

О СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С. В. Павликов¹, А. Г. Исавнин²

¹ *Набережночелнинский филиал Казанского национального исследовательского технического университета,*

² *Набережночелнинский филиал Казанского (Приволжского) федерального университета*

Поступила в редакцию 27.05.2013 г.

Аннотация: в работе исследуется задача о стабилизации положения равновесия управляемых механических систем, моделируемых неавтономными функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа с конечным запаздыванием. Задача решается на основе метода предельных уравнений с использованием функционала Ляпунова со знакопостоянной производной.

Ключевые слова: стабилизация, запаздывающая обратная связь, предельные уравнения, функционал Ляпунова.

Abstract: in the work a problem of stabilization of controlled systems simulated with non-autonomous functional-differential equations of delayed type with final delay is investigated. The problem is solved on the basis of the limit equations method and a Lyapunov's functional with a constant-sign derivative.

Keywords: stabilization, delayed feedback, limit equations, Lyapunov's functional.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было предложено решение задачи о стабилизации управляемой механической системы на основе ПИД (пропорционально-интегрально-дифференциальных)–регуляторов, при этом использовались знакоопределенные функционалы Ляпунова со знакоопределенной производной. Использование функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной позволяет получить, в отличие от [1], более простые условия, как для конечного последствия (запаздывания), так и для бесконечного. В настоящей работе предложены различные типы регуляторов с конечным последствием и, в частности, показывается, что можно стабилизировать систему до равномерной асимптотической устойчивости на основе управления, которое зависит только от координат системы.

Рассмотрим управляемую механическую систему со стационарными, голономными, идеальными связями, положение которой определяется n обобщенными координатами $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$.

Кинетическая энергия такой системы представима в виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q}.$$

Здесь $A(q)$ — матрица размерности $n \times n$ является положительно-определённой.

Движения рассматриваемой системы определяются уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1)$$

где Q — матрица-столбец размерности $n \times 1$ обобщенных сил, действующих на систему.

Допустим, что в цепи обратной связи производится постоянное измерение обобщенных координат и (или) обобщенных скоростей таким образом, что возможно формирование в момент t управления Q , зависящего от состояния системы на отрезке $[t-h, t]$, $h = const > 0$, $Q = Q(t, q_t, \dot{q}_t)$ (через q_t обозначена функция, задаваемая для непрерывного отображения $q: R^+ \rightarrow R^n$ равенством $q_t = q(t+s)$, $-h \leq s \leq 0$).

Рассмотрим задачу об определении управления $Q = Q(t, q_t, \dot{q}_t)$, $Q(t, 0, 0) \equiv 0$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

2. УПРАВЛЕНИЕ, ЗАВИСЯЩЕЕ ТОЛЬКО ОТ КООРДИНАТ СИСТЕМЫ

Первый тип управления

Предположим, что управление имеет вид:

$$Q(t, q_t) = -C(t)q(t) + \int_{-h}^0 F(t, s)q(t+s)ds. \quad (2)$$

Такой регулятор зависит только от координат системы и времени.

Полагаем:

$$M(t) = C(t) - \int_{-h}^0 F(t, s)ds.$$

Тогда управление Q можно представить в виде:

$$Q(t, q_t) = -M(t)q(t) + \int_{-h}^0 F(t, s)(q(t+s) - q(t))ds. \quad (3)$$

С учетом (3) система (1) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -M(t)q(t) + \int_{-h}^0 F(t, s)(q(t+s) - q(t))ds. \quad (4)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) матрицы $C(t)$ и $F(t, s)$ являются ограниченными симметричными матрицами размерностей $n \times n$ при $t \in R^+$, $s \in [-h, 0]$;
- 2) матрица $M(t)$ является положительно определенной матрицей, ограниченной и равномерно непрерывной при $t \in R^+$;
- 3) матрица $F(t, s)$ непрерывно дифференцируема по t и s , равномерно непрерывная при $t \in R^+$, $s \in [-h, 0]$, причем:

$$F(t, s) \geq 0, \quad \frac{\partial F(t, s)}{\partial s} - \frac{\partial F(t, s)}{\partial t} \geq a_0 E, \quad a_0 = const > 0, \quad \dot{M}(t) \leq 0, \quad t \in R^+, \quad s \in [-h, 0].$$

