УДК 517.956

А. Д. Баев, П. А. Кобылинский

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.03.2014 г.

Аннотация: статья посвящена исследованию свойств нового класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом. Псевдодифференциальные операторы, рассмотренные в статье, построены по специальному интегральному преобразованию, переводящему производные с весом в операцию умножения. Потребность в таких псевдодифференциальных операторах возникла при исследовании краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений. В статье доказана теорема об ограниченности рассмотренных псевдодифференциальных уравнений в специальных функциональных пространствах типа пространств С.Л. Соболева, нормы в которых зависят от комплексного параметра. Также доказана теорема о композиции этих псевдодифференциальных операторов. Показано, что суперпозиция рассмотренных псевдодифференциальных операторов не выводит из класса этих операторов.

Ключевые слова: преобразование Фурье, весовое преобразование, псевдодифференциальный оператор, псевдодифференциальный оператор с вырождением, композиция псевдодифференциальных операторов. ограниченность псевдодифференциальных операторов.

SOME PROPERTIES OF A CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS WITH DEGENERATION

A. D. Baev, P. A. Kobylinskii

Abstract: The article investigates the properties of a new class of weighted pseudodifferential operators with variable symbol. Pseudodifferential operators, discussed in the article, are built on a special integral transformation carrying derivatives with weight in the operation of multiplication. The need for such pseudodifferential operators emerged in the study of boundary value problems for degenerate differential equations. We proved that the boundedness of pseudo-differential equations considered in special functional spaces of type spaces SL Sobolev norms which depend on a complex parameter. Also prove a theorem on the composition of pseudodifferential operators. Shown that the composition of pseudodifferential operators is not considered out of the class of these operators.

Keywords: Fourier transform, weight conversion, pseudodifferential operator, pseudodifferential operator with degeneration, the composition of pseudodifferential operators. boundedness of pseudodifferential operators.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании математических моделей, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы, используются вырождающиеся эллиптические уравнения. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции — диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при математическом моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся в электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием. Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Основная трудность при исследовании краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений состоит в том, что младшие (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) члены уравнения влияют на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость. В связи с этим краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений в обычных соболевских пространствах не являются коэрцитивными.

Первые результаты о коэрцитивной разрешимости краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка принадлежат М. В. Келдышу [1]. В работах О. А. Олейник [2], С. Г. Михлина [3] и М. И. и М. И. Вишика [4] были построены обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Фундаментальные результаты по изучению асимптотических свойств решений линейных и нелинейных эллиптических и параболических уравнений и систем с вырождением были получены В. А. Кондратьевым [5], [6]. Затем был разработан метод “эллиптической регуляризации”, который был применен О. А. Олейник [7] и Дж. Коном и Л. Ниренбергом [8] для исследования эллиптико–параболических уравнений второго порядка. В работах В. П. Глушко [9], [10] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной выпуклой области была исследована в работе В. А. Рукавишникова, А. Г. Ереклинцева [11], а с несогласованным вырождением — в работе В. А. Рукавишникова [12].

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [13], [14]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [15], Х. Леопольдом [16], С. З. Левендорским [17], С. А. Исхоковым [18]. Отметим, что существенным условием работы [17] является условие принадлежности основной весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^{\infty}(R^1)$.

Дальнейшее развитие теории коэрцитивной разрешимости вырождающихся уравнений потребовало развития теории псевдодифференциальных операторов. Одним из направлений развития этой теории стало исследование весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [19]. Использование весовых псевдодифференциальных операторов с постоянным символом позволило доказать коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (см. [19]). Исследование весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом позволило исследовать новые классы вырождающихся уравнений высокого порядка (см. [20], [21]).

