценка (аналог леммы Обэна-Нитше)

$$\|(I-Q_h)v\|_H \leqslant rh\|(I-Q_h)v\|_V\,, \qquad (49)$$

из которой очевидным образом следует (33) с $r_1 = r$.

Отметим также, что для $v \in H$ из (48) следует [3] оценка

$$\|(I-P_h)v\|_{V'} \leqslant rh\|(I-P_h)v\|_H\,. \qquad (50)$$

Теорема 4. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а u_k^h – решение задачи (4). Пусть $\{V_h\}$ – последовательность конечномерных подпространств пространства V, для которой* *выполняются условия (48) и (34). Предположим, что решение $u(t)$ такое, что выполнено (42) с $p=2$ и*

$$u \in L_2(0,T;E)\,. \tag{51}$$

Тогда

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2 \leqslant C\left\{h^2\int\limits_0^T\big(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_H^2\big)dt+\tau^2h^{-2}\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{52}$$

Если же дополнительно предположить свойство (44), то

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2 \leqslant C\left\{h^2\int\limits_0^T\big(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_H^2\big)dt+\tau^{3-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{53}$$

Доказательство. Прежде всего заметим [11, с. 110], что если функция $v(t)$ такая, что $v\in L_2(0,T;V)$ и $v'\in L_2(0,T;V')$, то $v\in C([0,T],H)$ и выполняется оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(t)\|_H^2 \leqslant C\int\limits_0^T\Big(\|v(t)\|_V^2+\|v'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt\,.$$

В таком случае,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-P_h)u(t)\|_H^2 \leqslant C\int\limits_0^T\Big(\|(I-P_h)u(t)\|_V^2+\|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt\,. \tag{54}$$

Следовательно, оценка (28), с учетом (54) и (43), будет иметь вид

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2 \leqslant C_1\int\limits_0^T\Big(\|(I-P_h)u(t)\|_V^2+\|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt+C_2\tau^2h^{-2}\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\,. \tag{55}$$

Оценка (52) следует теперь из (55), (39), (35), (48) и (50).

Оценка (53) устанавливается аналогично. Следует только вместо (43) воспользоваться оценкой (46). $\square$

Теорема 5. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а u_k^h – решение задачи (4). Пусть $\{V_h\}$ – последовательность конечномерных подпространств пространства V, для которой выполняются условия (48) и (34). Предположим, что решение $u(t)$ такое, что выполнено (51) и (42) с $p=2$.*

Тогда

$$\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2dt \leqslant C\left\{h^2\int\limits_0^T\|u(t)\|_E^2\,dt+\tau^2h^{-2}\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{56}$$

Если же предположить свойства (51) и (44), то

$$\sum_{k=1}^N\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau \leqslant C\left\{h^2\int\limits_0^T\|u(t)\|_E^2dt+\tau^{3-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^pdt\right)^{2/p}\right\}. \tag{57}$$

Доказательство. Для доказательства (56) следует воспользоваться оценками (29), (39), (35), (48) и (43).

Оценка (57) следует из оценок (47), (29), (35), (48) и (46). □

Теорема 6. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а u_k^h – решение задачи (4). Пусть $\{V_h\}$ – последовательность конечномерных подпространств пространства V, для которой выполняются условия (48) и (34). Предположим, что решение $u(t)$ такое, что выполнено (51) и (42) с $p = 2$.*

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \leqslant C\left\{h^2\int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\right)dt + \tau^2 h^{-2}\int\limits_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{58}$$

Если же дополнительно предположить свойство (44), то

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \leqslant$$

$$C\left\{h^2\int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\right)dt + \tau^{3-2/p}\left(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^p dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{59}$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой (30), в которой первое слагаемое в правой части оценим, используя (50). В оценке второго слагаемого с помощью (32) и (35) переходим к норме пространства V_h'. Затем воспользуемся (24), и с учетом (39), (35), (48) и (43) получим окончательную оценку (58).

Доказательство (59) проводим подобным образом. Нужно только вместо (43) воспользоваться оценкой (46). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

[2] Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

[3] Смагин В.В. Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / В.В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 222–231.

