УДК 517.953

О ЕДИНСТВЕННОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ*

А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.01.2014 г.

Аннотация: в работе доказывается единственность классического решения математической модели, которая описывает малые вынужденные колебания системы, состоящей из шарнирно соединённых стержней, помещённой во внешнюю среду с локализованными особенностями. Трудности изучения данной дифференциальной модели заключается в том, что внутренние и внешние особенности приводят к потере гладкости у решения. Эти проблемы мы обходим используя поточечный подход, состоящий в использовании производных по мере и показавший свою эффективность не только при анализе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима, но и нелинейных.

Ключевые слова: математическая модель, стержневая система, вынужденные колебания, единственность.

ABOUT UNIQUE CLASSICAL SOLUTION MATHEMATICAL MODEL OF FORCED VIBRATIONS ROD SYSTEM WITH SINGULARITIES

A. D. Baev, S. A. Shabrov, F. V. Golovaneva, Meach Mon

Abstract: in this paper we prove uniqueness of the classical solution of a mathematical model that describes small forced oscillations of a system consisting of pivotally connected by rods placed in an external environment with localized features. Difficulties in studying this differential model is that internal and external features lead to a loss of smoothness of the solution. These problems we avoid using the pointwise approach is to use derivatives as and shown to be useful not only in the analysis of linear ordinary differential equations of second order with the Radon–Nikodym, but also non-linear.

Keywords: mathematical model, system of rods, forced oscillations, uniqueness.

ВВЕДЕНИЕ

В работе доказывается единственность решения математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{dQ}{d\sigma}u + f(x,t), \\ u(0,t) = u''_{x\mu}(0,t) = u''_{x\mu}(\ell,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14–01–00867).

возникающей при моделировании малых вынужденных поперечных колебаний системы, состоящей из растянутых стержней, соединенных шарнирно. При этом в каждой точке шарнирного соединения имеется пружина, реагирующая исключительно на крутящий момент; конструкция находится во внешней среде, локальный коэффициент упругости которой равен dQ; коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого сделаны стержни, и отвечает за изгибную жесткость; $r(x) \geqslant 0$ — сила натяжения стержневой системы в точке x; функция $\mu(x)$ имеет особенности (в виде скачков) в точках шарнирного соединения стержней; $f(x,t)$ — сосредоточенная сила (если таковая присутствует), приложенная к шарниру в момент времени t, или плотность силы во всех остальных точках; мера σ, порождаемая строго возрастающей функцией $\sigma(x)$, содержит в себе все особенности модели — это и точки шарнирного соединения, и точки, в которых локализованы особенности внешней среды и присутствуют сосредоточенные массы; $M(x)$ — описывает распределение масс на системе, причем скачки $M(x)$ соответствуют случаю сосредоточенных масс. На концах система закреплена шарнирно.

Через $S(\sigma)$ обозначим точки разрыва функции $\sigma(x)$; σ-мера каждой точки $\xi \in S(\sigma)$ равна $\sigma\{\xi\} = \sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)$. В точках, принадлежащих $S(\sigma)$, уравнение в (1) принимает вид

$$\Delta M(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t) = -\Delta\left(\left(p(x)u''_{x\mu}\right)'_x\right)(\xi,t) + \Delta\left(ru'_x\right)(\xi,t) - u(\xi,t)\Delta Q(\xi) + f(\xi,t), \qquad (2)$$

где слагаемое $f(\xi,t)$ характеризует сосредоточенную силу, приложенную в точке ξ в момент времени t. Помимо условия (2), в точке ξ «присутствуют» еще три:

$$u(\xi-0,t) = u(\xi+0,t),$$

$$p(\xi)\frac{\Delta u'_x(\xi,t)}{\Delta\mu(\xi)} = p(\xi-0)u''_{x\mu}(\xi-0,t) = p(\xi+0)u''_{x\mu}(\xi+0,t).$$

Далее мы будем предполагать, что $S(\sigma) = S(\mu)$, т. е. дополнительных особенностей, порождаемых внешней средой и силой, не возникает.

