

# СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ БИМАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗОК

М. Г. Ордян<sup>1</sup>, В. Е. Петрова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

<sup>2</sup> Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.02.2013 г.

**Аннотация:** данная работа посвящена теоретическому моделированию задач о взаимодействии межфазной трещины с системой частично теплопроницаемых трещин в биматериале, находящемся под действием теплового потока или источника тепла, с различными моделями теплопроницаемости трещин. Был использован метод сингулярных интегральных уравнений. Полученные ранее аналитические выражения для коэффициентов интенсивности теплового потока в вершинах трещин применялись для сравнения с численными решениями соответствующих задач. Проведен параметрический анализ результатов.

**Ключевые слова:** биматериал, тепловой поток, граница раздела, частично теплопроницаемая трещина, коэффициент интенсивности теплового потока, сингулярное интегральное уравнение.

**Abstract:** the present work is devoted to theoretical modeling of the problems of interaction of an interface crack with a system of partially insulated cracks in a bimaterial subjected to a heat flux or a heat source with different thermal conductivity models of cracks. The method of singular integral equations was used. Previously obtained analytical expressions for the heat flux intensity factor at the crack tips are compared with the numerical solutions of the corresponding problems. The parametric analysis of results was performed.

**Keywords:** bimaterial, heat flux, interface, partially insulated crack, heat flux intensity factor, singular integral equation.

## ВВЕДЕНИЕ

Биматериалы (например, слоистые композитные материалы или двухкомпонентные соединения), используются в различных инженерных сооружениях и подвергаются механическим и тепловым нагрузкам. В связи с различиями в термических и механических свойствах составляющих их материалов, возникают высокие остаточные напряжения вблизи границы соединения материалов, которые приводят к расслоению и нарушению сцепления вдоль границы и формированию межфазной трещины. Экспериментальные наблюдения показывают, что вблизи границы соединения материалов возникают и растут трещины и другие дефекты. Взаимодействие этих дефектов с межфазной трещиной приводит к дополнительным остаточным напряжениям вблизи границы соединения материалов, что может инициировать распространение межфазной трещины или, наоборот, остановить её. Теоретические и экспериментальные исследования [1], [2] среды с тепловым источником, расположенным в непосредственной близости от трещины, показывают сильное влияние его на поведение трещины, например, изменяют направление распространения трещины [2].

Задачи взаимодействия трещин в однородном материале были тщательно исследованы и для них было получено большое количество решений [3]. Системы термоизолированных трещин в функционально-градиентном / однородном биматериале под воздействием теплового потока были рассмотрены в [4]. В то же время взаимодействия систем частично теплопроницаемых трещин с межфазной трещиной изучены не так хорошо.

В работах [5, 6] получены аналитические решения задач теплопроводности с помощью метода малого параметра, а также получены аналитические асимптотические выражения для коэффициентов интенсивности теплового потока в вершинах межфазной и внутренних трещин. Эти результаты справедливы для случая, когда длина межфазной трещины намного больше, чем длина внутренних трещин, а малый параметр – это отношение длины внутренней трещины к межфазной. Ранее было показано [3], что решение методом малого параметра даёт хорошую точность при расстояниях между вершинами трещин не меньше половины длины микротрещины. В данной работе получены численные решения сингулярных интегральных уравнений задач теплопроводности, которые справедливы для более широкого диапазона параметров: для близкого расположения трещин и для сопоставимых размеров трещин. Проведено сравнение численных и аналитических решений.

### ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Для полноты изложения приведем постановку задачи. Рассмотрим взаимодействие системы внутренних трещин с межфазной в биматериале, находящемся под действием теплового потока или источника тепла. Используем модель частично теплопроницаемых трещин. Предполагается, что коэффициенты теплопроницаемости поверхностей внутренних трещин ( $\eta(x)$ ) и межфазной ( $\eta_0(x)$ ) являются разными функциями, которые принимают значения от 0 до 1, где 0 соответствует случаю теплоизолированных трещин, а 1 – случаю полной теплопроницаемости поверхностей трещин. Такая модель частично теплопроницаемой межфазной трещины была использована в работе [7]. На границе раздела материалов имеется межфазная трещина длиной  $2a_0$  и в одном из материалов есть система  $N$  трещин длиной  $2a_k$ ; в некоторой точке  $z_s$  области  $y > 0$  ( $D_1$ ) помещен источник тепла мощностью  $Q$  или на биматериал действует тепловой поток интенсивности  $q$ , приложенный на бесконечности перпендикулярно границе раздела материалов (рис. 1).

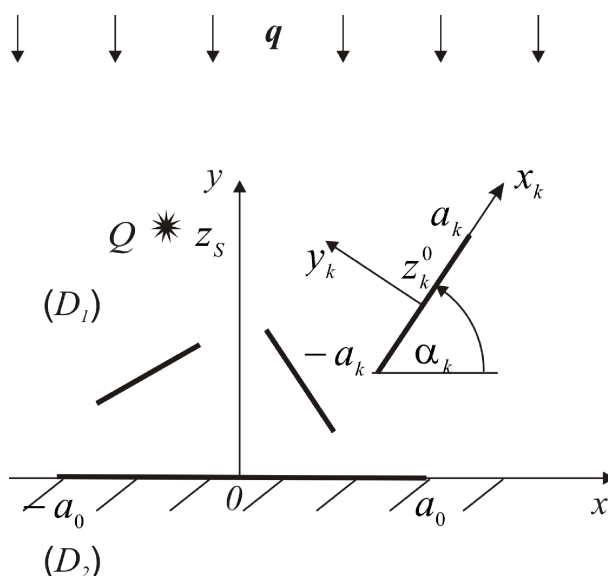


Рис. 1. Схема расположения трещин и тепловых нагрузок в биматериале

В соответствии с принципом суперпозиции, задача распадается на подзадачи более простой геометрии, каждая из которых содержит только один дефект. Таким образом, надо рассмотреть решение для биматериала с внутренней трещиной, решение для межфазной трещины, а затем построить уравнения для задачи о взаимодействии внутренних трещин с межфазной.