О стабилизации управляемой механической системы с запаздывающей обратной связью

Тогда управление вида (2) решает задачу о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

Доказательство. Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$$V(t, q_t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} q^T(t) M(t) q(t) + \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) A \dot{q}(t) + \frac{1}{2} \int_{-h}^0 (q(t+s) - q(t))^T F(t, s) (q(t+s) - q(t)) ds.$$

Этот функционал является определенно-положительным по q и \dot{q} :

$$V \geq \omega_0 \cdot |\dot{q}|^2 + \omega_1(|q|), \quad \text{где} \quad |\dot{q}|^2 = \dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_n^2, \quad \omega_0 = \text{const} > 0,$$

ω_1 — функция типа Хана. Кроме того, этот функционал допускает бесконечно малый высший предел по $\|q_t\| = \sup(|q(t+s)|, s \in [-h, 0])$, $\|\dot{q}_t\| = \sup(|\dot{q}(t+s)|, s \in [-h, 0])$:

$$V \leq \omega_2(\|q_t\|) + \omega_3(\|\dot{q}_t\|),$$

где функции ω_2 и ω_3 есть функции типа Хана.

Тогда производная функционала в силу системы (4) будет иметь оценку:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{2} q^T \dot{M}(t) q - \frac{1}{2} (q(t-h) - q(t))^T F(t, -h) (q(t-h) - q(t)) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-h}^0 (q(t+s) - q(t))^T \left(\frac{\partial F(t, s)}{\partial s} - \frac{\partial F(t, s)}{\partial t} \right) (q(t+s) - q(t)) ds \leq \\ &\leq -\frac{a_0}{2} \int_{-h}^0 (q(t+s) - q(t))^T (q(t+s) - q(t)) ds \leq 0. \end{aligned}$$

Полагаем:

$$W(q) = \frac{a_0}{2} \int_{-h}^0 (q(t+s) - q(t))^T (q(t+s) - q(t)) ds.$$

При сделанных предположениях предельная система к (4) будет иметь следующий вид [2]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -M^*(t) q(t) + \int_{-h}^0 F^*(t, s) (q(t+s) - q(t)) ds. \quad (5)$$

Здесь матрицы в правой части (5) для каждой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, определяются следующим образом:

$$M^*(t) = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} M(t + t_n), \quad F^*(t, s) = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} F(t + t_n, s), \quad t \in R^+, \quad s \in [-h, 0].$$

Множество

$$\{W(q) = 0\} = \{q(t+s) = q(t), \forall s \in [-h, 0], \forall t \in R\} \equiv \{q(t) = c = \text{const}, \forall t \in R\}.$$

Это множество содержит из решений (5) только нулевое решение $q = \dot{q} = 0$. По теореме 4.5 из [3] получаем, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если на систему (1) действуют потенциальные силы $-\frac{\partial \Pi}{\partial q}(t, q) = -C(t)q$, тогда в условиях теоремы 2.1 стабилизирующее управление для системы (1) можно определить в следующем виде:

$$Q(t, q_t) = \int_{-h}^0 F(t, s)q(t+s)ds.$$

Второй тип управления

Предположим теперь, что управление имеет вид:

$$Q(t, q_t) = -F_0(t)q(t) + C_0(t)q(t-h). \quad (6)$$

Выполним следующее преобразование:

$$Q = -F_0(t)q(t) + C_0(t)q(t-h) = -(F_0(t) - C_0(t))q(t) - \int_{-h}^0 C_0(t)\dot{q}(t+s)ds.$$

Таким образом, изучение управления вида (6) можно свести к изучению ПИД-регулятора типа:

$$Q(t, \dot{q}_t, q) = -F(t)q(t) - \int_{-h}^0 C(t, s)\dot{q}(t+s)ds. \quad (7)$$

Для упрощения последующих преобразований предположим, что матрица A не зависит от q . С учетом этого и (7) система (1) примет вид:

$$A\ddot{q} = -F(t)q(t) - \int_{-h}^0 C(t, s)\dot{q}(t+s)ds. \quad (8)$$

Проведем некоторые преобразования второго слагаемого в регуляторе (7).

