УДК 517.95

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 19.02.2013 г.

Аннотация: в данной работе предлагается методика изучения обратной задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка. Доказываются существование и единственность решения данной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, нелинейное уравнение высшего порядка, суперпозиция дифференциальных операторов, метод характеристик, существование и единственность решения.

Abstract: in this paper it is proposed a method of studying an inverse problem for a nonlinear partial integro-differential equation of the higher order. It is proved the existence and uniqueness of the solution of this problem.

Keywords: inverse problem, nonlinear equation of the higher order, superposition of differential operators, the method of characteristics, the existence and uniqueness of the solution.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков.

Выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методов решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, началась сформироваться еще в XVIII веке. Характеристики замечательны тем, что дифференциальные выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции по направлению вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик.

В области $D \equiv D_T \times R$ рассматривается нелинейное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x) =$$

$$= p(t)u(t,x) + f\left(t,x,u(t,x)\right) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t,x)_{|t=0} = \varphi_1(x), \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t,x)_{|t=0} = \varphi_{i+1}(x), x \in R, i = \overline{1, 2n+m-1} \quad (2)$$

и дополнительным условием

$$u(t,x)_{|x=x_0} = \psi(t), \quad x_0 \in R, \quad (3)$$

где $f(t,x,u) \in C(D \times R)$, $\varphi_i(x) \in C(R)$, $i = \overline{1, 2n+m}$, $K(t,x) \in C(D)$, $0 < \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,x)dxdy < \infty$, $0 \neq \psi(t) \in C^{2n+m}(D_T)$, $D_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$, n, m — произвольные натуральные числа, $u(t,x), p(t)$ — неизвестные функции.

Определение. Решением обратной задачи (1)-(3) называется пара функций: $\left\{u(t,x) \in C^{2n+m,2n+m}(D), p(t) \in C(D_T)\right\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2) и (3).

Отметим, что дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка локально решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к характеристической системе. С физической точки зрения это означает двойственность описания явлений при помощи волн и при помощи частиц. Применение метода характеристик к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц [1]. В работах [2]–[4] разработана методика для интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. По сути, данная методика ближе к методу характеристик и её авторы называли методом дополнительного аргумента.

В настоящей работе воспользуемся методом характеристик для интегрирования нелинейных уравнений в частных производных (см. [5, 6]).

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2)

Теорема 1. Задача Коши (1), (2) и следующее интегральное уравнение эквивалентны

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \left(x - \int\limits_0^t u(s,x)ds \right) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi_{m+j} \left(x - s \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \varphi_{n+m+k} \left(x + s \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta \right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} \left[p(s)u(s,x) + f\left(s,x,u(s,x)\right) \right] ds, \quad (4)$$

где x — играет роль параметра.

Доказательство. Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u=L_2^n\left[L_1^n[L_0^m[u]]\right],$$

где $L_2\left[L_1^n[L_0^m[u]]\right]\equiv\left(L_1^n[L_0^m[u]]\right)_t-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\left(L_1^n[L_0^m[u]]\right)_x$, $L_1[L_0^m[u]]\equiv\left(L_0^m[u]\right)_t+\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\left(L_0^m[u]\right)_x$, $L_0[u]=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)u$.

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$L_2^n\left[L_1^n[L_0^m[u]]\right]=p(t)u(t,x)+f\left(t,x,u(t,x)\right). \tag{5}$$

Из (5) видно, что уравнение (1) имеет две n-кратные и одну m-кратную характеристики: 1) $x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds=C_1$; 2) $x-t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds=C_2$, 3) $x-\int\limits_0^t u(s,x)ds=C_3$, где C_i — произвольные постоянные, $i=\overline{1,3}$. Тогда, интегрируя уравнения (5) n раз вдоль линии первой характеристики, получаем

$$L_2^{n-1}\left[L_1^n[L_0^m[u]]\right]=\Phi_1\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)+\int\limits_0^t[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)]ds, \tag{6}$$

$$L_2^{n-2}\left[L_1^n[L_0^m[u]]\right]=\Phi_2\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)+$$
$$+\Phi_1\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)t+\int\limits_0^t(t-s)\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds, \tag{7}$$

. . . .

$$L_1^n[L_0^m[u]]=\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds, \tag{8}$$

где Φ_i $(i=\overline{1,n})$ — произвольные непрерывные функции на действительной оси, которые подлежат определению.