В настоящей статье получены теоремы об ограниченности и композиции одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ

Рассмотрим функцию $\alpha(t), t \in R^1_+$, которая обращается в нуль вместе со своей производной при $t = 0$. Предположим, что эта функция принимает положительные значения при $t > 0$ и стабилизируется на константу при $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Следуя [19], введём интегральное преобразование следующего вида

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}. \tag{1}$$

Это преобразование определено на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Можно показать, преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)} u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

В [19] показано, что для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(R^1_+)}$. Равенство Парсеваля дает возможность определить по непрерывности преобразование F_α на функциях из пространства $L_2(R^1_+)$. В [19] показано также, что обратное к F_α преобразование можно записать на функциях из $L_2(R^1)$ в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что преобразование F_α переводит оператор весового дифференцирования $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, в оператор умножения на двойственную переменную.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha,p} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{\frac{5}{2}-p_1}{\nu} + 1, \sigma + 1\}$, σ — некоторое действительное число.

Определим весовой псевдодифференциальный оператор (п. д. о.) по формуле

$$P(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1} F^{-1}_{\xi\to x}[p(t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{3}$$

Здесь $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1} F_{x_2\to\xi_2} \dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ преобразование Фурье, переводящее переменную $x \in R^{n-1}$ в переменную $\xi \in R^{n-1}$. $F^{-1}_{\xi\to x}$ — обратное преобразование Фурье.

Определим класс символов весового псевдодифференциального оператора.

Определение 2. Будем говорить, что символ $p\,(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$ — открытое множество, σ — действительное число, если функция $p\,(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} p\,(t,\xi,\eta) \right| \leqslant c_{m,l} \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}(\sigma - l\rho + j\delta)}$$

с константами $c_{m,l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in \Omega$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ и $Q(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $p(t,\xi,\eta)$ и $q(t,\xi,\eta)$, принадлежащими соответственно классам $S^{m_1}_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$ и $S^{m_2}_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$ (m_1 и m_2 — действительные числа). Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = \max\{m_1, m_2\}$. Тогда для любого $N \geqslant 0$ существует такое $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(t,\xi,\eta) \in S^{-N}_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$P(t, D_x, D_{\alpha,t}) Q(t, D_x, D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1 - 1} R_j(t, D_x, D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}).$$

Здесь $T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(t,\xi,\eta)$, а $R_j(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(t,\xi,\eta) = \frac{1}{j!} \partial^j_\eta \lambda(t,\xi,\eta) \cdot (\alpha(t)\partial_t)^j q(t,\xi,\eta).$$

Теорема 2. Пусть $p(t,\xi,\eta) \in S^m_{\alpha,\rho,0}(\Omega)$, m — действительное число. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = m$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

При $\rho = 1, \delta = 0$ утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, были доказаны в [20], при $\rho = 0, \delta \in [0; 1)$ аналогичные утверждения были доказаны в [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

[2] Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

[3] Михлин С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

[4] Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

[5] Кондратьев В. А. Об асимптотических свойствах решений нелинейного уравнения теплопроводности / В. А. Кондратьев // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 2. — С. 246–255.

[6] Кондратьев В. А. Об асимптотических свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях / В. А. Кондратьев // Труды конференции им. И. Г. Петровского. — М., 2006. — Вып. 25. — С. 98–111.

[7] Олейник О. А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник // Математический сб. — 1966. — Т. 69 (111), вып. 1. — С. 111–140.

[8] Кон Д. Некоэрцитивные краевые задачи / Д. Кон, Л. Ниренберг // Пседодифференциальные операторы : сб. науч. тр. — М., 1967. — С. 88–165.

[9] Глушко В. П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В. П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, вып. 3. — С. 87–88.

[10] Глушко В. П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В. П. Глушко // Труды Московского математического общества. — 1970. — Т. 23. — С. 113–178.

[11] Рукавишников В. А. О коэрцитивности R_ν–обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных / В. А. Рукавишников, А. Г. Ереклинцев // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 12. — С. 1680–1689.