Итак, полная температура  $T_j^*(x, y)$  представляется в виде двух слагаемых

$$T_j^*(x, y) = T_j^0(x, y) + T_j(x, y) \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

где  $T_j^0(x, y)$  – температура в бездефектном биматериале,  $T_j(x, y)$  – возмущенное температурное поле, вызванное наличием дефектов.

Стационарное температурное поле в рассматриваемой области удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T_j^*(x, y) = 0, \quad (2)$$

т. е.  $T_j^*(x, y)$  является гармонической функцией, причем это справедливо и для функций  $T_j^0(x, y)$  и  $T_j(x, y)$ . В этом случае применима теория краевых задач аналитических функций [8], т. к. гармоническая функция может быть представлена в виде действительной части некоторой аналитической функции комплексной переменной. Эта функция называется комплексным потенциалом задачи теплопроводности. Для построения решения воспользуемся этой теорией.

Сформулируем граничные условия для физических величин задачи. Предположим, что трещины частично теплопроводящие. Тогда граничные условия для основной задачи будут следующими:

на поверхностях трещин имеем

$$k_1 \frac{\partial T_1^*(x, 0^+)}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2^*(x, 0^-)}{\partial y} = -\eta_0(x)q_0(x), \quad |x| \leq a_0, \quad (3)$$

$$k_j \frac{\partial T_{jn}^*(x_n, 0^+)}{\partial y_n} = k_j \frac{\partial T_{jn}^*(x_n, 0^-)}{\partial y_n} = -\eta(x)q_n(x_n), \quad |x_n| \leq a_n, \quad j = 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

на границе соединения материалов выполняются условия идеального контакта

$$k_1 \frac{\partial T_1^*(x, 0^+)}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2^*(x, 0^-)}{\partial y}, \quad T_1^*(x, 0^+) = T_2^*(x, 0^-), \quad |x| \geq a_0, \quad y = 0; \quad (4)$$

в вершинах трещин имеем условия согласования

$$T_1^*(\pm a_0, 0^+) = T_2^*(\pm a_0, 0^-), \quad T_{jn}^*(\pm a_n, 0^+) = T_{jn}^*(\pm a_n, 0^-); \quad (5)$$

и, наконец, условие на бесконечности в случае теплового потока  $q$

$$k_1 \frac{\partial T_1^*(x, y)}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2^*(x, y)}{\partial y} = q, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (6)$$

$k_j = \text{const} (j = 1, 2)$  являются коэффициентами теплопроводности материалов. Знаки «+» и «-» обозначают предельные значения функций на верхней и нижней поверхностях трещин соответственно.

В уравнениях (3)  $q_0(x)$  и  $q_n(x)$  находим по формулам

$$q_0(x) = -k_j \left. \frac{\partial T_j^0}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad q_n(x_n) = -k_j \left. \frac{\partial T_j^0}{\partial y_n} \right|_{y_n=0}. \quad (7)$$

В случае воздействия теплового потока  $q$ ,  $T_j^0(x, y)$  имеет вид  $T_j^0(x, y) = qy/k_j$ , ( $j = 1, 2$ ), а в случае с тепловым источником мощностью  $Q$  имеет следующий вид

$$T_j^0(x, y) = \frac{1}{k_j} \operatorname{Re} \left[ \int F_s(z) dz \right] \quad j = 1, 2,$$

где  $F_s(z) = \begin{cases} F_s^0(z) - K\overline{F_s^0}(z), z \in D_1 \\ (1 + K)F_s^0(z), z \in D_2 \end{cases}$ ,  $K = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}$ ,  $F_s^0(z)$  — известный комплексный потенциал для однородного материала, который имеет следующий вид

$$F_s^0(z) = -\frac{pQ}{z - z_s}, \text{ где } pQ = \frac{Q}{2\pi k_1} \quad (8)$$

В работах [5, 6] получена система сингулярных уравнений для случая частично теплопропускаемых трещин:

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{\widehat{\gamma}'_0(t)}{t - x} dt + (1 - \eta_0(x)) \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{a_k} P_{0k}(t, x) \widehat{\gamma}'_k(t) dt = \frac{1}{2} \pi q_0(x) (1 - \eta_0(x)) \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}, \quad |x| < a_0, \quad (9)$$

$$k_1 \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\widehat{\gamma}'_n(t)}{t - x} dt + (1 - \eta(x)) \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} \int_{-a_0}^{a_0} P_{n0}(t, x) \widehat{\gamma}'_0(t) dt + \\ + k_1 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-a_k}^{a_k} P_{nk}(t, x) \widehat{\gamma}'_k(t) dt = \pi q_n(x) (1 - \eta(x)), \quad |x| < a_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

где

$$P_{nk}(t, x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\alpha_n}}{te^{i\alpha_k} + z_k^0 - xe^{i\alpha_n} - z_n^0} \right]. \quad (11)$$

Система уравнений дополняется условиями

$$\int_{-a_k}^{a_k} \widehat{\gamma}'_k(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

обеспечивающими однозначность функций  $\widehat{\gamma}'_k$  при обходе контура трещин.

