УДК 517.957

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАЛКИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДУ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА МАЛЫХ ПАРАМЕТРА

Н. А. Письменный

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.02.2013 г.

Аннотация: в данной работе метод малого параметра применяется к решению задачи о существовании и единственности периодических решений нелинейной системы дифференциальных уравнений с двум малыми параметрами.

Ключевые слова: периодические решения, нелинейная система дифференциальных уравнений с двумя параметрами, теорема Малкина.

Abstract: in this paper, the small parameter method is applied to the problem of the existence and the uniqueness of periodic solutions for nonlinear differential equations with two small parameters.

Keywords: periodic solutions, the nonlinear system of differential equations with two parameters, Malkin's theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, многие важные задачи теории колебаний сводятся к задаче о периодических решениях ОДУ, содержащих различные параметры, которые из общих соображений можно считать малыми. Вопрос о существовании и нахождении периодических решений систем, близких к некоторым нелинейным, поведение решений которых известно, достаточно хорошо изучен, начиная с работ Пуанкаре [1] конца позапрошлого века. В Советском Союзе первые результаты по теории нелинейных колебаний были получены Н. М. Боголюбовым и Н. Н. Крыловым [2]. Позднее эта теория получила свое развитие в работах В. В. Немыцкого, В. В. Степанова [3], А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина [4], М. А. Красносельского [5]. Отметим монографию И. Г. Малкина [6], в которой рассмотрены задачи существования, единственности, а также устойчивости решений систем нелинейных колебаний с одним малым параметром. Другие интересные результаты в задачах содержащих малый параметр можно найти в работе [7]. Достаточно полная теория периодических и почти периодических колебаний рассмотрена в недавней монографии В. Ш. Бурда [8]. В перечисленных монографиях речь идет о качественной теории дифференциальных уравнений, поскольку аналитическое решение подобных систем, как правило, найти невозможно. Вопрос о существовании периодических решений нелинейных систем ОДУ с двумя малыми параметрами, насколько известно автору, в литературе не рассматривался. В совместной статье автора с И. Н. Кутищевым и Е. В. Рачинским [9] доказан принцип усреднения для системы нелинейных дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами.

В этой статье изучена система нелинейных колебаний с автономной периодической правой частью содержащей два малых независимых положительных параметра.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1). \end{array}\right. \tag{1}$$

Предполагается, что $f_1, f_2 : R^n \to R^n, \gamma_1, \gamma_2 : R^1 \times \ R^n \to R^n$, γ_1, γ_2 являются T-периодическими функциями по первой переменной, т.е.

$$\gamma_1(t+T, x_1) \equiv \gamma_1(t, x_1), \gamma_2(t+T, x_1) \equiv \gamma_2(t, x_1),$$

μ_1, μ_2- малые положительные параметры. Функции $f_1, f_2, \gamma_1, \gamma_2$ имеют непрерывные производные по соответствующим пространственным переменным x_1, x_2.

При нулевых значениях параметров μ_1 и μ_2 система (1) распадается на два автономных уравнения:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1), \tag{2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2), \tag{3}$$

каждое из которых имеет T-периодические решение $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ соответственно. В силу автономности уравнений (2) и (3) они допускают семейство параметрических решений $\varphi_1(t, h_1) = \varphi_1(t+h_1), \varphi_2(t, h_2) = \varphi_2(t+h_2)$, где h_1, h_2 — одномерные параметры, назовем эти решения порождающими. Также предполагается, что 1-является простым собственным значением у операторов сдвига по траектории линеаризованных на φ_1, φ_2 уравнений (2) и (3). Будем искать условия, при которых система (1) допускает периодическое решение, обращающееся при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ в $\varphi_1(t, 0), \varphi_2(t, 0)$.

