УДК 517.927

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 14.06.2013 г.

Аннотация: Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

$$x''(t) + a(t)(Tx)^{\frac{p}{q}} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad p, q \in (1, \infty) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \\ \alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — действительные числа, $a(t)$ — положительная суммируемая функция, $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный (монотонный) непрерывный оператор.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

В работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены достаточные условия единственности положительного решения для краевой задачи (1)–(2).

Ключевые слова: конус, полуупорядоченность, оператор, положительное решение, краевая задача.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE POSITIVE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER NONLINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

G. E. Abduragimov

Abstract: Let's denote space $C[0,1]$ through C, space $L_p(0,1)$ through L_p $(1 < p < \infty)$ and space of functions, determined on $[0,1]$ with absolute uninterrupted derivative through W^2.

Boundary value

$$x''(t) + a(t)(Tx)^{\frac{p}{q}} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad p, q \in (1, \infty) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x(0)+\alpha_{12}x(1)+\beta_{11}x'(0)+\beta_{12}x'(1)=0,\\ &\alpha_{21}x(0)+\alpha_{22}x(1)+\beta_{21}x'(0)+\beta_{22}x'(1)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

whereα_{ij}, β_{ij} $(i,j=1,2)$ are real numbers, $a(t)$ is a positive added function, $T:C\to L_p$ $(1<p<\infty)$ is a linear positive (monotone) uninterrupted operator.

Under the positive solution of the problem (1)–(2) we shall consider the function $x\in W^2$, positive in the interval $(0,1)$, satisfying almost everywhere the equation (1) and boundary conditions (2).

On the basis of the theory of semi regulated spaces the sufficient conditions of solving the boundary value problem (1)–(2) are received in this article.

Keywords: cone, semi regulation, operator, positive solution, boundary value problem.

Нелинейные краевые задачи для функционально–дифференциальных уравнений находятся в центре внимания многих исследователей благодаря многочисленным приложениям (в биологии, химии, математической экономике, экологии, задачах управления техническими системами и т.д.). Такие задачи естественно возникают при математическом моделировании объектов (процессов, явлений), для которых линейные модели дают слишком грубое описание или вовсе невозможно.

Вопросам исследования существования и единственности положительных решений для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, например [1]–[11]. Практически во всех вышеупомянутых работах естественным орудием исследования положительных решений являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений нелинейных операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

В работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения для одного нелинейного функционально – дифференциального уравнения второго порядка.

Для сокращения обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1<p<\infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t)+a(t)(Tx)^{\frac{p}{q}}=0,\quad 0<t<1,\quad p,q\in(1,\infty) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x(0)+\alpha_{12}x(1)+\beta_{11}x'(0)+\beta_{12}x'(1)=0,\\ &\alpha_{21}x(0)+\alpha_{22}x(1)+\beta_{21}x'(0)+\beta_{22}x'(1)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i,j=1,2)$ — действительные числа, $a(t)$ — положительная суммируемая функция, $T:C\to L_p$ $(1<p<\infty)$ — линейный положительный (монотонный) непрерывный оператор.

Под положительным решением задачи (1) - (2) будем понимать функцию $x\in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

Предположим $\alpha_{11}+\alpha_{12}\neq 0$, $\alpha_{21}+\alpha_{22}\neq 0$ и введем обозначения

$$\alpha\equiv\frac{\alpha_{12}+\beta_{11}+\beta_{12}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}},\quad \beta\equiv\frac{\alpha_{22}+\beta_{21}+\beta_{22}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}.$$

При выполнении условий:

A) $\alpha\neq\beta$;

B) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha)-\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right]<0$;

C) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha)-\frac{\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right]>0$;

D) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha-\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta\right]>0$;

E) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta+1\right]<0$

как показано в [12], функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2) существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s)=\begin{cases} a_1(s)(t-\alpha)+a_2(s)(t-\beta), 0\leqslant t\leqslant s;\\ b_1(s)(t-\alpha)+b_2(s)(t-\beta), s\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

где

$$a_1(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta-\frac{\alpha_{22}s+\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\right],\quad a_2(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{12}s+\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}-\alpha\right],\quad s\in[0,1],$$

$$b_1(s)=\frac{\alpha_{21}s-\beta_{21}}{(\beta-\alpha)(\alpha_{21}+\alpha_{22})},\quad b_2(s)=\frac{\alpha_{11}s-\beta_{11}}{(\alpha-\beta)(\alpha_{11}+\alpha_{12})},\quad s\in[0,1].$$

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)a(s)(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{3}$$

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)a(s)(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)ds,\quad 0<t<1, \tag{4}$$

действует в пространстве C, вполне непрерывен ([13], с. 161) и оставляет инвариантным конус $\widetilde{K}$ неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$\min_{t\in[0,1]} x(t)\geqslant\frac{m}{M}\max_{t\in[0,1]} x(t)=\frac{m}{M}\left\|x\right\|_C,$$

где m и M представляют собой нижние и верхние оценки функции Грина.