Действительно, из (6), в силу начального условия (2), имеем $\Phi_1(x)=\varphi_{2n+m}(x)$. Так как вдоль линии первой характеристики

$$\frac{dL_1^n\left[L_0^m[u]\right]}{dt}=\frac{\partial L_1^n\left[L_0^m[u]\right]}{\partial t}+\frac{\partial L_1^n\left[L_0^m[u]\right]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=$$

$$=\left(L_1^n\left[L_0^m[u]\right]\right)_t-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\left(L_1^n\left[L_0^m[u]\right]\right)_x,$$

. . . .

$$\frac{d^nL_1^n\left[L_0^m[u]\right]}{dt^n}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_1^n\left[L_0^m[u]\right],\qquad(9)$$

то, в силу условия (2), из (7) и (8) однозначно определяем остальных функций

$$\Phi_2(x)=\varphi_{2n+m-1}(x),\ldots,\Phi_n(x)=\varphi_{n+m+1}(x).$$

Тогда уравнение (8) приобретает следующий вид

$$L_1^n\left[L_0^m[u]\right]=\sum_{i=1}^n\varphi_{n+m+i}\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds.\qquad(10)$$

Аналогично, интегрируя уравнения (10) n раз вдоль линии второй характеристики, получаем

$$L_1^{n-1}\left[L_0^m[u]\right]=\Phi_{n+1}\left(x-t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\varphi_{n+m+i}\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{i-1}}{(i-1)!}ds+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^n}{n!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds,\qquad(11)$$

$$L_1^{n-2}\left[L_0^m[u]\right]=\Phi_{n+2}\left(x-t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)+$$
$$+\Phi_{n+1}\left(x-t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)t+$$
$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t(t-s)\varphi_{n+m+i}\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{i-1}}{(i-1)!}ds+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds, \quad (12)$$

. . . .

$$L_0^m[u(t,x)] = \sum_{i=n+1}^{2n} \Phi_i\left(x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{t^{2n-i}}{(2n-i)!}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{n+m+j}\left(x + s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds, \quad (13)$$

где Φ_i $(i=\overline{n+1,2n})$ — произвольные непрерывные функции на действительной оси, которые подлежат определению.

Из (11), в силу начального условия (2), имеем $\Phi_{n+1}(x)=\varphi_{n+m}(x)$. Так как вдоль линии первой характеристики справедливо (9), то вдоль линии второй характеристики

$$\frac{dL_0^m[u(t,x)]}{dt} = \frac{\partial L_0^m[u(t,x)]}{\partial t} + \frac{\partial L_0^m[u(t,x)]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} =$$
$$= (L_0^m[u(t,x)])_t + \int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds(L_0^m[u(t,x)])_x, \ldots$$
$$\ldots, \frac{d^n L_0^m[u(t,x)]}{dt^n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_0^m[u(t,x)]. \quad (14)$$

Тогда, в силу (2), из (12) и (13) получаем, что

$$\Phi_{n+2}(x)=\varphi_{n+m-1}(x), \ldots, \Phi_{2n}(x)=\varphi_{1+m}(x).$$

Отсюда имеем следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_0^m[u(t,x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{m+i}\left(x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{n+m+j}\left(x + s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds. \quad (15)$$

Интегрируя теперь уравнения (15) m раз вдоль линии третьей характеристики, получаем

$$L_0^{m-1}[u] = \Phi_{2n+1}\left(x - \int\limits_0^t u(s,x)ds\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t \varphi_{m+i}\left(x-s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{i-1}}{(i-1)!}ds+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\varphi_{n+m+j}\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds, \quad (16)$$

$$L_0^{m-2}[u]=\Phi_{2n+2}\left(x-\int\limits_0^t u(s,x)ds\right)+\Phi_{2n+1}\left(x-\int\limits_0^t u(s,x)ds\right)t+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t (t-s)\varphi_{m+i}\left(x-s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{i-1}}{(i-1)!}ds+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi_{n+m+j}\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds, \quad (17)$$

. . . .

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{m}\Phi_{2n+i}\left(x-\int\limits_0^t u(s,x)ds\right)\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\varphi_{m+j}\left(x-s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\varphi_{n+m+k}\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}ds+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[p(s)u(s,x)+f\left(s,x,u(s,x)\right)\right]ds, \quad (18)$$

где Φ_i $(i=2\overline{n+1,2n+m})$ — произвольные непрерывные функции на действительной оси, которые подлежат определению.