[12] Рукавишников В. А. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с несогласованным вырождением исходных данных / В. А. Рукавишников // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 3. — С. 402–408.

[13] Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

[14] Вишик М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

[15] Глушко В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — № 2. — С. 49–68.

[16] Леопольд Х. Г. Априорные оценки для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с невырождающейся второй производной / Х. Г. Леопольд. — Новосибирск, 1981. — 33 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.08.81, № 4269–81.

[17] Левендорский С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сб. — 1980. — Т. 111 (153), вып. 4. — С. 483–501.

[18] Исхоков С. А. О Гладкости решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением / С. А. Исхоков // Докл. Академии наук. — 2001. — Т. 378, № 3. — С. 306-309.

[19] Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

[20] Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240 с.

[21] Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 2008. — Т. 422, №6. — С. 727–728.

[22] Зверева М.Б. Задача граничного управления дифференциальной системой с нелинейным условием /М.Б. Зверева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 182–191.

[23] Звягин А.В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А.В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.

[24] Баев А. Д., Садчиков П. В. О некоторых краевых задачах в полупространстве для одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2010. — Т. 10, № 2(88). — С. 34–41.

REFERENCES

[1] Keldysh M.V. On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the boundary. [Keldysh M. V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravnenij e'llipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Soviet Mathematics. Doklady*, 1951, Vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

[2] Oleinik O.A. About the equations of elliptic type degenerating on the boundary. [Olejnik O. A. Ob uravneniyax e'llipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Soviet Mathematics. Doklady*, 1952, Vol. 87, no. 6, pp. C. 885–887.

[3] Mihlin S.G. Degenerate Elliptic Equations. [Mixlin S. G. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya]. *Vestnik Leningradskogo Universiteta — Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

[4] Vishik M.I. Boundary value problems for elliptic equations degenerating on the the boundary area. [Vishik M. I. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1954, Vol. 35 (77), issue 33, pp. 513–568.

[5] Kondratiev V.A. On asymptotic properties of solutions of the nonlinear heat equation. [Kondrat'ev V. A. Ob asimptoticheskix svojstvax reshenij nelinejnogo uravneniya teploprovodnosti]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1998, Vol. 34, no. 2, pp. 246–255.

[6] Kondratiev V.A. On asymptotic properties of solutions of semilinear elliptic equations in cylindrical domains. [Kondrat'ev V. A. Ob asimptoticheskix svojstvax reshenij polulinejnyx e'llipticheskix uravnenij vtorogo poryadka v cilindricheskix oblastyax]. *Trudy konferencii im. I. G. Petrovskogo — Proceedings of the conference behalf of I. G. Petrovsky*, Moscow, 2006, issue 25, pp. 98–111.

[7] Oleinik O.A. About the linear equations of the second order with nonnegative characteristic form. [Olejnik O. A. O linejnyx uravneniyax vtorogo poryadka s neotricatel'noj xarakteristicheskoj formoj]. *Matematicheskij sbornik — Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1966, Vol. 69 (111), issue 1, pp. 111–140.

[8] Cohn D., Nirenberg L. Coercive boundary value problems. Pseudodifferential Operators: Collection of Scientific Papers. [Kon D., Nirenberg L. Nekoe'rcitivnye kraevye zadachi. Psevdodifferencial'nye operatory: sbornik nauchnyx trudov]. Moscow, 1967, pp. 88–165.

[9] Glushko V. P. Coercivity in L_2 general boundary value problems for degenerate elliptic equations of second order. [Glushko V. P. Koe'rcitivnost' v L_2 obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional Analysis and Its Applications*, 1968, Vol. 2, issue 3, pp. 87–88.

[10] Glushko V. P. The Estimates in the L_2 and the Solvability of General Boundary value Problems for Degenerate Elliptic Equations. [Glushko V. P. Ocenki v L_2 i razreshimost' obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vtorogo poryadka]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshhestva — Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 1970, Vol. 23, pp. 113–178.