[4] Смагин В.В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В.В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143–160.

[5] Смагин В.В. Энергетическая сходимость погрешности проекционно-разностного метода для слабо разрешимых параболических уравнений / В.В. Смагин // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1999. — № 4. — С. 114–119.

[6] Смагин В.В. Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами / В.В. Смагин // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 115–123.

[7] Нгуен Тыонг Хуен. Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 202–208.

[8] Вайникко Г.М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г.М. Вайникко, П.Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

[9] Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

[10] Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. — Ереван, 1979. — 236 с.

[11] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

REFERENCES

[1] Aubin J.-P. Approximate solution of the elliptic boundary problems. [Obe'n Zh.-P. Priblizhennoe reshenie e'llipticheskix kraevyx zadach]. Moscow: Mir, 1977, 384 p.

[2] Lions J.-L., Magenes E. Inhomogeneous boundary problems and its applications. [Lions Zh.-L. Neodnorodnye granichnye zadachi i ix prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 372 p.

[3] Smagin V.V. Convergence of the Galerkin's method of solution of the parabolic equation with a periodic condition on the solution. [Smagin V.V. Sxodimost' metoda Galerkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 222–231.

[4] Smagin V.V. Estimates of the velocity of convergence of projection-difference method for the weakly souble parabolic equations. [Smagin V.V. Ocenki skorosti sxodimosti proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metodov dlya slabo razreshimyx parabolicheskix uravnenij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1997, Vol. 188, no. 3, pp. 143–160.

[5] Smagin V.V. The power convergence of error of the projection-defference method for weakly souble parabolic equations. [Smagin V.V. E'nergeticheskaya sxodimost' pogreshnosti proekcionno-raznostnogo metoda dlya slabo razreshimyx parabolicheskix uravnenij]. *Trudy matematicheskogo fakul'teta Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta — Proceedings of the mathematical faculty of the Voronezh state University*, 1999, no. 4, pp. 114–119.

[6] Smagin V.V. Projection-difference methods of approximate solution of the parabolic equations with asymmetrical operators. [Smagin V.V. Proekcionno-raznostnye metody priblizhennogo resheniya parabolicheskix uravnenij s nesimmetrichnymi operatorami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2001, Vol. 37, no. 1, pp. 115–123.

[7] Nguen Tkhiong Huen. The convergence of projection-difference method of parabolic equation's approximate solution with an integral condition on the solution. [Nguen Tyong Xuen. Sxodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s integral'nym usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 202–208.

[8] Vaynikko G.M., Oya P.E. About the convergence and the velocity of convergence of the Galerkin's method for abstract evolutionary equations. [Vajnikko G.M., Oya P.E'. O sxodimosti i bystrote sxodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnyx e'volyucionnyx uravnenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1975, Vol. 11, no. 7, pp. 1269–1277.

[9] Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction to projective-difference methods. [Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Vvedenie v proekcionno-setochnye metody]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.

[10] Oganesyan L.A., Ruhovech L.A. Variational-difference methods for solving elliptic equations. [Oganesyan L.A., Ruxovec L.A. Variacionno-raznostnye metody resheniya e'llipticheskix uravnenij]. Yerevan, 1979, 236 p.

[11] Lions J.-L. The optimal control of systems, describing by the partial differential equations.

[Lions Zh.-L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi]. Moscow: Mir, 1972, 415 p.

Бондарев Андрей Сергеевич, магистрант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, бакалавр математики, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: obliskuratsiya@bk.ru

Bondarev Andrei Sergeevich, graduate student of the Department of Functional analysis and operation equations of the Maths faculty of the Voronezh State University, bachelor of mathematics, Voronezh, Russian Federation
E-mail: obliskuratsiya@bk.ru

Смагин Виктор Васильевич, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, доктор физико-математических наук, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: smagin@math.vsu.ru

Smagin Victor Vasilievich, Professor of the Department of functional analysis and operational equations, Mathematical faculty at Voronezh State University, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Voronezh, Russian Federation
E-mail: smagin@math.vsu.ru