Из (16), в силу начального условия (2), имеем $\Phi_{2n+1}(x)=\varphi_m(x)$. Так как вдоль линии первой характеристики справедливо (9), вдоль линии второй характеристики — (14), то вдоль линии третьей характеристики справедливо

$$\frac{du(t,x)}{dt}=\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x),\ldots,$$

$$\frac{d^m u(t,x)}{dt^m} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right)^m u(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x). \tag{19}$$

Тогда, в силу (2), из (17) и (18) получаем, что

$$\Phi_{2n+2}(x) = \varphi_{m-1}(x), \ldots, \Phi_{2n+m}(x) = \varphi_1(x).$$

Отсюда получаем нелинейное интегральное уравнение (4).

В (4) отметим, что функции $\varphi_1\left(x - \int\limits_0^t u(s,x)ds\right)$, $\varphi_2\left(x - \int\limits_0^t u(s,x)ds\right), \ldots,$ $\varphi_m\left(x - \int\limits_0^t u(s,x)ds\right)$ являются первыми интегралами уравнения: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x) = 0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Производные этих функций вдоль третьей характеристики равны нулю и сами функции удовлетворяют данному уравнению.

Функции $\varphi_{m+1}\left(x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right), \varphi_{m+2}\left(x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right), \ldots,$ $\ldots, \varphi_{m+n}\left(x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)$ являются первыми интегралами уравнения: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(t,x) = 0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Вдоль второй характеристики эти функции удовлетворяют данному уравнению.

А функции $\varphi_{m+n+1}\left(x + t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right), \varphi_{m+n+2}\left(x + t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right),$ $\ldots, \varphi_{m+2n}\left(x + t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)$ являются первыми интегралами уравнения: $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(t,x) = 0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Вдоль первой характеристики эти функции удовлетворяют данному уравнению.

Исходя из этих соображений, покажем, что интегральное уравнение (4) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (1). Путем $(2n+m)$-кратного дифференцирования из (4) получаем

$$\frac{d^{2n+m}u(t,x)}{dt^{2n+m}} = p(t)u(t,x) + f\left(t,x,u(t,x)\right), \tag{20}$$

где x — играет роль параметра.

Так как вдоль линии первой характеристики справедливо (8), вдоль линии второй характеристики — (13) и вдоль линии третьей характеристики — (18), то имеем

$$\frac{d^{2n+m}u(t,x)}{dt^{2n+m}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x).$$

Отсюда заключаем, что из обыкновенного дифференциального уравнения (20) следует дифференциальное уравнение в частных производных (1). Теорема доказана.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ ФУНКЦИИ $p(t)$

Теорема 2. Восстанавливаемая функция $p(t)$ задачи (1)-(3) в области D_T однозначно определяется равенством

$$p(t) = \frac{g^{(2n+m)}(t)}{\psi(t)}, \tag{21}$$

где $g^{(2n+m)}(t) = \psi^{(2n+m)}(t) - f(t, x_0, \psi(t))$.

Доказательство. В силу условия (3), из уравнения (4) имеем

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \left(x_0 - \int_0^t \psi(s) ds \right) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi_{m+j} \left(x_0 - s \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \varphi_{n+m+k} \left(x_0 + s \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} \left[p(s)\psi(s) + f(s, x_0, \psi(s)) \right] ds$$

или

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1} \psi(s)}{(2n+m-1)!} p(s) ds = g(t), \tag{22}$$

где

$$g(t) = \psi(t) - \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \left(x_0 - \int_0^t \psi(s) ds \right) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi_{m+j} \left(x_0 - s \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \varphi_{n+m+k} \left(x_0 + s \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds -$$

$$- \int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} f(s, x_0, \psi(s)) ds.$$

Уравнение (22) является интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно восстанавливаемой функции $p(t)$. Дифференцируя обе части этого уравнения $2n+m$ раза вдоль линии соответствующих характеристик, получаем (21).

4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Для произвольной непрерывной в области D функции $h(t,x)$ норму вводим следующим образом: $\|h(t,x)\| = \max\limits_{(t,x)\in D} |h(t,x)|$. Аналогично вводится норма для функции одной переменной.