В (9), (10), (12) неизвестная функция  $\widehat{\gamma}'_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ) представляет собой производную от скачка температуры на линии  $k$ -ой трещины

$$2\widehat{\gamma}'_0(x) = T_1(x, 0^+) - T_2(x, 0^-), \quad |x| < a_0, \quad (13)$$

$$2\widehat{\gamma}'_k(x) = T_{jk}(x, 0^+) - T_{jk}(x, 0^-), \quad |x| < a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2.$$

Система сингулярных интегральных уравнений (9), (10) может быть решена численно или аналитически.

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Предположим, что длина внутренних трещин намного меньше длины межфазной, т. е.  $2a_k \ll 2a_0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , и все внутренние трещины имеют одинаковую длину  $a_k = a$

( $k = 1, 2, \dots, N$ ). В этом случае решение системы уравнений (9), (10) получаем с помощью метода малого параметра [3], принимая за малый параметр отношение длины внутренней трещины к длине межфазной, т. е.  $\lambda = a/a_0 \ll 1$ .

Введем замену переменных  $x = \chi a_k$ ,  $t = \tau a_k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ) в (9), (10) и перейдем к безразмерным величинам  $w_k = \frac{z_k^0}{a_0}$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ).

Неизвестные функции  $\gamma'_0(\chi)$  и  $\gamma'_n(\chi)$  ищем в виде рядов по малому параметру  $\lambda$

$$\gamma'_0(\chi) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma'_{0p}(\chi) \lambda^p, \quad \gamma'_n(\chi) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma'_{np}(\chi) \lambda^p. \quad (14)$$

В регулярных ядрах (11), перейдем к безразмерным величинам, затем разложим их в ряды по малому параметру  $\lambda$ , получим

$$P_{nk}(\tau, \chi) = \frac{1}{\lambda} \sum_{u=1}^{\infty} P_{nku}(\tau, \chi) \lambda^u, \quad P_{nku}(a\tau, a\chi) = \frac{1}{a_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\alpha_n} (\chi e^{i\alpha_n} - \tau e^{i\alpha_k})^{u-1}}{(w_k - w_n)^u} \right]. \quad (15)$$

Для сходимости разложений (15) необходимо выполнение неравенства

$$\left| \frac{\lambda}{\tau - z_k^0/a_0} \right| < 1, \quad |\tau| < 1, \quad (16)$$

которое выполняется, если трещины не пересекаются.

В случае биматериала под действием теплового потока, когда коэффициенты теплопроводности трещин являются константами, т.е.  $\eta_0(\tau) = \eta_0 = const$ ,  $\eta(\tau) = \eta = const$ , получено решение системы (9), (10) для межфазной и внутренних трещин с точностью до  $\lambda^2$  [5]

$$\begin{aligned} \gamma'_0(\chi) = \gamma'_{00}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{02}(\chi) = & \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} \frac{\chi}{\sqrt{1 - \chi^2}} \tilde{q}_0 (1 - \eta_0) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{k_1} \frac{(1 - \eta)(1 - \eta_0)}{\sqrt{1 - \chi^2}} \times \\ & \times \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha_k} \frac{1 - \chi w_k}{(\chi - w_k)^2 \sqrt{w_k^2 - 1}} \right] \left\{ \tilde{q}_k - \tilde{q}_0 (1 - \eta_0) \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha_k} \left( 1 - \frac{w_k}{\sqrt{w_k^2 - 1}} \right) \right] \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma'_n(\chi) = \lambda \gamma'_{n1}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{n2}(\chi) = & \frac{1}{k_1} \left\{ \lambda \frac{\chi(1 - \eta)}{\sqrt{1 - \chi^2}} \left\{ \tilde{q}_n - \tilde{q}_0 (1 - \eta_0) \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha_n} \left( 1 - \frac{w_n}{\sqrt{w_n^2 - 1}} \right) \right] \right\} + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \frac{-\chi^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \chi^2}} \tilde{q}_0 (1 - \eta_0) (1 - \eta) \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{2i\alpha_n}}{(w_n^2 - 1)^{3/2}} \right] \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (18) \end{aligned}$$