С этой целью обозначим $x_1(t, \xi_1, \mu_1, \mu_2), x_2(t, \xi_2, \mu_1, \mu_2)$ решение системы (1) с начальными условиями ξ_1, ξ_2:

$$\begin{cases} x_1(0, \xi_1, \mu_1, \mu_2) = \xi_1, \\ x_2(0, \xi_2, \mu_1, \mu_2) = \xi_2. \end{cases} \tag{4}$$

Введем в рассмотрение функции $\psi_1(\xi_1, \mu_1, \mu_2), \psi_2(\xi_2, \mu_1, \mu_2)$:

$$\begin{cases} \psi_1(\xi_1, \mu_1, \mu_2) = x_1(T, \xi_1, \mu_1, \mu_2) - x_1(0, \xi_1, \mu_1, \mu_2), \\ \psi_2(\xi_2, \mu_1, \mu_2) = x_2(T, \xi_2, \mu_1, \mu_2) - x_2(0, \xi_2, \mu_1, \mu_2). \end{cases}$$

При $\mu_1 = \mu_2 = 0$ система (1), как уже было сказано, обращается в уравнения (2) и (3), следовательно,

$$\begin{cases} x_1(t, \varphi_1(0, 0), 0, 0) = \varphi_1(t, 0), \\ x_2(t, \varphi_2(0, 0), 0, 0) = \varphi_2(t, 0). \end{cases} \tag{5}$$

Условия T-периодичности по t искомых решений x_i, $i = 1, 2$ будут иметь вид:

$$\begin{cases} \psi_1(\xi_1, \mu_1, \mu_2) = 0, \\ \psi_2(\xi_2, \mu_1, \mu_2) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Введем координатное разложение векторов ψ_i и ξ_i, то есть $\psi_i = (\psi_{i1}, \psi_{i2}, \ldots, \psi_{in})$, $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}), i = 1, 2$ Как было отмечено, система (6) допускает семейство решений $\xi_1 = \varphi_1(0, h_1), \xi_2 = \varphi_2(0, h_2)$, вследствие чего следующие функциональные определители необходимо обращаются в нуль:

$$\left. \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_{11}}{\partial\xi_{11}} & \frac{\partial\psi_{11}}{\partial\xi_{12}} & \ldots & \frac{\partial\psi_{11}}{\partial\xi_{1n}} \\ \frac{\partial\psi_{12}}{\partial\xi_{11}} & \frac{\partial\psi_{12}}{\partial\xi_{12}} & \ldots & \frac{\partial\psi_{12}}{\partial\xi_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_{1n}}{\partial\xi_{11}} & \frac{\partial\psi_{1n}}{\partial\xi_{12}} & \ldots & \frac{\partial\psi_{1n}}{\partial\xi_{1n}} \end{vmatrix} \right|_{\mu_1=\mu_2=0} = 0, \tag{7}$$

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\psi_{21}}{\partial\xi_{21}} & \frac{\partial\psi_{21}}{\partial\xi_{22}} & \dots & \frac{\partial\psi_{21}}{\partial\xi_{2n}} \\ \frac{\partial\psi_{22}}{\partial\xi_{21}} & \frac{\partial\psi_{22}}{\partial\xi_{22}} & \dots & \frac{\partial\psi_{22}}{\partial\xi_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_{2n}}{\partial\xi_{21}} & \frac{\partial\psi_{2n}}{\partial\xi_{22}} & \dots & \frac{\partial\psi_{2n}}{\partial\xi_{2n}} \end{matrix}\right|\Bigg|_{\mu_1=\mu_2=0} = 0. \tag{8}$$

Так как единица является простым собственным значением у оператора сдвига по траектории линеаризованных на φ_1, φ_2 систем (2) и (3), то хотя бы один минор порядка $n-1$ каждого определителя (7),(8) отличен от нуля. Возможно так выбрать базис, что невырождены будут следующие матрицы:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\psi_{11}}{\partial\xi_{11}} & \frac{\partial\psi_{11}}{\partial\xi_{12}} & \dots & \frac{\partial\psi_{11}}{\partial\xi_{1n-1}} \\ \frac{\partial\psi_{12}}{\partial\xi_{11}} & \frac{\partial\psi_{12}}{\partial\xi_{12}} & \dots & \frac{\partial\psi_{12}}{\partial\xi_{1n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_{1n-1}}{\partial\xi_{11}} & \frac{\partial\psi_{1n-1}}{\partial\xi_{12}} & \dots & \frac{\partial\psi_{1n-1}}{\partial\xi_{1n-1}} \end{matrix}\right|\Bigg|_{\mu_1=\mu_2=0} \neq 0, \tag{9}$$