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 C(t, s)\dot{q}(t+s)ds &= \int_{-h}^0 C(t, s)(\dot{q}(t) - \int_{t+s}^t \ddot{q}(\tau)d\tau)ds = \\ &= \left(\int_{-h}^0 C(t, s)ds \right) \dot{q}(t) - \int_{-h}^0 C(t, s) \left(\int_{t+s}^t \ddot{q}(\tau)d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

Выразим теперь из (8) \ddot{q} . Это возможно, так как матрица A невырожденная. Получаем:

$$\ddot{q} = -A^{-1}F(t)q(t) - A^{-1} \int_{-h}^0 C(t, s)\dot{q}(t+s)ds. \quad (9)$$

С учетом (9) получаем, что система (8) примет вид:

$$\begin{aligned} A\ddot{q} &= -C_1(t)q(t) - \left(\int_{-h}^0 C(t, s)ds \right) \dot{q}(t) + \int_{-h}^0 C(t, s)A^{-1} \int_{t+s}^t F(\tau) \int_{\tau}^t \dot{q}(u)dud\tau ds - \\ &\quad - \int_{-h}^0 C(t, s)A^{-1} \int_{t+s}^t \int_{-h}^0 C(\tau, u)\dot{q}(\tau+u)dud\tau ds. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь $C_1(t) = -F(t) + \int_{-h}^0 C(t, s)A^{-1} \int_{t+s}^t F(\tau)d\tau ds$.

Теорема 2.2. Пусть матрицы $F(t), C(t, s)$ и $C_1(t)$ являются положительно определенными матрицами, ограниченными и равномерно непрерывными размерностей $n \times n$, $C_1(t)$ дифференцируема при $t \in R^+$, $s \in [-h, 0]$, причем справедливы следующие неравенства:

$$\max_{(i,j)} |F_{ij}| \leq f_1 = const, \quad \max_{(i,j)} |C_{ij}| \leq c_1 = const, \quad \max_{(i,j)} |A_{ij}| \leq a_1 = const,$$

$$\frac{1}{2h}C_1^{-1} \int_{-h}^0 C(t, s)ds - \frac{1}{4h}C_1^{-1}\dot{C}_1C_1^{-1}A \geq \left(\frac{c_1a_1n^3h^2(f_1 + c_1)}{2} + \varepsilon_0\right)E, \varepsilon_0 = const > 0, \quad C_1^{-1}A > 0.$$

Тогда управление вида (6) (соответственно управление вида (7)) решает задачу о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

Доказательство. Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$$V(t, q, \dot{q}_t) = \frac{1}{2}q^T(t)q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^T(t)(C_1^{-1}A)\dot{q}(t) + \lambda \int_{-2h}^0 \int_s^0 \dot{q}^T(t+u)\dot{q}(t+u)duds.$$

Здесь $\lambda = \frac{c_1a_1n^3h^2(f_1+c_1)}{2}$.

Производная функционала в силу системы (10) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \leq -2h\varepsilon_0 \cdot \dot{q}^T(t)\dot{q}(t) \leq 0.$$

Полагаем:

$$W(\dot{q}) = 2h\varepsilon_0\dot{q}^T(t)\dot{q}(t).$$

При сделанных предположениях, предельная система к (8) будет иметь следующий вид:

$$A\ddot{q} = -F^*(t)q(t) - \int_{-h}^0 C^*(t, s)\dot{q}(t+s)ds. \quad (11)$$

Повторяя рассуждения доказательства предыдущей теоремы, получаем, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Замечание 2.2. Если на систему (1) действуют потенциальные силы $-F_0q(t)$, тогда в условиях теоремы 2.2 стабилизирующее управление для системы (1) можно определить в виде:

$$Q(t, q_t) = C_0(t)q(t-h).$$

3. УПРАВЛЕНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ КООРДИНАТ И СКОРОСТЕЙ