Теорема. Предположим, что $\frac{p}{q}<1$, выполнены условия A)–E), а также

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{p}{q}+1}\int\limits_0^1 a(s)(T1)^{p/q}(s)ds\geqslant\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\|T\|_{L_p}^{\frac{p}{q}}.$$

Тогда краевая задача (1) – (2) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u\prec v$ и $u\bar{\prec}v$ в конусе $\widetilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(t)\leqslant v(t)$ и $u(t)>v(t)$, $t\in[0,\ 1]$.

Покажем, что найдется такое число $r>0$, что при $x\in\widetilde{K}$, $\|x\|_C\leqslant r$ и $x\neq 0$

$$Ax\bar{\prec}x. \tag{5}$$

Действительно, в силу монотонности оператора $T:C\to L_p$ имеем

$$(Ax)(t)\geqslant m\int\limits_0^1 a(s)\left(Tx\right)^{p/q}(s)ds\geqslant\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}}\|x\|_C^{p/q}\int\limits_0^1 a(s)\left(T1\right)^{p/q}(s)ds\geqslant$$

$$\geqslant \frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}} r^{\frac{p}{q}-1} \int\limits_0^1 a(s)\left(T1\right)^{p/q}(s)ds \cdot x(t).$$

Отсюда при $0 < r < \left(\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}} \int\limits_0^1 a(s)\left(T1\right)^{p/q}(s)ds \right)^{\frac{q}{q-p}}$ следует (4).

Найдем теперь $R > 0$ такое, что для всех $\varepsilon > 0$ при $x \in \widetilde{K}$ и $\|x\|_C \geqslant R$

$$Ax \bar{\succ} (1+\varepsilon)x. \tag{6}$$

Имеем

$$\left(Ax\right)(t) \leqslant M \int\limits_0^1 a(s)\left(Tx\right)^{p/q}(s)ds \leqslant M\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \|Tx\|_{L_p}^{p/q} \leqslant M\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \gamma^{p/q}\|x\|_C^{p/q} \leqslant$$

$$\leqslant M\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \gamma^{p/q} R^{\frac{p}{q}-1}\|x\|_C \leqslant \frac{M^2}{m}\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \gamma^{p/q} R^{\frac{p}{q}-1} \cdot x(t),$$

где λ — норма оператора $T : C \to L_p$. Отсюда при $R > \left(\frac{M^2}{m}\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}} \gamma^{p/q}\right)^{\frac{q}{q-p}}$ следует (5).

Легко проверить, что $r \leqslant R$. Из (4) и (5) следует, что положительный оператор (3) является сжатием конуса $\widetilde{K}$. Тогда согласно теореме ([14], с. 145) о сжатии конуса оператор (3) имеет в конусе $\widetilde{K}$ пространства C по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2).

Для доказательства единственности положительного решения, покажем, что вогнутый и монотонный оператор A, определяемый равенством (3) является u_0-вогнутым, $u_0 \in \widetilde{K}$ ([14], с. 199).

Действительно, для любого положительного числа $\lambda \in (0,\ 1)$ в силу монотонности оператора $T : C \to L_p$, имеем

$$(A(\lambda x)(t)) = \int\limits_0^1 G(t,s)a(s)(T(\lambda x)^{\frac{p}{q}})(s)ds = \lambda^{\frac{p}{q}}\left(Ax\right)(t) = \lambda^{\frac{p}{q}-1} \cdot \lambda\left(Ax\right)(t).$$

Положив в определении u_0 - вогнутости $\eta = \lambda^{\frac{p}{q}-1} - 1$ и взяв в качестве $u_0(t) \equiv 1$ в соответствии с теоремой ([14], с. 200) краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение.

Замечание. В случае $\frac{p}{q} > 1$существование и единственность положительного решения краевой задачи (1)–(2) следует из [15].

В качестве примера, иллюстрирующего выполнение условий настоящей теоремы, рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + (S_{1/2}x)^{\frac{1}{2}}(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} x(0) - 9x'(0) = 0, \\ 10x(0) - 99x'(0) - x'(1) = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$(S_{1/2}x)(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1/2, \\ x(t-1/2), & 1/2 < t < 1. \end{cases}$$

Легко убедиться, что функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (8) существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} 0{,}1(t+9), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (-9{,}9-s)(t+9)+(s+9)(t+10), & s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

причем $0{,}9 \leqslant G(t,s) \leqslant 1$, $(t,s \in [0,1])$.