И в случае биматериала под действием теплового источника, когда коэффициенты теплопроводности трещин являются константами, т.е.  $\eta_0(\tau) = \eta_0 = const$ ,  $\eta(\tau) = \eta = const$ , получено решение системы (9), (10) для межфазной и внутренних трещин с точностью до  $\lambda^2$  [6] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma'_0(\chi) = \gamma'_{00}(\chi) + \lambda \gamma'_{01}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{02}(\chi) = & - \frac{p_Q(1 - \eta_0)}{k_1 \sqrt{1 - \chi^2}} \left\{ \operatorname{Im} \left[ \frac{\sqrt{w_s^2 - 1}}{\chi - w_s} \right] - \right. \\ & - \lambda \frac{2k_2(1 - \eta)}{(k_1 + k_2)} \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha_k} \frac{1 - \chi w_k}{(\chi - w_k)^2 \sqrt{w_k^2 - 1}} \right] I_2(w_{sk}) + \\ & \left. + \lambda^2 \frac{2k_2(1 - \eta)}{(k_1 + k_2)} \sum_{k=1}^N \left\{ \operatorname{Re} \left[ e^{2i\alpha_k} \frac{\chi^2 - 2\chi w_k^3 + 3w_k^2 - 2}{(\chi - w_k)(w_k^2 - 1)^{3/2}} \right] I_4(w_{sk}) - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{(1 - \eta_0)}{2} \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha_k} \frac{1 - \chi w_k}{(\chi - w_k)^2 \sqrt{w_k^2 - 1}} \right] I_1(w_k, w_s) \Bigg\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_n(\chi) = & \gamma'_{n0}(\chi) + \lambda \gamma'_{n1}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{n2}(\chi) = - \frac{p_Q(1 - \eta)}{k_1 \sqrt{1 - \chi^2} (k_1 + k_2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{k_1}{k_2} \operatorname{Re} \left[ \left( 1 - \frac{\sqrt{w_{sn}^2 - 1}}{w_{sn} - \chi} \right) e^{-i\alpha_n} \sin \alpha_n \right] + \operatorname{Im} \left[ \left( 1 - \frac{\sqrt{w_{sn}^2 - 1}}{w_{sn} - \chi} \right) e^{-i\alpha_n} \cos \alpha_n \right] \right\} + \\ & + \lambda(1 - \eta_0) \chi I_1(w_n, w_s) + \lambda^2 \left\{ -\chi \frac{2k_2(1 - \eta)(1 - \eta_0)}{(k_1 + k_2)} \sum_{k=1}^N I_2(w_{sk}) I_3(w_n, w_k) + \right. \\ & \left. + \left( \chi^2 - \frac{1}{2} \right) (1 - \eta_0) I_1(w_n, w_s) + \chi \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i(\alpha_n + \alpha_k)}}{(w_n - w_k)^2} \right] I_2(w_{sk}) \right\} \Bigg\}, n = 1, 2, \dots, N, \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1(w_n, w_s) = & -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{i\alpha_n} (\sqrt{w_n^2 - 1} - \sqrt{w_s^2 - 1})}{(w_n - w_s) \sqrt{w_n^2 - 1}} + \frac{e^{-i\alpha_n} (\sqrt{w_n^2 - 1} - \sqrt{w_s^2 - 1})}{(\bar{w}_n - w_s) \sqrt{\bar{w}_n^2 - 1}} \right], \\ I_2(w_{sn}) = & \frac{k_1}{k_2} \operatorname{Re} [(\sqrt{w_{sn}^2 - 1} - w_{sn}) e^{-i\alpha_n} \sin \alpha_n] + \operatorname{Im} [(\sqrt{w_{sn}^2 - 1} - w_{sn}) e^{-i\alpha_n} \cos \alpha_n], \\ I_3(w_n, w_k) = & \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{A(w_k, w_n)}{(w_k^2 - 1)^2} - \frac{B(w_k, w_n)}{w_k^2 - 1} - \frac{C(w_k, w_n)}{\sqrt{w_k^2 - 1} \sqrt{w_n^2 - 1}} \right) \frac{e^{i(\alpha_k + \alpha_n)}}{2} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{A(w_k, \bar{w}_n)}{(w_k^2 - 1)^2} - \frac{B(w_k, \bar{w}_n)}{w_k^2 - 1} - \frac{C(w_k, \bar{w}_n)}{\sqrt{w_k^2 - 1} \sqrt{w_n^2 - 1}} \right) \frac{e^{i(\alpha_k - \alpha_n)}}{2} \right], \\ A(w_k, w_n) = & \frac{-w_k^3 - w_n + w_k - w_k^2 w_n}{w_k(-w_n^2 + w_k^2 + 2w_k w_n)}, \quad B(w_k, w_n) = \frac{w_k^3 + w_n - 2w_k}{w_k(-w_n^2 + w_k^2 + 2w_k w_n)}, \\ C(w_k, w_n) = & \frac{1 + w_k w_n}{-w_n^2 + w_k^2 + 2w_k w_n}, \\ I_4(w_{sn}) = & \frac{k_1}{k_2} \operatorname{Re} \left[ \left( -\frac{1}{2} + w_{sn}^2 - w_{sn} \sqrt{w_{sn}^2 - 1} \right) e^{-i\alpha_n} \sin \alpha_n \right] + \\ & + \operatorname{Im} \left[ \left( -\frac{1}{2} + w_{sn}^2 - w_{sn} \sqrt{w_{sn}^2 - 1} \right) e^{-i\alpha_n} \cos \alpha_n \right]. \end{aligned}$$

Полученные решения учитывают взаимодействие каждой внутренней трещины с межфазной трещиной. Взаимодействия между внутренними трещинами учитывают приближения более высокого порядка.

По аналогии с коэффициентами интенсивности напряжений в упругой задаче, были введены коэффициенты интенсивности теплового потока [9], которые являются локальными характеристиками распределения тепла в окрестностях вершин трещин.

Коэффициенты интенсивности теплового потока в вершинах межфазной трещины вычислили по формуле

$$k_{T0}^{\pm} = \mp \lim_{\chi \rightarrow \pm 1} \sqrt{a_0} \sqrt{1 - \chi^2} \gamma'_0(\chi). \quad (21)$$

Коэффициенты интенсивности теплового потока в вершинах внутренних трещин вычислили по формуле

$$k_{Tn}^{\pm} = \mp \lim_{\chi \rightarrow \pm 1} \sqrt{a_n} \sqrt{1 - \chi^2} \gamma'_n(\chi), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

Верхний знак соответствует правой вершине трещины, нижний знак – левой вершине трещины.