Третий тип управления

Предположим теперь, что управление имеет вид ПИД-регулятора:

$$Q(t, q_t, \dot{q}) = -F(t)\dot{q}(t) - \int_{-h}^0 C(t, s)q(t+s)ds. \quad (12)$$

Проведем некоторые преобразования второго слагаемого в регуляторе:

$$\int_{-h}^0 C(t, s)q(t+s)ds = \int_{-h}^0 C(t, s)(q(t) - \int_{t+s}^t \dot{q}(u)du)ds = \left(\int_{-h}^0 C(t, s)ds\right)q(t) - \int_{-h}^0 C(t, s)\left(\int_{t+s}^t \dot{q}(u)du\right)ds.$$

Тогда система (1) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -F(t)\dot{q}(t) - \left(\int_{-h}^0 C(t, s)ds\right)q(t) + \int_{-h}^0 C(t, s)\left(\int_{t+s}^t \dot{q}(u)du\right)ds. \quad (13)$$

Теорема 3.1. Пусть матрицы $F(t)$ и $C(t, s)$ являются положительно определенными матрицами, ограниченными и равномерно непрерывными размерностей $n \times n$ при $t \in R^+$, $s \in [-h, 0]$, причем:

$$\max_{(i,j)} |C_{ij}| \leq L = const, \quad f(t) > Lh^2n + \varepsilon_0, \quad \int_{-h}^0 \frac{\partial C(t, s)}{\partial t} ds \leq 0, \quad t \in R^+, \quad \varepsilon_0 = const > 0,$$

где $f(t)$ есть минимальное собственное значение матрицы $F(t)$.

Тогда управление вида (12) решает задачу о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

Доказательство. Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$$V(t, q_t, \dot{q}) = \frac{1}{2}q^T(t)\left(\int_{-h}^0 C(t, s)ds\right)q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^T(t)A\dot{q}(t) + \frac{Lhn}{2} \int_{-h}^0 \int_s^0 \dot{q}^T(t+u)\dot{q}(t+u)duds.$$

Тогда производная функционала в силу системы (13) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\varepsilon_0 \dot{q}^T(t)\dot{q}(t) \leq 0.$$

Полагаем:

$$W(\dot{q}) = \varepsilon_0 \dot{q}^T(t)\dot{q}(t).$$

При сделанных предположениях, предельная система к (13) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -F^*(t)\dot{q}(t) - \int_{-h}^0 C^*(t, s)q(t+s)ds. \quad (14)$$

Множество $\{W(\dot{q}) = 0\} = \{\dot{q} = 0\}$ содержит из решений (14) только нулевое решение $q = \dot{q} = 0$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.1, получаем, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если на систему (1) действуют диссипативные силы $-F(t)\dot{q}$, тогда в условиях теоремы 3.1 стабилизирующее управление для системы (1) можно определить в виде:

$$Q(t, q_t) = - \int_{-h}^0 C(t, s)q(t+s)ds.$$

Четвертый тип управления

Определим управление в виде:

$$Q(t, q_t, \dot{q}) = -F(t)\dot{q}(t) - C(t)q(t-h). \quad (15)$$

С учетом (15) система (1) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -F(t)\dot{q}(t) - C(t)q(t-h). \quad (16)$$

Теорема 3.2. Пусть матрицы $F(t)$ и $C(t)$ являются положительно определенными матрицами, ограниченными и равномерно непрерывными размерностей $n \times n$, $C(t)$ дифференцируема при $t \in R^+$, причем:

$$L = \max_{(i,j)} |C_{ij}| < \frac{\mu}{hn}, \quad \dot{C}(t) \leq 0, \quad t \in R^+,$$

где μ есть минимальное собственное значение матрицы $F(t)$ при $t \in R^+$.