Теорема 3. Пусть выполняются следующие условия:

1. $$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i(x)\| \frac{T^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_{m+j}(x)\| \int\limits_0^T \frac{(T-s)^{m-1} s^{j-1}}{(m-1)!(j-1)!} ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_{n+m+k}(x)\| \int\limits_0^T \frac{(T-s)^{n+m-1} s^{k-1}}{(n+m-1)!(k-1)!} ds + \int\limits_0^T \frac{(T-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} \|f(s,x,0)\| ds < \infty;$$

2. $\varphi_i(x) \in Lip\left\{L_{i|x}\right\}, 0 < L_i = const < \infty, i = \overline{1, 2n+m}$;

3. $f(t,x,u) \in Lip\left\{L_0(t)_{|u}\right\}, 0 < \int\limits_0^T L_0(t)dt < \infty$;

4. $\rho < 1$, где

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} L_i \frac{T^i}{(i-1)!} + \sum_{j=1}^{n} L_{m+j} \int\limits_0^T \frac{(T-s)^{m-1} s^j}{(m-1)!(j-1)!} \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y) dy d\theta ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} L_{n+m+k} \int\limits_0^T \frac{(T-s)^{n+m-1} s^k}{(n+m-1)!(k-1)!} \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y) dy d\theta ds +$$

$$+ \int\limits_0^T \frac{(T-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} \left[\frac{\left\|g^{(2n+m)}(s)\right\|}{\|\psi(s)\|} + L_0(s) \right] ds.$$

Тогда функция $u(t,x)$ задачи (1)–(3), существует и единственно в области D.

Доказательство. Подставляя (21) в (4), окончательно имеем нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $u(t,x)$:

$$u(t,x) = \Theta(t,x;u) \equiv \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \left(x - \int\limits_0^t u(s,x) ds \right) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi_{m+j} \left(x - s \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y) u(\theta,y) dy d\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \varphi_{n+m+k} \left(x + s \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y) u(\theta,y) dy d\theta \right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} \left[\frac{g^{(2n+m)}(s)}{\psi(s)} u(s,x) + f\left(s,x,u(s,x)\right) \right] ds, \tag{23}$$

где x — играет роль параметра.

Для нелинейного интегрального уравнения (23) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} u_0(t,x)=0, \\ u_{k+1}(t,x)\equiv \Theta(t,x;u_k), k=0,1,2,\ldots. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда, в силу условий теоремы, из (24) получаем, что справедливы следующие оценки

$$\|u_1(t,x)-u_0(t,x)\|\leqslant \Delta; \tag{25}$$

$$\|u_{k+1}(t,x)-u_k(t,x)\|\leqslant \sum_{i=1}^{m} L_i \frac{T^{i-1}}{(i-1)!}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t \|u_{k+1}(s,x)-u_k(s,x)\|ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{n} L_{m+j}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}s^j}{(m-1)!(j-1)!}\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y)\,\|u_k(\theta,y)-u_{k-1}(\theta,y)\|dyd\theta ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} L_{n+m+k}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}s^k}{(n+m-1)!(k-1)!}\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\theta,y)\,\|u_k(\theta,y)-u_{k-1}(\theta,y)\|dyd\theta ds+$$

$$+\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[\frac{\left\|g^{(2n+m)}(s)\right\|}{\|\psi(s)\|}+L_0(s)\right]\|u_k(s,x)-u_{k-1}(s,x)\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant \rho\,\|u_k(t,x)-u_{k-1}(t,x)\|\,. \tag{26}$$

Из оценок (25) и (26) следует, что оператор в правой части (23) является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку в области D.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из доказанных выше трех теорем следует, что при выполнении условий теоремы 3 обратная задача (1)–(3) имеет единственную пару решений $\left\{u(t,x)\in C^{2n+m,2n+m}(D), p(t)\in C(D_T)\right\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. — М.: Мехмат МГУ, 1999. — 95 с.

[2] Иманалиев М. И., Ведь Ю. А. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 23, № 3. — С. 465–477.

[3] Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. РАН. — 1992. — Т. 323, № 3. — С. 410–411.

[4] Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. РАН. — 1992. — Т. 325, № 6. — С. 111–1115.

[5] Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестник ТомГУ. Математика и Механика. — 2012. — № 2. — С. 56–62.

[6] Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка // Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2012. — Вып. 6, № 11 (270). — С. 35–41.

Юлдашев Турсун Камалдинович, к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики, докторант, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
E-mail: tursunbay@rambler.ru
Тел.: 8–923–372–51–79

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Associate professor of Higher Mathematics Department, Siberian State Aerospace University
E-mail: tursunbay@rambler.ru
Tel.: 8–923–372–51–79