Если температурное поле вызвано однородным тепловым потоком интенсивности  $q$ , приложенным на бесконечности ( $\tilde{q}_0 = -q$ ,  $\tilde{q}_k = -q \cos \alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ), тогда нормированные коэффициенты интенсивности теплового потока в вершинах межфазной трещины, принимают вид

$$\frac{k_{T0}^{\pm}}{q\sqrt{a_0}/k_1} = (1 - \eta_0) \left\{ \frac{1}{2}(m + 1) + \frac{\lambda^2}{2}(1 - \eta) \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\alpha_k}}{(w_k \mp 1)\sqrt{w_k^2 - 1}} \right] \left\{ \cos \alpha_k - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \eta_0) \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha_k} - \frac{w_k e^{i\alpha_k}}{\sqrt{w_k^2 - 1}} \right] \right\} \right\}, \quad (23)$$

и нормированные коэффициенты интенсивности теплового потока в вершинах  $n$ -ой внутренней трещины

$$\frac{k_{Tn}^{\pm}}{\sqrt{a_n}q/k_1} = (1 - \eta) \left\{ \lambda \left\{ \cos \alpha_n - (1 - \eta_0) \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha_n} \left( 1 - \frac{w_n}{\sqrt{w_n^2 - 1}} \right) \right] \right\} \mp \right. \\ \left. \mp \lambda^2 (1 - \eta_0) \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{2i\alpha_n}}{(w_n^2 - 1)^{3/2}} \right] \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

В случае с тепловым источником, нормированные коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах межфазной трещины принимают вид

$$\frac{k_{T0}^{\pm}}{p_Q\sqrt{a_0}/k_1} = \pm(1 - \eta_0) \frac{2}{(m + 1)} \left\{ \frac{m + 1}{2} \operatorname{Im} \left[ \frac{\sqrt{w_s^2 - 1}}{\pm 1 - w_s} \right] - \right. \\ \left. - \lambda(1 - \eta) \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\alpha_k}}{(1 \mp w_k)\sqrt{w_k^2 - 1}} \right] I_2(w_{sk}) + \right. \\ \left. + \lambda^2(1 - \eta) \sum_{k=1}^N \left\{ \operatorname{Re} \left[ e^{2i\alpha_k} \frac{1 \mp 2w_k^3 + 3w_k^2 - 2}{(\pm 1 - w_k)(w_k^2 - 1)^{3/2}} \right] I_4(w_{sk}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1 - \eta_0)}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\alpha_k}}{(1 \mp w_k)\sqrt{w_k^2 - 1}} \right] I_1(w_k, w_s) \right\} \right\}, \quad (25)$$

и нормированные коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах  $n$ -ой внутренней трещины записываются в виде

$$\frac{k_{Tn}^{\pm}}{\sqrt{a_n}p_Q/k_1} = \pm(1 - \eta) \frac{2}{(m + 1)} \times \\ \times \left\{ \left\{ m \operatorname{Re} \left[ \left( 1 - \frac{\sqrt{w_{sn}^2 - 1}}{w_{sn} \mp 1} \right) e^{-i\alpha_n} \sin \alpha_n \right] + \operatorname{Im} \left[ \left( 1 - \frac{\sqrt{w_{sn}^2 - 1}}{w_{sn} \mp 1} \right) e^{-i\alpha_n} \cos \alpha_n \right] \right\} \pm \right. \\ \left. \pm \lambda(1 - \eta_0) I_1(w_n, w_s) + \lambda^2 \left\{ \mp \frac{2(1 - \eta)(1 - \eta_0)}{(m + 1)} \sum_{k=1}^N I_2(w_{sk}) I_3(w_n, w_k) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 - \eta_0)}{2} I_1(w_n, w_s) \pm \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i(\alpha_n + \alpha_k)}}{(w_n - w_k)^2} \right] I_2(w_{sk}) \right\} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

В формулах (23), (25), (26) введено обозначение  $m = k_1/k_2$ .

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Приближенные аналитические формулы (23) и (25) удобны для исследования влияния систем произвольно расположенных микротрещин на межфазную трещину. Однако, эти формулы имеют некоторые ограничения, они справедливы при малых  $\lambda = a/a_0 \ll 1$  и при расстояниях между вершинами трещин не меньше половины длины микротрещины. Более точные решения сингулярных интегральных уравнений (9)-(12) можно получить прямыми численными методами, например, методом механических квадратур. Этот метод относится к методу граничных элементов и основан на определенных формулах для интерполяционного полинома и квадратурных формулах для сингулярного интеграла [10].

Неизвестные функции в уравнениях (9), (10) представим в виде

$$\gamma'_n(\xi) = \frac{u_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (27)$$

где  $u_n(\xi)$  — новая неизвестная регулярная функция на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $1/\sqrt{1-\xi^2}$  — весовая функция, которая учитывает корневую особенность решения задачи о трещинах.

Используя квадратурные формулы для интегралов [10], уравнения (9), (10) сводятся к системе  $N \times M$  ( $N$  - количество трещин,  $M$  - число узлов) алгебраических уравнений для определения  $N \times M$  неизвестных  $u_n(t_m)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N [u_k(t_m) P_{nk}(t_m, x_r)] &= \pi p_n(x_r), \\ \sum_{m=1}^M u_n(t_m) &= 0 \quad (n = 1, 2; r = 1, 2, \dots, M-1), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (29)$$

и

$$x_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1) \quad (30)$$

Здесь  $p_n$  — это правые части уравнений (9) и (10),  $P_{nk}$  — дискретный аналог регулярных ядер (11) вместе с сингулярной частью, которая получается из (11) при  $n = k$ .

Таким образом, для системы сингулярных интегральных уравнений (9) и (10) построена соответствующая система алгебраических уравнений (28), на основе решения которой интерполяцией находим приближенное решение исходной системы. Решение системы (28) найдено с помощью пакета "MATLAB".