Тогда управление вида (12) решает задачу о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

Доказательство. Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$$V(q_t, \dot{q}) = \frac{1}{2} q^T(t) C(t) q(t) + \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) A \dot{q}(t) + \frac{\mu}{2h} \int_{-h}^0 \int_s^0 \dot{q}^T(t+u) \dot{q}(t+u) du ds.$$

Тогда производная функционала в силу системы (16) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\frac{1}{2} (\mu - Lnh) \dot{q}^T(t) \dot{q}(t) \leq 0.$$

Полагаем:

$$W(\dot{q}) = \frac{1}{2} (\mu - Lnh) \dot{q}^T(t) \dot{q}(t).$$

При сделанных предположениях предельная система к (16) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -C^*(t)q(t) - F^*(t)\dot{q}(t) + C^*(t) \int_{-h}^0 q(t+s) ds. \quad (17)$$

Множество $\{W(\dot{q}) = 0\} = \{\dot{q} = 0\}$ содержит из решений (17) только нулевое решение $q = \dot{q} = 0$. Повторяя рассуждения доказательства предыдущей теоремы, получаем, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 3.3. Пусть матрицы $F(t)$ и $C(t)$ являются положительно определенными матрицами, ограниченными и равномерно непрерывными размерностей $n \times n$, $C(t)$ дифференцируема при $t \in R^+$, причем:

$$C^{-1}A > 0, \quad C^{-1}F + \frac{1}{2}C^{-1}\dot{C}C^{-1}A > (h + \varepsilon_0)E, \quad \varepsilon_0 = const > 0, \quad t \in R^+.$$

Тогда управление вида (12) решает задачу о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

Доказательство. Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$$V(q_t, \dot{q}) = \frac{1}{2} q^T(t) q(t) + \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) C^{-1} A \dot{q}(t) + \frac{1}{2} \int_{-h}^0 \int_s^0 \dot{q}^T(t+u) \dot{q}(t+u) du ds.$$

Его производная, в силу системы (16), будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\varepsilon_0 \dot{q}^T(t) \dot{q}(t) \leq 0.$$

Полагаем $W(\dot{q}) = \varepsilon_0 \dot{q}^T(t) \dot{q}(t)$. Повторяя рассуждения доказательства предыдущей теоремы, получаем, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Если на систему (1) действуют диссипативные силы $-F(t)\dot{q}$, тогда в условиях теорем 3.2 и 3.3 стабилизирующее управление для системы (1) можно определить в виде:

$$Q(t, q_t) = -C(t)q(t-h).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе предложены различные типы регуляторов и, в частности, показывается, что можно стабилизировать систему до равномерной асимптотической устойчивости на основе управления, которое зависит только от координат системы.

Полученные результаты развивают и дополняют результаты из [1], [4], [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. № 3. С.15–17.
- [2] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения – 1998. – 34, №4. – С.435-440.
- [3] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения – 1998. – 34, №7. – С.876-885.
- [4] Павликов С.В. К задаче о стабилизации управляемых механических систем // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 9. – С. 16-27.
- [5] Павликов С.В. О стабилизации движений управляемых механических систем с запаздывающим регулятором // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 412. – № 2. – С. 176-178.

Павликов С.В., доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры естественнонаучных дисциплин, Набережночелнинский филиал Казанского национального исследовательского технического университета
E-mail: svpavlikov@yandex.ru
Тел.: +7 917-933-55-10

Pavlikov S.V., Doctor of Sciences (Physics and mathematics), Professor, Kazan national exploring technical university, branch in Naberezhnye Chelny, Chair of Natural sciences
E-mail: svpavlikov@yandex.ru
Tel.: +7 917-933-55-10

Исавнин А.Г., доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математических методов в экономике, Набережночелнинский филиал Казанского (Приволжского) федерального университета
E-mail: isavnin@mail.ru
Тел.: +7 904-768-77-83

Isavnin A.G., Doctor of Sciences (Physics and mathematics), Professor, Kazan (Volga region) federal university, branch in Naberezhnye Chelny, Chair of Mathematical simulations in economics
E-mail: isavnin@mail.ru
Tel.: +7 904-768-77-83