Решение математической модели (1) мы ищем в классе E: функций $u(x,t)$, каждая из которых: непрерывна на $[0;\ell]\times[0;T]$; имеет непрерывные производные по переменной t до второго порядка включительно при фиксированном x; при постоянном t $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по x на $[0;\ell]$; $u'_x(x,t)$ — μ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; квазипроизводная $p(x)u''_{x\mu}(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; производные $u'''_{tx\mu}(x,t)$ и $u'''_{x\mu t}(x,t)$ равны почти всюду (в смысле меры $[\mu\times t]$, заданной на прямоугольнике $[0;\ell]\times[0;T]$); производные $u''_{tx}(x,t)$ и $u''_{xt}(x,t)$ равны почти всюду в смысле меры Лебега, определенной на $[0;\ell]\times[0;T]$.

Уравнение в (1) задано при всех (x,t), принадлежащих декартовому произведению $\overline{[0;\ell]}_\sigma\times[0;T]$. Множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ строится следующим образом. Напомним, что через $S(\sigma)$ мы обозначили множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, порождающей на $[0;\ell]$ меру σ. На $[0;\ell]$ введем метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x)-\sigma(y)|$. Очевидно, что метрическое пространство $([0;\ell],\varrho)$ неполно. Стандартное пополнение (с точностью до изоморфизма) этого пространства приводит к множеству $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$.

Проблема однозначной разрешимости, т.е. существование и единственность классического решения математической модели, реализующейся в виде начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, крайне важна для приложений (см., например, [1], [2], [3]), и особенно остра в случае наличия особенностей у объекта, которые приводят к потере гладкости решения. В то же время, применение теории обобщенных функций приводит к ряду трудно разрешимых задач. Во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции (и ее производных) на разрывную (эта проблема в полном объеме не решена до сих пор), во-вторых, обсуждается только слабая разрешимость уравнения (в тоже время для приложений важно знать значение решения (и его производных) в каждой точке).

При решении данного вопроса мы используем поточечный подход с применением производных по мере, предложенный Ю. В. Покорным [4] для одномерных граничных задач. Этот подход показал свою эффективность и для линейных уравнений второго порядка с непрерывными решениями [5], [6], [7], [8], [9], [10], и для нелинейных краевых задач с непрерывными решениями [11], [12], и для граничных задач второго порядка с разрывными решениями [13], и для дифференциальных уравнений четвертого порядка с производными по мере [14], [15].

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Если функции $p(x)$, $Q(x)$, $\mu(x)$ σ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$ и $\inf\limits_{[0;\ell]} p(x) > 0$, то математическая модель* (1) *не может иметь двух различных решений в классе E.*

Предположим, что существуют два различных на $[0;\ell]\times[0;T]$ решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ математической модели (1). Пусть (x^*,T^*) — точка, в которой решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ различны. Разность $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ является решением модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\dfrac{dQ}{d\sigma}u,\\ u(0,t)=u''_{x\mu}(0,t)=u''_{x\mu}(\ell,t)=u(\ell,t)=0,\\ u(x,0)=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0. \end{cases}$$

Тождество

$$M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{dQ}{d\sigma}u\equiv 0$$

умножим на $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, проинтегрируем по прямоугольнику $[0;\ell]\times[0;T^*]$ по мере $[\sigma\times t]$ и разобьем полученный интеграл на сумму четырех:

$$\int\limits_0^\ell\int\limits_0^{T^*} M'_\sigma(x)u''_{tt}u'_t\,dt\,d\sigma+\int\limits_0^\ell\int\limits_0^{T^*} u'_t\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma}\,dt\,d\sigma-$$

$$-\int\limits_0^\ell\int\limits_0^{T^*} u'_t\left(ru'_x\right)'_\sigma\,dt\,d\sigma+\int\limits_0^\ell\int\limits_0^{T^*} u'_tuQ'_\sigma\,dt\,d\sigma=0. \quad (3)$$

Первый интеграл в левой части равенства (3):

$$\int\limits_0^\ell\int\limits_0^{T^*} M'_\sigma(x)u''_{tt}u'_t\,dt\,d\sigma=\frac{1}{2}\int\limits_0^\ell M'_\sigma(x)\left(u'_t(x,T^*)\right)^2\,d\sigma,$$

так как $u'_t(x,0)=0$. Во втором интеграле поменяем порядок интегрирования (что возможно в силу теоремы Фубини), и внутренний интеграл дважды проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^\ell\int\limits_0^{T^*} u'_t\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma}\,dt\,d\sigma=\int\limits_0^{T^*}\left(\int\limits_0^\ell u'_t\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma}\,d\sigma\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{T^*}\left(u'_t\left(pu''_{x\mu}\right)'_x\Big|_{x=0}^{x=\ell}-\int\limits_0^\ell\left(pu''_{x\mu}\right)'_x\,d_x(u'_t)\right)dt=-\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^\ell\left(pu''_{x\mu}\right)'_x u''_{tx}\,dx\,dt=$$

$$= -\int\limits_0^{T^*} \left(pu''_{x\mu}u''_{tx}\Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int\limits_0^{\ell} pu''_{x\mu}d_x(u''_{tx}) \right) dt = \int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} pu''_{x\mu}u'''_{tx\mu}\,d\mu\,dt = \int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} pu''_{x\mu}u'''_{x\mu t}\,d\mu\,dt \quad (4)$$

(здесь мы воспользовались равенствами $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0,t) = \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell,t) = 0$ и свойствами функции, принадлежащей классу E). Применяя к интегралу в правой части (4) теорему Фубини, получим:

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} pu''_{x\mu}u'''_{x\mu t}\,d\mu\,dt = \int\limits_0^{\ell}\int\limits_0^{T^*} pu''_{x\mu}u'''_{x\mu t}\,dt\,d\mu = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} p(x)\left(u''_{x\mu}(x,T^*)\right)^2\,d\mu,$$

так как $u''_{x\mu}(x,0) = 0$.

Аналогично преобразуем третий интеграл в равенстве (3):

$$\int\limits_0^{\ell}\int\limits_0^{T^*} u'_t\left(ru'_x\right)'_\sigma\,dt\,d\sigma = \int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} u'_t\left(ru'_x\right)'_\sigma\,d\sigma\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{T^*}\left(u'_t r u'_x\Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int\limits_0^{\ell} ru'_x\,d_x(u'_t)\right) dt = -\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} r(x)u'_x u''_{tx}\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} r(x)\left(u'_x(x,T^*)\right)^2\,dx,$$

так как почти всюду $u''_{xt} = u''_{tx}$ и $u'_x(x,0) = 0$. Наконец, четвертый интеграл —

$$\int\limits_0^{\ell}\int\limits_0^{T^*} u'_t u Q'_\sigma\,dt\,d\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} u^2(x,T^*)Q'_\sigma(x)\,d\sigma.$$

Окончательно, (3) принимает вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} M'_\sigma(x)\left(u'_t(x,T^*)\right)^2\,d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} p(x)\left(u''_{x\mu}(x,T^*)\right)^2\,d\mu +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} r(x)\left(u'_x(x,T^*)\right)^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} u^2(x,T^*)Q'_\sigma(x)\,d\sigma = 0.$$

Но в правой части последнего равенства, в силу условий, стоит сумма неотрицательных слагаемых, следовательно, каждое из них равно нулю. Из равенства $\int\limits_0^{\ell} p(x)\left(u''_{x\mu}(x,T^*)\right)^2\,d\mu = 0$ вытекает, что $p(x)\left(u''_{x\mu}(x,T^*)\right)^2 = 0$ почти всюду (в смысле меры μ). Тогда и $u''_{x\mu}(x,T^*) = 0$ почти всюду, следовательно, в силу μ-абсолютной непрерывности $u'_x(x,T^*)$ на $[0;\ell]$ и абсолютной непрерывности $u(x,T^*)$ на $[0;\ell]$, при некоторых постоянных C_1 и C_2 имеем $u(x,T^*) = C_1 + C_2 x$, что, с учетом граничных условий $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$, нам дает тождество $u(x,T^*) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает единственность решения математической модели (1).