Нормированные коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах трещин в случае воздействия теплового потока определяем по формуле

$$\frac{k_{Tn}^{\pm}}{\sqrt{a_n q}/k_1} = \mp u_n(\pm 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

Нормированные коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах трещин в случае воздействия теплового источника имеют вид

$$\frac{k_{Tn}^{\pm}}{\sqrt{a_n p_Q}/k_1} = \mp u_n(\pm 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$



Величины  $u_n(\pm 1)$  определяются выражениями

$$u_n(1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} u_n(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{M} \pi; \quad u_n(-1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} u_n(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Численное решение справедливо для близкого расположения трещин и для сопоставимых размеров трещин. Ограничение применимости – необходимость решать большое количество уравнений, для  $N$  трещин имеем систему  $N \times M$  алгебраических уравнений, где  $M$  число интерполяционных узлов, для хорошей точности решения брали  $M = 60$ .

## СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО И АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для сравнения аналитического решения (23), (25) и численного рассмотрим пример взаимодействия двух трещин. Внутренняя трещина длины  $2a_1 = 0.2$  расположена в точке  $z_1^0 = 0.9 + 0.25i$  материала ( $D_1$ ), а межфазная трещина длины  $2a_0 = 2$  расположена в точке  $z_0^0 = 0$ . В этом случае  $\lambda = 0.1$ , а минимальное расстояние между вершинами трещин не меньше полудлины микротрещины. На *рис. 2a, 3a* и *рис. 2b, 3b* показаны сравнения нормированных коэффициентов интенсивности теплового потока в случае аналитического (формулы (23), (25)) и численного (формулы (31), (32)) решений для биматериала “керамика/керамика TiC/ SiC”. *Рис. 2a, b* соответствуют случаю, когда биматериал находится под действием теплового потока, приложенного на бесконечности. *Рис. 3a, b* выполнены для случая, когда биматериал находится под воздействием теплового источника. Коэффициенты теплопроводности TiC и SiC равны  $20 \text{ Вт/(м}^*\text{К)}$  и  $60 \text{ Вт/(м}^*\text{К)}$  соответственно. Когда материал ( $D_1$ ) имеет свойства материала TiC, а материал ( $D_2$ ) свойства - SiC, то  $m = k_1/k_2 = 0.33$ . Графики получены при условии, что коэффициент теплопроницаемости межфазной трещины равен  $0.5$ , т.е.  $\eta_0 = 0.5$ , и при разных коэффициентах теплопроницаемости внутренней трещины:  $\eta_1 = \{0; 0.4; 0.8\}$ .

Построенные графики (*рис. 2a*) соответствуют аналитическому решению (23) и выполнены с помощью пакета “Mathematica”, графики (*рис. 2b*) соответствуют численному решению (31) и выполнены с помощью пакета “MATLAB”.

Из (*рис. 2a, b*) видно, что самое большое различие графиков наблюдается, когда  $\alpha_1 = 0$  и  $\eta_1 = 0$ . В этом случае нормированный коэффициент интенсивности теплового потока, соответствующий аналитическому решению, примерно на  $2.17\%$  больше, чем соответствующий численному решению.

На *рис. 3a, b* показан случай, когда тепловой источник расположен в точке  $z_s = 3i$  материала ( $D_1$ ). Построенные графики (*рис. 3a*) соответствуют аналитическому решению (25) и выполнены с помощью пакета “Mathematica”, графики (*рис. 3b*) соответствуют численному решению (32) и выполнены с помощью пакета “MATLAB”.

Из (*рис. 3a, b*) видно, что самое большое различие графиков наблюдается, когда  $\alpha_1 = 0.5 (\approx 28^\circ)$  и  $\eta_1 = 0$ . В этом случае нормированный коэффициент интенсивности теплового потока, соответствующий аналитическому решению, примерно на  $1.47\%$  меньше, чем соответствующий численному решению.

На *рис. 4a, b* представлены результаты, полученные численным методом, для трещины размером  $2a_1 = 1.0$ , расположенной в точке с координатой  $z_1^0 = 0.9 + i$  (*рис. 4a*), минимальное расстояние между вершинами трещин около полудлины внутренней трещины,  $d_{min} = 0.5 = a_1$ , и для трещины в точке  $z_1^0 = 0.9 + 0.6i$  (*рис. 4b*), минимальное расстояние между вершинами трещин в этом случае  $d_{min} = 0.1$ ; остальные параметры те же, что для *рис. 2, 3*. Биматериал находится под действием теплового потока. Как и на предыдущих рисунках графики показывают зависимость нормированных коэффициентов интенсивности теплового потока от угла наклона внутренней трещины.