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\psi_{21}}{\partial\xi_{21}} & \frac{\partial\psi_{21}}{\partial\xi_{22}} & \dots & \frac{\partial\psi_{21}}{\partial\xi_{2n-1}} \\ \frac{\partial\psi_{22}}{\partial\xi_{21}} & \frac{\partial\psi_{22}}{\partial\xi_{22}} & \dots & \frac{\partial\psi_{22}}{\partial\xi_{2n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_{2n-1}}{\partial\xi_{21}} & \frac{\partial\psi_{2n-1}}{\partial\xi_{22}} & \dots & \frac{\partial\psi_{2n-1}}{\partial\xi_{2n-1}} \end{matrix}\right|\Bigg|_{\mu_1=\mu_2=0} \neq 0. \tag{10}$$

Перепишем систему (6) покоординатно,

$$\begin{cases} \psi_{11}(\xi_{11},\dots,\xi_{1n},\mu_1,\mu_2) = 0, \\ \dots \\ \psi_{1n}(\xi_{11},\dots,\xi_{1n},\mu_1,\mu_2) = 0, \\ \psi_{21}(\xi_{11},\dots,\xi_{1n},\mu_1,\mu_2) = 0, \\ \dots \\ \psi_{2n}(\xi_{11},\dots,\xi_{1n},\mu_1,\mu_2) = 0. \end{cases}$$

Вследствие условий (9) и (10) первые $n-1$ локальных уравнений, а также уравнения, начиная с $n+1$-го и заканчивая $2n-1$-м, системы разрешимы относительно $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \mu_1, \mu_2$. Подставляя значения этих решений $\xi_{11},\dots,\xi_{1n-1},\xi_{21},\dots,\xi_{2n-1}$ через ξ_{1n}, ξ_{2n} в оставшиеся два уравнения последней системы, при $\mu_1 = \mu_2 = 0$, получим для определения ξ_{1n} и ξ_{2n} систему из двух уравнений.

Функции ψ_1, ψ_2 допускают в окрестности точки $\xi_1 = \varphi_1(0,0), \xi_2 = \varphi_2(0,0)$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, непрерывные частные производные первого порядка. Раскладывая по первому приближению систему (6), получим эквивалентную ей:

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1}\xi_1 + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\mu_1}\mu_1 + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\mu_2}\mu_2 + \zeta_1(\xi_1,\mu_1,\mu_2), \\ \psi_2 = \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\xi_2}\xi_2 + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\mu_1}\mu_1 + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\mu_2}\mu_2 + \zeta_2(\xi_2,\mu_1,\mu_2). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\zeta_1(\xi_1,\mu_1,\mu_2), \zeta_2(\xi_2,\mu_1,\mu_2)$ — некоторые функции, обращающиеся в нуль при $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Посчитаем отдельно производные, стоящие в правой части системы (11). Напомним, что $\psi_1(\xi_1,\mu_1,\mu_2) = x_1(T,\xi_1,\mu_1,\mu_2) - \xi_1$. Тогда продифференцировав по ξ_1 последнее равенство, получим:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1}=\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}-E_n. \tag{12}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений с периодическими коэффицентами, являющихся уравнениями в вариациях системы (2) для решения $\varphi_1(t,0)$:

$$\dot{y_1}=f_1'(\varphi_1(t,0))y_1. \tag{13}$$

Так как $x_1(t,\xi_1,0)$ является решением уравнеия (2), обращающимся при $\xi_1=\varphi_1(0,0)$ в $\varphi_1(t,0)$, то каждый из n-векторов $(\{\frac{\partial x_{1i}}{\partial\xi_{1j}}\}^{j=1,\dots,n}_{\xi_{1j}=\varphi_{1j}},\ i=1,\dots,n)$ определяют частное решение уравнения в вариациях (13).