Существование и единственность положительного решения краевой задачи (6)–(8) очевидным образом следует из вышеприведенной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Азбелев Н.В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, П.М. Симонов // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2009. — вып. 1. — С. 3–23.

[2] F. H. Wong, S. P. Wang, T.G. Chen. Existence of positive solutions for second order functional differential equations // Computers & Mathematics with Applications. — 2008. — V. 56, Issue 10. — P. 2580–2587.

[3] Ma R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations // Appl. Math. Comput. — 2007. — V. 193, № 1. — P. 66–72.

[4] M. Zima. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces // Journal of Inequalities and Applications. — 2000. V. 6, Issue 3. — P. 359–371.

[5] Agarwal, Ravi P. Stanek, Svatoslav. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № 4. — P. 755–770.

[6] C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong. Existence of positive solutions for functional equations // Computer & Mathematics with Applications. — 2000. — V. 40, Issues 6–7. — P.783–792.

[7] Y. Sun, M. Han, L. Debnath. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — V. 190, Issue 1. — P. 699–704.

[8] P. Weng, D. Jiang. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE // Computers & Mathematics with Applications. — 1999. — V. 37, Issue 10. — P. 1–9.

[9] C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. — 2004. — V. 297, № 1. — P. 14–23.

[10] F. Yin, F. Fugi, Y. Li. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations // J. Math. Study. — 2002. — V. 35, № 4. — P. 364–370.

[11] R. Agarwal, S, Stanмk. Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № 4. — P. 755–770.

[12] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[13] Крейн С.Г. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

[14] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962. — 396 с.

[15] Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения второго порядка / Г.Э. Абдурагимов // Известия вузов. Математика. — 2006. — № 5. С. 3–7.

REFERENCES

[1] Azbelev N. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Functional differential equations and applications. [Azbelev N. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Funkcional'no-differencial'nye uravneniya i ix prilozheniya]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika — Bulletin of Udmurt University, Mathematics*, 2009, Issue 1, pp. 3–23.

[2] Wong F. H., Wang S. P., Chen T.G. Existence of positive solutions for second order functional differential equations. Computers & Mathematics with Applications. 2008, V. 56, Issue 10, pp. 2580–2587.

[3] Ma R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations. Appl. Math. Comput. 2007, V.193, no. 1, pp. 66–72.

[4] Zima M. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces. Journal of Inequalities and Applications. 2000, Vol. 6, Issue 3, pp. 359–371.

[5] Agarwal, Ravi P.; Stanek, Svatoslav. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. 2007, Appl. 16, No. 4, pp. 755–770.

[6] Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for functional equations. Computer & Mathematics with Applications, Vol. 40, Issues 6–7, September-October 2000, pp. 783–792.

[7] Sun Y., Han M., Debnath L. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations. Applied Mathematics and Computation, Vol. 190, Issue 1, 1 July 2007, pp. 699–704.

[8] Weng P., Jiang D. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE. Computers & Mathematics with Applications, Vol. 37, Issue 10, May 1999, pp. 1–9.

[9] Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 2004, Vol. 297, no. 1, pp. 14–23.

[10] Yin F., Fugi F., Li Y. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations. J. Math. Study, 2002, Vol. 35, no. 4, pp. 364–370.

[11] Agarwal R., Staněk S, Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. Appl. 2007, Vol. 16, no. 4, pp. 755–770.

[12] Naimark M. A. Linear differential operators. [Linejnye differencial'nye operatory]. Moscow: Nauka, 1969. 528 p.

[13] Krein S.G. Functional analysis and other mathematics. [Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Nauka, 1972. 544 p.

[14] Krasnosel'skii M. A. Positive solutions of operator equations. [Polozhitel'nye resheniya operatornyx uravnenij]. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 396 p.

[15] Abduragimov G. E. On the existence and uniqueness of the positive solution of a boundary value problem for a second-order nonlinear functional-differential equation. [Abduragimov G.E. O sushhestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya kraevoj zadachi dlya odnogo nelinejnogo funkcional'no–differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Izvestiya vuzov. Matematika – Proceedings of the higher educational institutions. Mathematics*, 2006, no. 5. pp. 3–7.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, доцент кафедры математико–экономических методов Дагестанского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Махачкала, Российская Федерация
E-mail: gusen_e@mail.ru

Abduragimov Gusen Elderhanovich, Assistant Professor, Department of Mathematical and Economical Methods, Daghestan State University, docent, Makhachkala, Russian Federation
E-mail: gusen_e@mail.ru