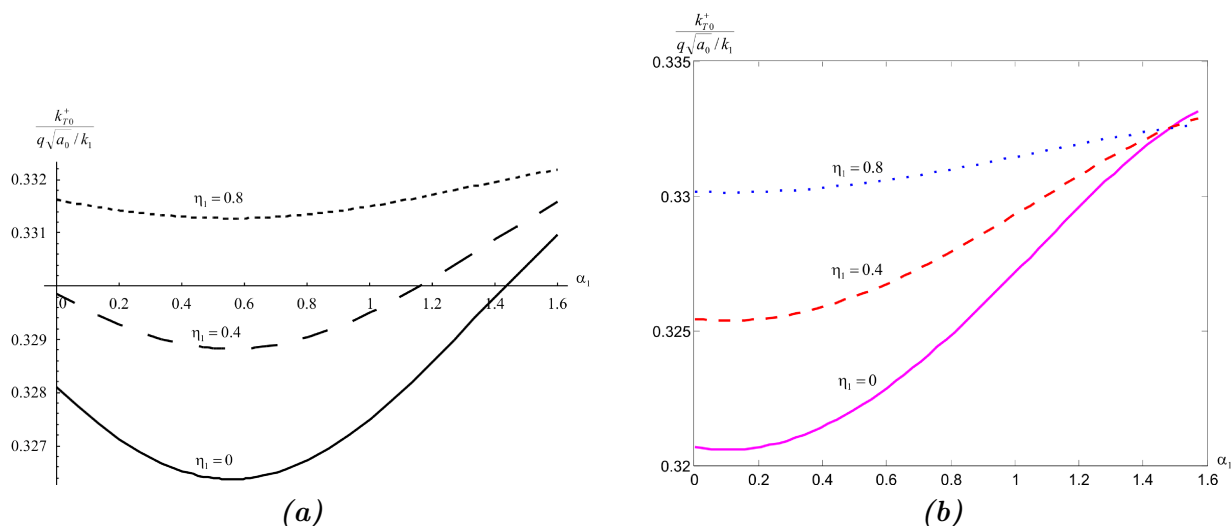


Рис. 2. Графики зависимости коэффициента интенсивности теплового потока в правой вершине межфазной трещины от угла наклона внутренней трещины  $\alpha_1$  при  $\eta_0 = 0.5, a_1 = 0.1$ . Биматериал находится под воздействием теплового потока. а – аналитическое решение, б – численное

Графики на рис. 4а почти идентичны соответствующим графикам рис. 2б. Из рис. 2б и 4а видно, что влияние малой трещины ( $a_1 = 0.1$ ) и большой ( $a_1 = 0.5$ ), расположенных на расстояниях от вершины межфазной трещины сравнимых с их длинами, мало отличаются, разница величин коэффициентов интенсивности теплового потока не превышает 1% для всех параметров задачи. Если внутренняя трещина расположена близко к вершине межфазной, рис. 4б, то её влияние на межфазную трещину увеличивается, наблюдается так называемый эффект экранирования, коэффициенты интенсивности теплового потока становятся меньше по сравнению с коэффициентами для одной межфазной трещины. Особенно это заметно для термоизолированных трещин при  $\eta_1 = 0$ . Для теплопроводящих трещин при  $\eta_1 = 0.8$  эффект влияния незначительный. При  $\alpha_1 = 0, \eta_1 = 0$  разница в результатах составляет 15,6%, а при  $\eta_1 = 0.8$  – 3%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулированы задачи о взаимодействии межфазной трещины с системой частично теплопроницаемых трещин в биматериале, находящемся под действием теплового потока или источника тепла, с использованием модели теплопроницаемой трещины. Получены численные решения задач на основе метода граничных элементов для системы интегральных уравнений, которые могут быть использованы для двух близко расположенных трещин с сопоставимой длиной. Получены основные характеристики задачи теплопроводности: тепловые потоки на берегах межфазной трещины, коэффициенты интенсивности теплового потока в вершинах трещин.

Проведено сравнение аналитических и численных решений и показана высокая степень их сопоставимости. Графики, построенные для коэффициентов интенсивности теплового потока в вершинах межфазной трещины для обоих решений, визуально подтверждают данный факт.

Анализ графиков показывает, что наличие внутренних трещин с разными теплопроницаемыми поверхностями, сильно изменяет величину коэффициента интенсивности теплового потока межфазной трещины. Например, увеличение коэффициента интенсивности теплового потока означает, что неоднородность тепловых полей становится более значительной, что приводит к нарастанию деформаций и соответствующих напряжений в биматериале.

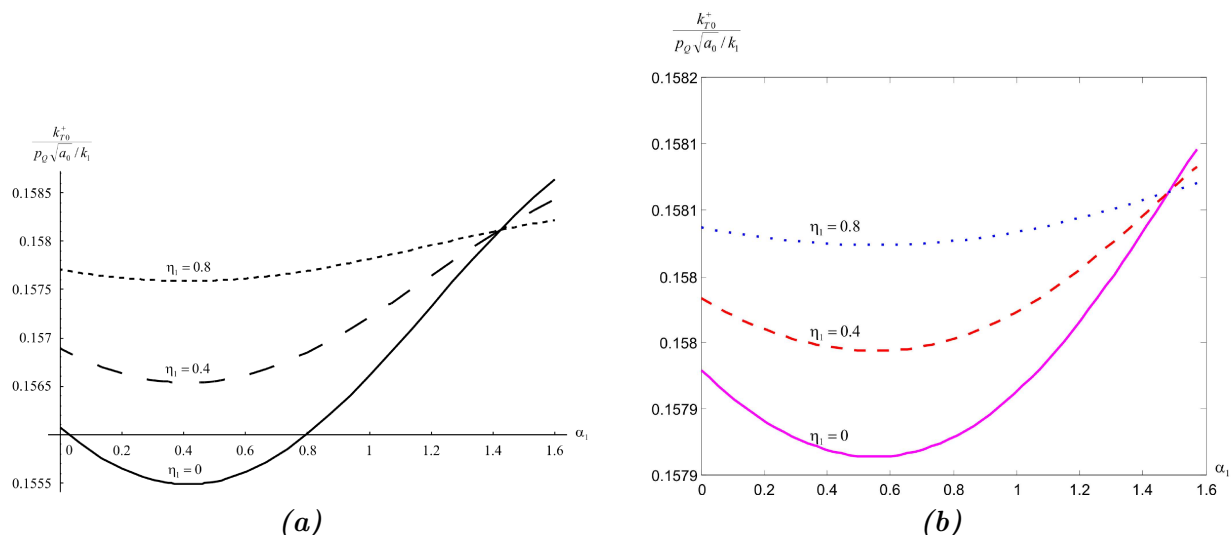


Рис. 3. Графики зависимости коэффициента интенсивности теплового потока в правой вершине межфазной трещины от угла наклона внутренней трещины  $\alpha_1$  при  $\eta_0 = 0.5$ ,  $a_1 = 0.1$ . Биматериал находится под воздействием источника тепла. а – аналитическое решение, б – численное.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Один из авторов (Ордян М.Г.) выражает благодарность Министерству образования и науки РФ (проект № 10.46.2011) и Германской службе академических обменов (DAAD) за совместную научно-исследовательскую стипендию и научную стажировку по программе “Михаил Ломоносов”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Petrova V. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects / V. Petrova, K. Herrmann // International Journal of Fracture. — 2004. — V. 128. — P. 49–63.
- [2] Dobroskok A. Crack redirection with thermal secondary loading / A. Dobroskok, L. Fradkin, A. Linkov, G. Mishuris // Engineering Fracture Mechanics. — 2007. — V. 74. — P. 1719–1726.
- [3] Petrova V. A survey of macro-microcrack interaction problems / V. Petrova, V. Tamuzs, N. Romalis // Appl. Mech. Rev. — 2000. — V. 53, N 5. — P. 117–146.
- [4] Petrova V. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2011. — V. 55. — P. 148–157.
- [5] Ордян М.Г. Задача теплопроводности о взаимодействии частично теплопроницаемых трещин в двухкомпонентном материале под действием теплового потока / М.Г. Ордян, В.Е. Петрова // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика. — Воронеж, 2009. — № 1. — С. 141–149.
- [6] Ордян М.Г. Задача теплопроводности для биматериала с системой частично теплопроницаемых трещин и тепловым источником / М.Г. Ордян, В.Е. Петрова // Вестник Самарского государственного университета. - Самара, 2009. - (Естественнонаучная серия). — № 4 (70). — С. 154–170.
- [7] Lee K.Y. Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow / K.Y. Lee, S.J Park. // Eng. Fract. Mech. — 1995. — V. 50, N 4. — P. 475–482.

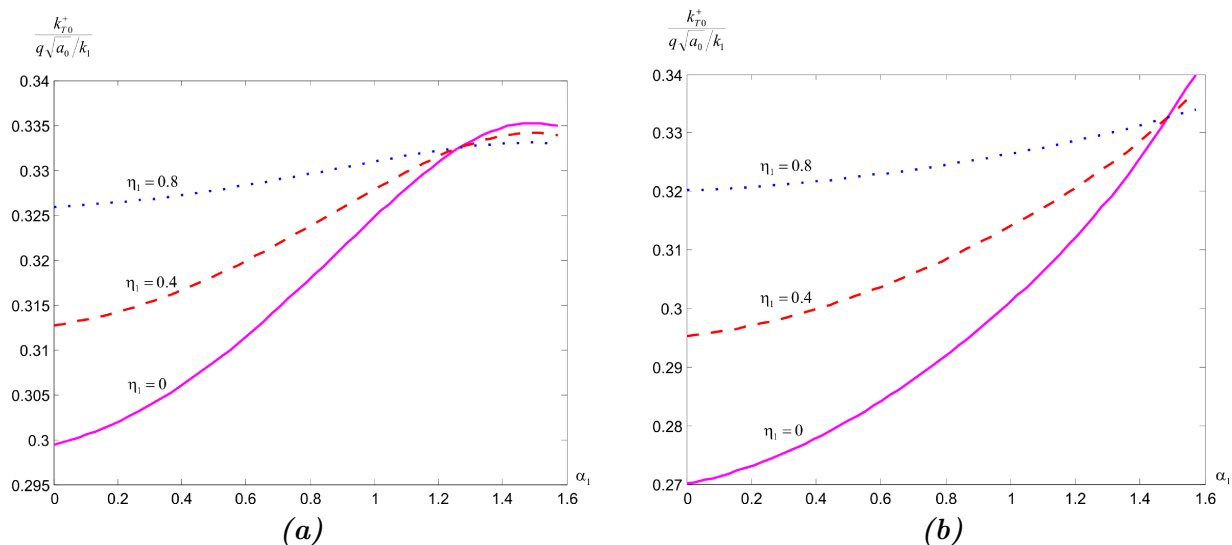


Рис. 4. Графики зависимости коэффициента интенсивности теплового потока в правой вершине межфазной трещины от угла наклона внутренней трещины  $\alpha_1$  при  $\eta_0 = 0.5, a_1 = 0.5$ . а – при  $z_1^0 = 0.9 + i$ , б – при  $z_1^0 = 0.9 + 0.6i$ . Биматериал находится под воздействием теплового потока. Представлено численное решение

[8] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 639 с.

[9] Chao C.K. Thermal problem of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials with a point heat source / C.K. Chao, L.Y. Kuo // Int. Journal Heat Mass Transfer. — 1993. — V. 36, N 17. — P. 4085–4093.

[10] Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. — Киев: Наук. Думка, 1976. — 445 с.

Ордян М. Г., старший преподаватель кафедры строительной техники и инженерной механики, Воронежский ГАСУ  
E-mail: omg84@mail.ru  
Тел.: +7908 130 79 13

Ordyan M. G., senior lecturer of the Department of Construction Machinery and Engineering Mechanics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering  
E-mail: omg84@mail.ru  
Tel.: +7908 130 79 13

Петрова В. Е., профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятности, математический факультет ВГУ  
E-mail: veraep@gmail.com  
Тел.: (4732) 208-618

Petrova V. E., professor of the Department of Partial Differential Equations and Theory of Probability, The Faculty of Mathematics of Voronezh State University  
E-mail: veraep@gmail.com  
Tel.: (4732) 208-618