В связи с этим, равенство (12) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1}=y_1(T)-E. \tag{14}$$

Вычислим $\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu_1}$ по правлу дифференцирования решения ОДУ по параметру:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}(f_1(x_1)+\mu_1\gamma_1(t,x_2))|_{x_i=\varphi_i(t,0),\mu_i=0}+\frac{\partial}{\partial\mu_1}(f_1(x_1))+\mu_1\gamma_1(t,x_2))|_{x_i=\varphi_1(t,0),\mu_i=0},$$

после несложных преобразований приходим к окончательному виду:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu_1}=f_1'(\varphi_1(t,0))\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu_1}+\gamma_1(t,\varphi_2). \tag{15}$$

Так как $x_1(0,\xi_1,\mu_1,\mu_2)=\xi_1$, из равенства (15), (6) следует, что:

$$\frac{\partial\psi_1(0,\xi_1,\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_1}=0. \tag{16}$$

Следовательно, функции $\frac{\partial\psi_1(t,\xi_1,\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_1}$ образуют частное решение уравнения (15) с нулевым начальным условием. Из [10] известно, что решение линейного неоднородного уравнения может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial\psi_1(t,\xi_1,\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_1}=\int\limits_0^t Y_1(t,\tau)\gamma_1(\tau,\varphi_2(\tau,0),0)d\tau, \tag{17}$$

здесь за $Y_1(t,\tau)$ обозначена фундаментальная система решений уравнения (13) с начальным условием $Y_1(\tau,\tau)=E$.

Таким образом, первое уравнение системы (11) примет вид:

$$\psi_1=(Y_1(T,0)-E)\xi_1+\mu_1\int\limits_0^T Y_1(T,\tau)\gamma_1(\tau,\varphi_2(\tau,0),0)d\tau=0. \tag{18}$$

Аналогично преобразовывается второе уравнение системы (11), в результате получим эквивалентную ей преобразованную систему:

$$\begin{cases}\psi_1=(Y_1(T,0)-E)\xi_1+\mu_1\int\limits_0^T Y_1(T,\tau)\gamma_1(\tau,\varphi_2(\tau,0),0)d\tau=0,\\ \psi_2=(Y_2(T,0)-E)\xi_2+\mu_2\int\limits_0^T Y_2(T,\tau)\gamma_2(\tau,\varphi_1(\tau,0),0)d\tau=0.\end{cases} \tag{19}$$

Через $z_1(t)$, $z_2(t)$ обозначим периодическое решение сопряженной к системе в вариациях:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} + (f_1'(\varphi_1(t,0))^* z_1 = 0, \\ \dfrac{dz_2}{dt} + (f_2'(\varphi_2(t,0)))^* z_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Домножим скалярно на $z_1(T), z_2(T)$ первое и второе уравнение системы (19):

$$\begin{cases} \langle (Y_1(T,0) - E)\xi_1, z_1(T)\rangle + \mu_1 \int\limits_0^T \langle Y_1(T,\tau)\gamma_1(\tau, \varphi_2(\tau,0),0)\rangle, z_1(T)\rangle d\tau = 0, \\ \langle (Y_2(T,0) - E)\xi_2, z_2(T)\rangle + \mu_2 \int\limits_0^T \langle Y_2(T,\tau)\gamma_2(\tau, \varphi_1(\tau,0),0), z_2(T)\rangle d\tau = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Связь решений сопряженной системы представляется в виде:

$$z_i(t) = Y_i(t,\tau) z_i(\tau), \tag{22}$$

по свойству скалярного произведения получаем:

$$\begin{cases} \langle Y_1(T,0)\xi_1, z_1(T)\rangle - \langle \xi_1, z_1(T)\rangle + \\ +\mu_1 \int\limits_0^T \langle Y_1(T,\tau)\gamma_1(\tau, \varphi_2(\tau,0),0), z_1(T)\rangle d\tau = 0, \\ \langle Y_2(T,0)\xi_2, z_2(T)\rangle - \langle \xi_2, z_2(T)\rangle + \\ +\mu_2 \int\limits_0^T \langle Y_2(T,\tau)\gamma_2(\tau, \varphi_1(\tau,0),0), z_2(T)\rangle d\tau = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Применяя равенство (22) к первому и второму уравнениям системы получаем:

$$\begin{cases} \mu_1 \int\limits_0^T \langle \gamma_1(\tau, \varphi_2(t,0)), z_1(\tau)\rangle d\tau = 0, \\ \mu_2 \int\limits_0^T \langle \gamma_2(\tau, \varphi_1(t,0)), z_2(\tau)\rangle d\tau = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Введем функции P_1, P_2:

$$\begin{cases} P_1(h_1,h_2) = \int\limits_0^T \langle \gamma_1(\tau, \varphi_2(\tau,h_2)), z_1(\tau)\rangle d\tau, \\ P_2(h_1,h_2) = \int\limits_0^T \langle \gamma_2(\tau, \varphi_1(\tau,h_1)), z_2(\tau)\rangle d\tau. \end{cases} \tag{25}$$

Так как μ_1, μ_2 малые положительные параметры, то разделив каждое из уравнений системы (15) на μ_1, μ_2, соответственно, получим:

$$\begin{cases} P_1(h_1,h_2) = 0, \\ P_2(h_1,h_2) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Как было показано система (26) допускает решение $(h_1, h_2) = (0, 0)$, что является необходимым условием периодичности искомых решений.

Вернемся к системе (11). Условие единственности периодического решения определяется невырожденностью матрицы из частных производных по параметрам:

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial h_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial h_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial h_2} \end{vmatrix}\right|_{(0,0)} \neq 0, \tag{27}$$

что как показано выше эквивалентно условию неравенства нулю следующего определителя:

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial h_1} & \frac{\partial P_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial h_1} & \frac{\partial P_2}{\partial h_2} \end{vmatrix}\right|_{(0,0)} \neq 0. \tag{28}$$

На основании чего приходим к теореме.

Теорема. *Для того, чтобы система (1) допускала ветвь периодических решений, при $\mu_1, \mu_2 > 0$ обращающееся при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ в семество периодических решений порождающей системы $T-$периодических решений $\varphi_1(t, 0)$ и $\varphi_2(t, 0)$, необходимо, чтобы выполнялось условие (26) при $h_1 = h_2 = 0$. Если при этом выполняется условие (27), то найденное решение действительно существует и является единственным периодическим в окрестности $\varphi_1(t, 0), \varphi_2(t, 0)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Poincare H. Celestial mechanics. — Paris: Gauthier-Villars, 1892. — 392 с.

[2] Крылов Н.М., Боголюбов Н.И. Введение в нелинейную механику. (Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики). — Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1937. — 364 с.

[3] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 550 с.

[4] Андронов А.А. Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит, 1959. — 915 с.

[5] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 331 с.

[6] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. — 490 с.

[7] Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975. — 247 с.

[8] Burd V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval. — Florida: Chapman and Hall/CRC, 2007. — 356 с.

[9] Кутищев И.Н. Метод усредния для квазилинейной однородной системы с двумя малыми параметрами имеющей периодические коэффиценты / И.Н. Кутищев, Н.А. Письменный, Е.В. Рачинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 152-156.

[10] Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. — М.: Физматлит, 2007. — 448 с.

Письменный Никита Алексеевич, аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет
E-mail: n.pismennyy@gmail.com
Тел.: (4732)208771

Pismenny Nikita Alekseevich, Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University
E-mail: n.pismennyy@gmail.com
Tel.: (4732)208771