Замечание 1. *Выше мы показали единственность решения математической модели* (1) *с шарнирно закрепленными концами. Такой же результат можно гарантировать и в случае защемленных концов (граничные условия: $u(0,t) = u'_x(0,t) = u(\ell,t) = u'_x(\ell,t) = 0$).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М., 1961. — 400с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Издательство МГУ. — 1999. — 800с.

[3] Лакс П.Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. Издательство «РХД». — 2010. — 296с.

[4] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167–169.

[5] Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141.

[6] Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Покорный Ю.В. и др. — М.: Физматлит, 2009. — 192с.

[7] Покорный Ю.В. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

[8] Pokornyi Yu.V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — Т. 60, № 1. — С. 108–113.

[9] Pokornyi Yu.V. An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov, A.S. Ishchenko // Mathematical Notes. — 2007. — Т. 82, № 3–4. — С. 518–521.

[10] Pokornyi Yu.V. Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — Т. 119, № 6. — С. 769–787.

[11] Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

[12] Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

[13] Покорный Ю.В. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров, М.Б. Давыдова // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

[14] Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

[15] Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

REFERENCES

[1] Petrovsky I.G. Lectures on partial differential equations. [Petrovskij I.G. Lekcii ob uravneniyax s chastnymi proizvodnymi]. Moskow, 1961, 400p.

[2] Tikhonov A.N. and Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Moscow State University Press, 1999, 800p.

[3] Lax P.D. Hyperbolic partial differential equations. [Laks P.D. Giperbolicheskie differencial'nye uravneniya v chastnyx proizvodnyx]. Publisher "RHD", 2010, 296p.

[4] Pokorny Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives at least in ordinary differential equations. [Pokornyj Yu. V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 1999, Vol. 364, no 2, P. 167–169.

[5] Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, Vol. 63, issue. 1 (379), P. 98–141.

[6] Pokorny Yu. V. and etc. Sturm oscillation method in spectral problems. [Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moskow, Publisher physico-mathematical and technical literature, 2009, 192p.

[7] Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Ishchenko A. S., Shabrov S. A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu. V., Zvereva M. B., Ishhenko A. S., Shabrov S. A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, Vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

[8] Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, Vol. 60, no 1, pp. 108–113.

[9] Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Ishchenko A. S. An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem, Mathematical Notes, 2007, Vol. 82, no. 3–4, pp. 518–521.

[10] Pokornyi Yu. V., Shabrov S. A. Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, Vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

[11] Davydova M. B., Shabrov S. A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, Vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

[12] Davydova M. B., Shabrov S. A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

[13] Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Davydova M. B. Stieltjes differential pulsed problems with discontinuous solutions. [Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Davydova M. B. Differencial Stilt'esa v impul'snyx zadachax s razryvnymi resheniyami]. *Doklady Akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 2009, Vol. 428, no. 5, pp. 595–597.

[14] Shabrov S. A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S. A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

[15] Shabrov S. A. A necessary condition for a minimum of a quadratic functional with a Stieltjes integral. [Shabrov S. A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2012, Vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

Баев Александр Дмитриевич, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander Dmitrievich, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Шабров Сергей Александрович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shaspoteha@mail.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shaspoteha@mail.ru

Голованёва Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, Russian Federation
E-mail: gfainav@mail.ru

Меач Мон, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: meach_mon@yahoo.com

Meach Mon, graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: meach_mon@yahoo.com