[11] Rukavishnikov V. A., Ereklintsev A. G. About the coercivity of R_ν–generalized solution of the first boundary value problem with concerted degeneration of input data. [Rukavishnikov V. A., Ereklincev A. G. O koe'rcitivnosti R_ν–obobshhennogo resheniya pervoj kraevoj zadachi s soglasovannym vyrozhdeniem isxodnyx dannyx]. *Differencial'nye uravneniya — Differential*

Equations, 2005, Vol. 41, no. 12, pp. 1680–1689.

[12] Rukavishnikov V. A. About the Dirichlet problem for second order elliptic equation with non-coordinated degeneration of input data. [Rukavishnikov V. A. O zadache Dirixle dlya e'llipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka s nesoglasovannym vyrozhdeniem isxodnyx dannyx]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1996, Vol. 32, no. 3, pp. 402–408.

[13] Vishik M. I., Grushin V. V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating on the the boundary area. [Vishik M. I., Grushin V. V. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1969, Vol. 80 (112), issue 4, pp. 455–491.

[14] Vishik M. I., Grushin V. V. The Degenerate Elliptic Differential and Pseudodifferential Operators. [Vishik M. I., Grushin V. V. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, Vol. 25, issue 4, pp. 29–56.

[15] Glushko V. P. Theorems solvability of boundary value problems for a class degenerating elliptic equations of higher order. [Glushko V. P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: trudy seminara akademika S. L. Soboleva — Differential equations with partial derivatives: Proceedings of the Seminar of Academician S. L. Sobolev*, Novosibirsk, 1978, no. 2, pp. 49–68.

[16] Leopold H. G. A priori estimates for degenerate elliptic equations of higher order with nondegenerate second derivative. [Leopol'd X. G. Apriornye ocenki dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka s nevyrozhdayushhejsya vtoroj proizvodnoj]. Novosibirsk, 1981. — 33. — Dep. VINITI 29.08.81, № 4269–81.

[17] Levendorskii S. Z. Boundary-value problems in a halfspace for quasi-elliptic pseudodifferential operators degenerate on the boundary. [Levendorskij S. Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvazie'llipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1980, Vol. 111 (153), issue 4, pp. 483–501.

[18] Iskhokov S. A. On the Smoothness of the solutions of elliptic equations with nonpower degeneracy. [Isxokov S. A. O Gladkosti resheniya e'llipticheskogo uravneniya s nestepennym vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 378, no. 3, pp. 306–309.

[19] Baev A. D. The Degenerate elliptic equations of high order and related pseudodifferential operators with them. [Baev A. D. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Soviet Mathematics. Doklady*, 1982, Vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

[20] Baev A. D. Qualitative methods in the theory of boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A. D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij]. Voronezh: Voronezh State University, 2008, 240 p.

[21] Baev A. D. About general boundary value problems in a halfspace for degenerate elliptic equations of higher order. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, Vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

[22] Zvereva M. B. The problem of boundary control of a differential system with nonlinear condition. [Zvereva M. B. Zadacha granichnogo upravleniya differencial'noj sistemoj s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 182–191.

[23] Zviagin A. V. Investigation of the solvability of a stationary non-Newtonian fluid motion model in an unbounded domain. [Zvyagin A.V. Issledovanie razreshimosti odnoj stacionarnoj

modeli dvizheniya nen'yutonovoj zhidkosti v neogranichennoj oblasti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya. Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 118–121.

[24] Baev A. D., Sadchikov P. V. About some boundary value problems in a half-space for a class of pseudodifferential equations with degeneration. [Baev A. D., Sadchikov P. V. O nekotoryx kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx uravnenij s vyrozhdeniem]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2010, Vol. 10, no. 2(88), pp. 34–41.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander Dmitrievich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Analysis, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Кобылинский П. А., аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация

Kobylinskii P. A., graduate student, Department of Mathematical Analysis, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation