УДК 517.929

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 29.10.2013 г.

Аннотация: в настоящей работе доказывается существование решения и компактность множества всех решений задачи управляемости для системы описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве. Статья состоит из введения и четырех параграфов. Во введении обосновывается актуальность данной проблематики и излагается история вопроса. Во втором параграфе описывается постановка задачи. Третий параграф состоит из четырех подпунктов, в которых приводятся предварительные сведения. В четвертом параграфе формулируется и доказывается основной результат работы (Теорема 4.1). В последнем параграфе в качестве приложения мы рассматриваем задачу управляемости для процесса дробной диффузии..

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, дробная производная, задача управляемости, бесконечное запаздывание, импульсная характеристика, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение, дробная диффузия.

Abstract: in this paper we prove the existence of solutions and the compactness of the set of all solutions of the controllability problem for semilinear functional differential inclusion of fractional order with infinite delay and impulse characteristics in a Banach space. The paper consists of an introduction and four sections. In the introduction the urgency of this problem is justified. In the second section we describe the setting of the problem. The third section consists of four sub-sections dedicated to the preliminaries. In the fourth section we formulate and prove our main result (Theorem 4.1). In the last section as application we consider the controllability problem for a fractional diffusion process.

Keywords: fractional derivative, differential inclusions, the problem of controllability, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap, the impulsive characteristics, fractional diffusion.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря интересным приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [5], [7], [11], [14], [18], [22], [26], [28], [29], статьи [19], [21], [23] и др.).

В настоящей работе мы рассматриваем задачу управляемости для системы описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка с бесконечным запаздыванием в банаховом пространстве.

* Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00328 и 12-01-00392.

Мы предполагаем также, что изучаемая в данной работе система содержит импульсные характеристики. Отметим, что импульсные дифференциальные уравнения и включения являются удобной моделью для описания динамических систем, подверженным скачкообразным изменениям своего состояния (см. монографии [8], [9], [14], [25]).

В данной работе, применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений (см. [16]), мы доказываем (см. Теорему 4.1) существование решения и компактность множества решений задачи управляемости для системы описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением указанного класса. В качестве примера рассматривается задача управляемости для процесса дробной диффузии.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть E - банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0,T]$ точками $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, $m \geqslant 1$ и функции $c : [0,T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{h\to 0+} c(t_k + h),$$

$$c(t_k^-) = \lim_{h\to 0-} c(t_k + h),$$

для $1 \leqslant k \leqslant m$.

Мы будем рассматривать задачу управляемости для системы описываемой, полулинейным функционально-дифференциальным включением с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}, \tag{2.1}$$

с начальным условием:

$$y(s) = \vartheta(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{2.2}$$

где D^α, $0 < \alpha < 1$, — дробная производная Римана—Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $t \geqslant 0$, $F : [0,T] \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ — мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний (см. п. 3) и $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0,T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$. Начальная функция $\vartheta \in \mathcal{B}$, и функция управления $u(\cdot)$ рассматривается в $L^p(I,U)$, $p > 1/\alpha$, где U — гильбертово пространство управлений. Оператор $B : U \to E$ предполагается ограниченным и линейным.

Предполагается, что сужение искомой функции $y : (-\infty, T] \to E$ на $[0,T]$ принадлежит пространству $\mathcal{PC}([0,T]; E)$ функций $z : [0,T] \to E$, непрерывных на $[0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z(t_k^-)$ и $z(t_k^+)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, существуют и $z(t_k^-) = z(t_k)$.

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}([0,T]; E)$, снабженное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_E\,,$$

является банаховым пространством и что классическое пространство $C([0,T]; E)$ является его замкнутым подпространством.

Для удобства обозначим $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$. Тогда для $z \in \mathcal{PC}([0,T]; E)$ обозначим $\widehat{z}_k \in C([t_k, t_{k+1}]; E)$, $k = 0, \ldots, m$, — функции, заданные соотношениями: $\widehat{z}_k(t) = z_k(t)$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$; $\widehat{z}_k(t_k) = z_k(t_k^+)$. Более того, для множества $D \subset \mathcal{PC}([0,T]; E)$ обозначим $\widehat{D}_k$, $k = 0, \ldots, m$, множества $\widehat{D}_k = \{\widehat{z}_k : z \in D\}$.

Нетрудно проверить следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Множество $D \subset \mathcal{PC}([0,T];E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}([0,T];E)$ тогда и только тогда, когда каждое множество $\widehat{D}_k$, $k = 0,\dots,m$, относительно компактно в $C([t_k,t_{k+1}];E)$.*

Из данного предложения и классической теоремы Арцела-Асколи вытекает следующий критерий относительной компактности множества в пространстве $\mathcal{PC}([0,T];E)$.

Лемма 2.2. *Множество $D \subset \mathcal{PC}([0,T];E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}([0,T];E)$ тогда и только тогда, когда D равностепенно непрерывно на каждом промежутке (t_k,t_{k+1}), $k = 0,\dots,m$, и множество $D(t) = \{z(t) : z \in D\}$ относительно компактно в E для $t \in [0,T] \setminus \{t_1,\dots,t_m\}$.*

Наконец, будем полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1,\dots,t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1,\dots,m, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ — непрерывные импульсные функции.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

3.1. Дробные первообразная и производная

Определение 3.1. (см. например [26], [28]). *Дробной первообразной* порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 3.2. *Дробной производной Римана—Лиувилля* порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $D_0^\alpha g$ следующего вида:

$$D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s)\,ds.$$

3.2. Многозначные отображения

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Введем следующие обозначения:

$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$ — множество всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$.

$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A$ выпукло$\}$;

$K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A$ компактно$\}$;

$Kv(\mathcal{E}) = \{Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})\}$ — множество всех непустых компактных и выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

Определение 3.3 (см. например [1], [16]). Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ — некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta : \mathrm{P}(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется *мерой некомпактности* (МНК) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\text{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *Монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$.

2) *Несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

3) *Правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, $\beta(\Omega) = 0$.

4) *Вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\ \}.$$

Отметим, что мера некомпактности Хаусдорфа удовлетворяет условию полуоднородности, т. е.:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega),$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$.

Нам понадобятся следующие меры некомпактности в пространстве $\mathcal{PC}([0,T];E)$:

(1) модуль послойной некомпактности:

$$\psi : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$\psi(D) = \sup_{t\in[0,T]} \chi(D(t)),$$

где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E и $D(t) = \{u(t), u \in D\}$;

(2) модуль равностепенной непрерывности:

$$mod_C : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$mod_C(D) = \max_{1\leqslant k\leqslant m} mod_C(\widehat{D}_k),$$

где

$$mod_C(\widehat{D}_k) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in\widehat{D}_k} \max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Нетрудно видеть, что обе меры некомпактности удовлетворяют всем вышеперечисленным свойствам, кроме свойства правильности.

Пусть $L : E \to E$ — ограниченный линейный оператор, тогда χ-норма L определяется как

$$\|L\|^{(\chi)} = \chi\Big(L(\Delta)\Big),$$

где $\Delta \subset E$ — единичный шар E. Нетрудно видеть, что $\|L\|^{(\chi)} \leqslant \|L\|$.

Определение 3.4 (см. например [2], [16]). Пусть X - метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху* (п.н.с.), если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x,y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$,

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$,

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Нам понадобится в дальнейшем следующее утверждение (см. [16]).

Лемма 3.1. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.с.*

Определение 3.5 (см. [1], [16]). Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется *уплотняющим относительно МНК* β (β–уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено:

$$\beta(F(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega).$$

Пусть $D \subset \mathcal{E}$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{E}$, а $\mathcal{U}_D$ — непустое открытое подмножество D. Обозначим через $\overline{\mathcal{U}_D}$ и $\partial\mathcal{U}_D$ замыкание и границу $\mathcal{U}_D$ соответственно. Из теории топологической степени для уплотняющих мультиотображений вытекает следующая теорема (см. [16]).

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{U}_D$ — открытая окрестность точки $a \in D$ и $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{U}_D} \to Kv(D)$ — п.н.с. β–уплотняющее мультиотображение, удовлетворяющее граничному условию:*

$$x - a \notin \lambda(\mathcal{F}(x) - a)$$

для всех $x \in \partial\mathcal{U}_D$ и $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}$: $\mathrm{Fix}\ \mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *— непустое компактное множество.*

3.3. Измеримые мультифункции

Напомним некоторые понятия (см., например, [2], [16]). Пусть E - банахово пространство.

Определение 3.6. Мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$, для $p \geqslant 1$, называется:

• *L^p–интегрируемой*, если она допускает L^p — интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p\left([0,T];E\right)$, такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$;

• *L^p–интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := sup\left\{\|g\|_E : g \in G(t)\right\} \leqslant \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0,T]$.

Множество всех L^p — интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0,T] \to K(E)$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t), G(t)) = 0,$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $\mathcal{H}$ — хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p — интегрально ограничена, то она L^p — интегрируема. Для L^p–интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int\limits_0^t G(s)ds := \left\{ \int\limits_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G \right\},$$

для любого $t \in [0,T]$.

Лемма 3.2 (см. [16], Теорема 4.2.3). *Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ L^p — интегрируемая и L^p–интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leqslant q(t),$$

для п. в. $t \in [0,T]$, *где* $q \in L^p_+([0,T])$. *Тогда*

$$\chi(\int\limits_0^t G(s)ds) \leqslant \int\limits_0^t q(s)ds,$$

для всех $t \in [0,T]$. *В частности, если мультифункция* $G : [0,T] \to K(E)$ *измерима и* L^p*–интегрально ограничена, то функция* $\chi(G(\cdot))$ *интегрируема, причем:*

$$\chi(\int\limits_0^t G(s)ds) \leqslant \int\limits_0^t \chi(G(s))ds,$$

для всех $t \in [0,T]$.

3.4. Фазовое пространство

Мы будем использовать слегка модифицированное понятие фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное Хейлом и Като (см. [13], [15]). Полагаем, что $\mathcal{B}$ — линейное пространство с полунормой $|\cdot|_{\mathcal{B}}$, состоящее из функций, отображающих $(-\infty;0]$ в E и удовлетворяющих нижеследующим аксиомам.

Если функция $v : (-\infty;T] \to E$ такова, что $v|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}([0,T];E)$ и $v_0 \in \mathcal{B}$, то

($\mathcal{B}_1$) $v_t \in \mathcal{B}$ для всех $t \in [0,T]$,

($\mathcal{B}_2$) функция $t \mapsto v_t$ непрерывна на $[0,T] \setminus \{t_1,\ldots,t_m\}$,

($\mathcal{B}_3$) $|v_t|_{\mathcal{B}} \leqslant K(t) sup\{\|v(s)\|_E : 0 \leqslant s \leqslant t\} + M(t)\,|v_0|_{\mathcal{B}}$, где $M, K : [0,T] \to [0,\infty)$, $K(\cdot)$ - непрерывно, $M(\cdot)$ - ограничено и эти функции не зависят от v.

Мы можем рассмотреть следующие примеры фазовых пространств удовлетворяющих всем вышеперечисленным свойствам.

Для $r > 0$ обозначим через $\mathcal{C}([-r,0];E)$ пространство всех кусочно-непрерывных функций $\psi : [-r,0] \to E$ с конечным набором точек разрыва $\{t_*\}$ на интервале $[-r,0]$, таких, что все значения $\psi(t_*^-)$ и $\psi(t_*^+)$ конечны. Рассматривая $\mathcal{C}([-r,0];E)$ как подпространство пространства всех измеримых функций, мы можем рассматривать его как нормированное пространство с нормой:

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}([-r,0];E)} = \int\limits_{-r}^0 \|\psi(\tau)\|\, d\tau.$$

Пример 1. Для некоторого $\nu > 0$, пусть $\mathcal{B} = PC_\nu$ - пространство функций $\psi : (-\infty,0] \to E$, таких, что:

(i) $\psi|_{[-r,0]} \in \mathcal{C}([-r,0];E)$ для всех $r > 0$;

(ii) интеграл $\int_{-\infty}^0 e^{\nu\theta}\,\|\psi(\theta)\|\,d\theta$ конечен.

Тогда мы можем положить:

$$|\psi|_{\mathcal{B}} = \int\limits_{-\infty}^0 e^{\nu\theta}\,\|\psi(\theta)\|\,d\theta.$$

Пример 2 (Пространство с "затухающей памятью"). Пусть $\mathcal{B} = PC_\rho$ — пространство функций $\psi : (-\infty,0] \to E$, таких, что:

(a) $\psi \in \mathcal{C}([-r,0];E)$ для некоторого $r > 0$;

(b) ψ интегрируема по Лебегу на $(-r,0]$ и существует положительная измеримая по Лебегу функция $\rho : (-\infty,-r) \to \mathbb{R}_+$, такая, что $\rho\psi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty,-r)$; более того, существует локально ограниченная функция $P : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\xi \leqslant 0, \quad \rho(\xi+\theta) \leqslant P(\xi)\rho(\theta)$ для п. в. $\theta \in (-\infty, -r)$. Тогда определим

$$|\psi|_{\mathcal{B}} = \int\limits_{-\infty}^{-r} \rho(\theta)\, \|\psi(\theta)\|\, d\theta + \int\limits_{-r}^{0} \|\psi(\tau)\|\, d\tau.$$

Простой пример такого пространства задается функциями $\rho = e^{\mu\theta}, \quad \mu \in \mathbb{R}$.

4. ТЕОРЕМА ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Обозначим $I = [0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$. Рассмотрим мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

$(F1)$ Мультифункция $F(\cdot, \vartheta, y) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение для всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E$;

$(F2)$ Мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$ - п.н.с. для п. в. $t \in I$;

$(F3)$ Существует функция $w \in L^\infty([0,T])$ такая, что:

$$\|F(t, \vartheta, y)\| := sup \{\|f\|_E : f \in F(t, \vartheta, y)\} \leqslant w(t)(1 + |\vartheta|_{\mathcal{B}} + \|y\|_E), \quad \text{п. в.} \quad t \in I,$$

для всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E$.

Пусть $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ — линейное пространство функций $y : (-\infty;T] \to E$, таких, что $y_0 \in \mathcal{B}$ и $\overline{y} = y|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}([0,T];E)$, с полунормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = |y_0|_{\mathcal{B}} + \|\overline{y}\|_{\mathcal{PC}}\,.$$

Для $y \in \mathcal{C}_E(-\infty;T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E), \quad \Phi_F(t) = F(t, y_t, y(t)).$$

Ясно, что функции $t \in [0,T] \to y_t \in \mathcal{B}$ и $y : [0,T] \to E$ кусочно-непрерывны. Тогда (см., например, [2], Теорема 1.5.22) мультифункция Φ_F, является L^p - интегрируемой, для любого $p \geqslant 1$.

Пусть $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E(-\infty;T] \multimap L^p([0,T];E)$ — *суперпозиционный мультиоператор*, заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(y) = \mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

Следуя [2], Теорема 1.5.30 и Замечание 1.5.32, можно установить следующее свойство замкнутости суперпозиционного мультиоператора.

Лемма 4.1. *Пусть $\{y_n\}$ - последовательность в $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$, сходящаяся к $y^* \in \mathcal{C}_E(-\infty;T]$. Предположим, что существует последовательность $\{\varphi_n\} \subset L^p([0,T];E)$, $\varphi_n \in \mathcal{P}_F(y_n)$ слабо сходящаяся к функции φ^*. Тогда $\varphi^* \in \mathcal{P}_F(y^*)$.*

Наложим на мультифункцию F следующее условие регулярности, выраженное в терминах мер некомпактности:

$(F4)$ Существует функция $\mu \in L^\infty([0,T])$ такая, что для любых ограниченных множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi_E(F(t, \Omega, Q)) \leqslant \mu(t)(\psi(\Omega) + \chi_E(Q)), \quad \text{п. в.} \quad t \in I,$$

где χ_E — мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \leqslant 0} \chi_E(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta), q \in \Omega\}$, $\theta \in (-\infty, 0]$.

Нетрудно видеть, что в случае, когда пространство E конечномерно, условие $(F4)$ вытекает из $(F3)$.

Если $\dim(E) = +\infty$, то частным случаем выполнения условия $(F4)$ является ситуация, когда мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot) : \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$ — вполне полунепрерывно сверху для п. в. $t \in [0,T]$, т.е. оно п.н.с. и преобразует каждое ограниченное множество в относительно компактное.

На оператор A, функцию ϑ и импульсные функции $\mathcal{I}_k$ из задачи (2.1)–(2.3) мы накладываем следующие условия:

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, где $t \geqslant 0$.

Заметим, что из условия (A) следует, что существует константа $J \geqslant 1$, такая что $\|e^{At}\|_{L(E)} \leqslant J$, для любого $t \in [0,T]$.

(ϑ) $\vartheta \in \mathcal{B}$ — заданная функция.

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k : E \to E$, $1 \leqslant k \leqslant m$, являются вполне непрерывными.

$(\mathcal{I}2)$ функции $\mathcal{I}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, являются глобально ограниченными, т. е. существует такое $\mathcal{N} > 0$, что $\|\mathcal{I}_k x\| \leqslant \mathcal{N}$ для всех $x \in E$.

Определение 4.1. *Интегральным решением* на $(-\infty, T]$ задачи (2.1)-(2.3), называется функция $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ вида:

$$y(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\Big(\vartheta(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\Big) + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds + & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds, & t \in [0,T], \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathcal{P}_F(y)$ и $u \in L^p(I,U)$.

Наша основная задача управляемости, может быть описана следующим образом.

Для заданной начальной функции $\vartheta(\cdot) \in \mathcal{B}$ и заданного $x_1 \in E$ мы будем рассматривать существование решения $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ и управления $u \in L^p(I,U)$ таких, что: $y(t) = \vartheta(t)$, $t \in (-\infty, 0]$ и

$$y(T) = x_1. \tag{2.4}$$

Сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи управляемости, то есть будем полагать, что линейный оператор управления $W : L^p(I,U) \to E$ следующего вида:

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T e^{A(T-s)}(T-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds,$$

имеет обратный ограниченный оператор $W^{-1} : E \to L^p(I,U)/KerW$. Заметим, что (см. [6]) без ограничения общности, можно считать $W^{-1} : E \to L^p(I,U)$.

Будем считать, что оператор W^{-1} удовлетворяет следующему условию регулярности:

(W) Найдется функция $\gamma \in L^\infty(I,E)$ такая, что для любого ограниченого множества $\Omega \subset E$, мы имеем:

$$\chi_U\Big(W^{-1}(\Omega)(t)\Big) \leqslant \gamma(t)\chi_E(\Omega) \quad \text{для п. в.} \quad t \in I,$$

где χ_U - мера некомпактности Хаусдорфа в U.

Пусть M_1, M_2 - константы, такие что:

$$\|B\| \leqslant M_1, \quad \left\|W^{-1}\right\| \leqslant M_2.$$

Для нахождения интегральных решений задачи (2.1) - (2.4), рассмотрим отображение

$$S : L^p([0,T];E) \to C([0,T];E),$$

$$S(\varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\Big[\varphi(s) + BW^{-1}\Big(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) -$$
$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\Big)(s)\Big]ds.$$

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{C}_E(-\infty, T] \multimap \mathcal{C}_E(-\infty, T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(y) = g(y) + S \circ \mathcal{P}_F(y) + \Xi(y),$$

где

$$g(y)(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right), & t \in [0, T], \end{cases}$$

$$\Xi(y) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} BW^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k(y(t_k))\right)(s)ds.$$

Применяя теорему Арцела-Асколи, свойства (A) и $(\mathcal{I}1)$ несложно проверить следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Оператор g вполне непрерывен.*

Снова применяя свойства (A), $(\mathcal{I}1)$ и непрерывность операторов B, W^{-1} можно установить следующую лемму.

Лемма 4.3. *Оператор Ξ вполне непрерывен.*

Нетрудно видеть, что функция $y \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ — интегральное решение задачи (2.1)-(2.4) на интервале $(-\infty; T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

С этой целью рассмотрим сужение оператора $\mathcal{G}$ на выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{PC}([0, T]; E)$, определенное как

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathcal{PC}([0, T]; E),\ y(0) = \vartheta(0)\},$$

полагая $\mathcal{G}(v) = \mathcal{G}(v[\vartheta])$, где

$$v[\vartheta](t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ v(t), & t \in (0, T]. \end{cases}$$

Определение 4.2. (см. [16]) Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0, T]; E)$ называется *полукомпактной*, если она L^p - интегрально ограничена, т.е.

$$\|\xi_n(t)\|_E \leqslant \nu(t) \text{ для всех } n = 1, 2, \dots \text{ и п. в. } t \in [0, T],$$

где $\nu \in L^p([0, T])$, и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t \in [0, T]$.

Лемма 4.4. *Оператор S обладает следующими свойствами:*

$(\mathbb{S}_1)$ *существует константа C такая, что:*

$$\|S(\xi) - S(\eta)\|_{C([0,T];E)} \leqslant C\,\|\xi - \eta\|_{L^p}, \quad \xi, \eta \in L^p([0, T]).$$

$(\mathbb{S}_2)$ *для каждого компактного множества $K \subset E$ и последовательности $\{\xi_n\} \subset L^p([0, T]; E)$ такой, что $\{\xi_n(t)\} \subset K$ для п. в. $t \in [0, T]$, слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, влечет сходимость $S(\xi_n) \to S(\xi_0)$ в $C([0, T]; E)$.*

Доказательство. Представим оператор S в виде

$$S(\varphi) = S_1(\varphi) + S_2(\varphi), \tag{4.1}$$

где

$$S_1(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)\, ds,$$

$$S_2(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} BW^{-1}\Big(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\Big)(s)ds.$$

$(\mathbb{S}_1)$ Используя неравенство Гельдера, мы имеем:

$$\|S_1(\xi)(t) - S_2(\eta)(t)\|_E \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} \|\xi(s) - \eta(s)\|_E \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\|S_1(\xi) - S_1(\eta)\|_{C([0,T];E)} \leqslant C' \|\xi - \eta\|_{L^p},$$

где

$$C' = \left[\frac{p-1}{\alpha p - 1}\right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{JT^{\alpha - \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$\|S_2(\xi)(t) - S_2(\eta)(t)\|_E =$$

$$= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} BW^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau\Big)(s)ds \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \times$$

$$\times \left[\int_0^t \left\| W^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau\Big)(s) \right\|_E^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C' M_1 \left\| W^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau\Big) \right\|_{L^1} \leqslant$$

$$\leqslant C' M_1 \sqrt[p]{T} \left\| W^{-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau\Big) \right\|_{L^p} \leqslant$$

$$\leqslant C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1} \left(\eta(\tau) - \xi(\tau)\right) d\tau \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^T e^{A(T-\tau)} (T-\tau)^{\alpha-1} \left\| \eta(\tau) - \xi(\tau) \right\|_E d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left[\int\limits_0^T (T-\tau)^{(\alpha-1)p/p-1} d\tau \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int\limits_0^T \left\| \xi(\tau) - \eta(\tau) \right\|_E^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant C'^2 M_1 M_2 \sqrt[p]{T} \left\| \xi - \eta \right\|_{L^p}.$$

Используя полученные неравенства для операторов S_1 и S_2, мы имеем:

$$\left\| S(\xi) - S(\eta) \right\|_{C([0,T];E)} \leqslant C \left\| \xi - \eta \right\|_{L^p}, \quad \xi, \eta \in L^p([0,T]),$$

где $C = C'(1 + C' M_1 M_2 \sqrt[p]{T})$.

($\mathbb{S}_2$) Представим оператор S_2 в виде:

$$S_2(\varphi) = S_1 \left(B W^{-1} \left(x_1 - e^{AT} \vartheta(0) - \zeta S_1(\varphi) \right) \right), \tag{4.2}$$

где $\zeta : C([0,T];E) \to E$, $\zeta y = y(T)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда, учитывая, что операторы W^{-1}, B и S_1 являются ограниченными и линейными, сведем проверку к оператору S_1.

Применяя Лемму 3.2, мы получим:

$$\chi \left(\{ S_1(\xi_n)(t) \} \right) \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \chi \left(\{ \xi_n(s) \} \right) ds = 0.$$

Это означает, что последовательность $\{ S_1(\xi_n)(t) \}_{n=1}^{\infty} \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0,T]$.

С другой стороны, если мы возьмем $t', t'' \in [0,T]$, такие, что $0 < t' < t'' \leqslant T$ и достаточно малое число $\varepsilon > 0$, то мы получим следующую оценку:

$$\left\| S_1(\xi_n)(t'') - S_1(\xi_n)(t') \right\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s) ds - \int\limits_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)} \xi_n(s) ds \right\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_0^{t'-\varepsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s) ds \right\|_E +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s) ds \right\|_E +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s) ds \right\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_0^{t'-\varepsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}] e^{A(t'-s)} \xi_n(s) ds \right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_0^{t'-\varepsilon}(t''-s)^{\alpha-1}e^{A(t'-\varepsilon-s)}[e^{A(t''-t'+\varepsilon)}-e^{A\varepsilon}]\xi_n(s)ds\right\|_E+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}[(t''-s)^{\alpha-1}e^{A(t''-s)}-(t'-s)^{\alpha-1}e^{A(t'-s)}]\xi_n(s)ds\right\|_E+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_{t'}^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}e^{A(t''-s)}\xi_n(s)ds\right\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\Bigg(\int\limits_0^{t'-\varepsilon}[(t''-s)^{\alpha-1}-(t'-s)^{\alpha-1}]\xi_n(s)\,ds+\|e^{A(t''-t'+\varepsilon)}-e^{A\varepsilon}\|_{L(E)}\int\limits_0^{t'-\varepsilon}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,ds+\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}(t'-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,ds+\int\limits_{t'}^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,ds\Bigg).$$

Поскольку $\{\xi_n(s)\}\subset K$ для п. в. $s\in[0,T]$, правая часть последнего неравенства, в силу малости ε, равномерно, относительно n, стремится к 0, при $t''\to t'$. Поэтому последовательность $\{S_1(\xi_n)\}$ равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела-Асколи, мы получаем, что последовательность $\{S_1(\xi_n)\}\subset C([0,T];E)$ относительно компактна.

Из свойства $(\mathbb{S}_1)$ вытекает, что $S_1:L^p([0,T];E)\to C([0,T];E)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда этот оператор непрерывен относительно топологии слабой секвенциальной сходимости, то есть слабая сходимость $\xi_n\rightharpoonup\xi_0$ влечет $S_1(\xi_n)\rightharpoonup S_1(\xi_0)$. Поскольку последовательность $\{S_1(\xi_n)\}$ относительно компактна, мы приходим к заключению, что $S_1(\xi_n)\to S_1(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$. Лемма доказана.

Используя представление (4.2) и доказательство Леммы 4.4, можно установить следующие технические результаты, доказательство которых может быть проведено по той же схеме как и в работе [3].

Лемма 4.5. *Пусть $\{\xi_n\}$ — полукомпактная последовательность в $L^p([0,T];E)$. Тогда $\{\xi_n\}$ слабо компактна в $L^p([0,T];E)$ и множество $\{S(\xi_n)\}$ — относительно компактно в $C([0,T];E)$. Более того, если $\xi_n\rightharpoonup\xi_0$, то $S(\xi_n)\to S(\xi_0)$.*

Лемма 4.6. *При выполнении условий $(F1)-(F4)$ и $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}2)$, мультиоператор*

$$\mathcal{G}=g+S\circ\mathcal{P}_F+\Xi$$

замкнутый, с компактными значениями.

Лемма 4.7. *Мультиоператор $\mathcal{G}$ — п.н.с.*

Доказательство. Используя Лемму 3.1 и Лемму 4.6, достаточно доказать, что $\mathcal{G}$ — квазикомпактное мультиотображение. Снова используя полную непрерывность g и Ξ, сведем проверку к мультиоператору $S\circ\mathcal{P}_F$. Пусть $\mathcal{Y}\subset\mathcal{D}$ — компактное множество, докажем, что $S\circ\mathcal{P}_F(\mathcal{Y})$ — относительно компактное подмножество $C([0,T];E)$. Предположим, что $\{z_n\}\subset S\circ\mathcal{P}_F(\mathcal{Y})$, тогда $z_n=S(\xi_n)$, где $\xi_n\in\mathcal{P}_F(v_n[\vartheta])$ для некоторой последовательности $v_n\subset\mathcal{Y}$. Согласно свойствам $(F3),(F4)$ последовательность ξ_n полукомпактна и, следовательно, слабо компактна в $L^p([0,T];E)$.

Согласно Лемме 4.5, последовательность z_n относительно компактна в $C([0,T];E)$. Лемма доказана.

Теперь введем векторную меру некомпактности $\nu(\Omega)$:

$$\nu:P(\mathcal{PC}([0,T];E))\to\mathbb{R}^2_+,$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, заданную как

$$\nu(\Omega) = (\psi(\Omega), mod_C(\Omega)).$$

Пусть $J^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|^{(\chi)}$ и $M_1^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|B\|^{(\chi)}$.

Лемма 4.8. *Для того чтобы оператор $\mathcal{G}$ был уплотняющим относительно меры некомпактности ν, достаточно чтобы*

$$V := \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)} M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right) < 1. \tag{4.3}$$

Доказательство. Из полной непрерывности операторов g, Ξ и свойств монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности меры некомпактности ν следует, что нам достаточно проверить свойство уплотняемости лишь для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ — непустое ограниченное множество и

$$\nu(\mathcal{G}(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega), \tag{4.4}$$

покажем, что Ω — относительно компактное множество.

Используя представление (4.1) из доказательства Леммы 4.4, для доказательства утверждения теоремы, будем рассматривать отдельно операторы S_1 и S_2.

Пусть $\Omega_t = \{y_t; y \in \Omega\}$. Рассмотрим оператор S_1 и многозначную функцию $s \in [0,t] \multimap G_1(s) \subset E$,

$$G_1(s) = \left\{(t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} \varphi(s), \quad \varphi \in \mathcal{P}_F(y)\right\}.$$

Она интегрально ограничена функцией:

$$s \to (t-s)^{\alpha-1} J w(s)\Big(1 + C_1 + C_2\Big),$$

где $C_1 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{y\in\Omega} |y_s|_{\mathcal{B}}$, $\quad C_2 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{y\in\Omega} \|y(s)\|_E$.

Оценим $\chi_E\Big(G_1(s)\Big)$:

$$\chi_E\Big(G_1(s)\Big) \leqslant (t-s)^{\alpha-1} \|e^{A(t-s)}\|^{(\chi)} \chi_E\Big(\{\varphi(s), \varphi \in \mathcal{P}_F(y)\}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)} \mu(s) \Big(\chi_E(\Omega(s)) + \psi(\Omega_s)\Big) \leqslant 2(t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega).$$

Оценим теперь $\chi_E\Big(S_1(\Omega)(t)\Big)$, $\quad t \in [0,T]$:

$$\chi_E\Big(S_1(\Omega)(t)\Big) = \chi_E\Big(\{S_1 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\Big) \leqslant \chi_E\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t G_1(s) ds\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\Gamma(\alpha)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \leqslant \frac{2}{\Gamma(\alpha)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \frac{t^\alpha}{\alpha} \psi(\Omega) \leqslant \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega).$$

Рассмотрим теперь оператор S_2 и многозначную функцию $s \in [0,t] \multimap G_2(s) \subset E$,

$$G_2(s) = \left\{e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} B W^{-1}\Big(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau) d\tau\Big)(s) : \varphi \in \mathcal{P}_F(y)\right\}.$$

Она интегрально ограничена функцией

$$s \to J(t-s)^{\alpha-1}M_1M_2\Big(\|x_1\|_E + J\|\vartheta(0)\|_{\mathcal{B}} + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}w(\tau)\Big(1+C_1+C_2\Big)d\tau\Big)$$

Оценим $\chi_E\Big(G_2(s)\Big)$:

$$\chi_E\Big(G_2(s)\Big) \leqslant J^{(\chi)}M_1^{(\chi)}(t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)\chi_E\left(\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau : \varphi \in \mathcal{P}_F(y)\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}(t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)\frac{2T^\alpha\|\mu\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}\psi(\Omega) \leqslant \frac{2T^\alpha\left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}\|\gamma\|_\infty\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(t-s)^{\alpha-1}\psi(\Omega).$$

Оценим $\chi_E\Big(S_2(\Omega)(t)\Big)$, $t \in [0,T]$:

$$\chi_E\Big(S_2(\Omega)(t)\Big) = \chi_E\Big(\{S_2 \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\Big) \leqslant \chi_E\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t G_2(s)ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2T^\alpha\left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}\|\gamma\|_\infty\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\psi(\Omega)\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \leqslant \frac{4T^{2\alpha}\left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}\|\gamma\|_\infty\|\mu\|_\infty}{\Gamma^2(\alpha+1)}\psi(\Omega).$$

Таким образом, получаем:

$$\chi_E\Big(\mathcal{G}(\Omega)(t)\Big) \leqslant \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^{(\chi)}\|\mu\|_\infty\psi(\Omega) + \frac{4T^{2\alpha}\left(J^{(\chi)}\right)^2 M_1^{(\chi)}\|\gamma\|_\infty\|\mu\|_\infty}{\Gamma^2(\alpha+1)}\psi(\Omega) = V\psi(\Omega),$$

а следовательно,

$$\psi\Big(\mathcal{G}(\Omega)\Big) \leqslant V\psi(\Omega). \tag{4.5}$$

Сравнивая (4.4) с (4.5) получаем, что $\psi(\Omega) = 0$. Из доказательства Леммы 4.4, следует, что множество $S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$ — равностепенно непрерывно, теперь воспользовавшись Леммой 4.2 и Леммой 4.3, мы имеем:

$$mod_C\Big(\mathcal{G}(\Omega)\Big) = 0,$$

значит $\nu(\Omega) = (0,0)$. Тогда мы заключаем, что Ω — относительно компактное множество, а оператор $\mathcal{G}$ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Лемма доказана.

Замечание. Отметим следующие частные случаи выполнения условия (4.3):

1) $\|\mu\|_\infty = 0$, то есть F вполне полунепрерывно сверху по второму и третьему аргументам в совокупности;

2) $J^{(\chi)} = 0$, то есть полугруппа e^{At} компактна.

Нам понадобится следующая модифицированная версия неравенства Беллмана-Гроноулла (см. [27]).

Лемма 4.9. *Пусть $h(t)$, $q(t)$ и $z(t)$ — неотрицательные, интегрируемые на $[a,b]$ функции, удовлетворяющие неравенству:*

$$z(t) \leqslant q(t) + \int\limits_a^t h(s)y(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

тогда выполняется следующее неравенство:

$$z(t) \leqslant q(t) + \int\limits_a^t exp\left\{\int\limits_a^t h(\theta)d\theta\right\} h(s)q(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Мы можем сформулировать теперь основной результат этой работы.

Теорема 4.1. *При выполнении условий* (A), $(F1)-(F4)$, (ϑ), (W), $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}2)$, *и* (4.3) *множество решений задачи* (2.1)-(2.4) *на* $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ *— непусто и компактно.*

Доказательство. Обозначим $y^* \in \mathcal{D}$ функцию

$$y^*(t) = e^{At}\vartheta(0).$$

Покажем, что множество решений $y \in \mathcal{D}$ семейства включений

$$y - y^* \in \lambda(\mathcal{G}(y) - y^*), \quad 0 < \lambda \leqslant 1,$$

априори ограничено.

Применяя условие $(F3)$, мы получаем оценку:

$$\|y(t) - y^*(t)\|_E \leqslant \lambda \left\|e^{At}\right\|_E \left\|\sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right\|_E + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1} \|\varphi(s)\|_E \, ds+,$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1} \left\|BW^{-1}\left(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\right)(s)\right\|_E ds+$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1} \left\|BW^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)(s)\right\|_E ds,$$

где $\varphi \in \mathcal{P}_F(y[\vartheta])$.

Применяя свойство $(\mathcal{I}2)$ и неравенство Гельдера, получаем оценку:

$$\|y(t)\|_E \leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\varphi(s)\|_E \, ds+,$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\|W^{-1}\left(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\right)(s)\right\|_U ds+$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\|W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)(s)\right\|_U ds \leqslant$$

$$\leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\varphi(s)\|_E \, ds + \frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int\limits_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} ds\right]^{\frac{p-1}{p}} \times$$

$$\times\left[\int_0^t \left\| W^{-1}\left(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\right)(s)\right\|_U^p ds\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\frac{JM_1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1}ds\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int_0^t \left\| W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)(s)\right\|_U^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\varphi(s)\|_E\, ds +$$

$$+\frac{JM_1C'}{\Gamma(\alpha)}\left[\left\| W^{-1}\left(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^1}^p\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\frac{JM_1C'}{\Gamma(\alpha)}\left[\left\| W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)\right\|_{L^1}^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\varphi(s)\|_E\, ds +$$

$$+\frac{JM_1C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left\| W^{-1}\left(x_1 - e^{AT}\vartheta(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T e^{A(T-\tau)}(T-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^p} +$$

$$+\frac{JM_1C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left\| W^{-1}\left(\sum_{k=1}^m e^{AT}\mathcal{I}_k\left(y(t_k)\right)\right)\right\|_{L^p} \leqslant$$

$$\leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\varphi(s)\|_E\, ds +$$

$$+\frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1\|_E + J\|\vartheta(0)\|_E + \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}\|\varphi(\tau)\|_E\, d\tau\right) + \frac{J^2 m\mathcal{N}M_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1\|_E + J\|\vartheta(0)\|_E + Jm\mathcal{N}\right) +$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\right)\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|\varphi(s)\|_E\, ds,$$

где

$$C' = \left[\frac{p-1}{\alpha p - 1}\right]^{\frac{p-1}{p}}\frac{JT^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Теперь, применяя свойство $(F3)$, мы имеем:

$$\|y(t)\|_E \leqslant \mathcal{L}_1 + \frac{J\mathcal{L}_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}w(s)(1 + |(y[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|y(s)\|_E)ds,$$

где

$$\mathcal{L}_1 = J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1\|_E + J\|\vartheta(0)\|_E + Jm\mathcal{N}\right),$$

$$\mathcal{L}_2 = \left(1 + \frac{JM_1M_2C'\sqrt[p]{T}}{\Gamma(\alpha)}\right).$$

Из свойства $(\mathcal{B}_3)$ вытекает, что

$$|(y[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|y(s)\|_E \leqslant M\,|\vartheta|_{\mathcal{B}} + (K+1)\,\|y\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)},$$

где $M(t) \leqslant M, \quad K(t) \leqslant K, \quad t \in [0,T]$.

Тогда получаем оценку:

$$\|y(t)\|_E \leqslant \mathcal{L}_1 + \frac{J\mathcal{L}_2\left(M\,|\vartheta|_{\mathcal{B}} + 1\right)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}w(s)ds +$$

$$+\frac{J\mathcal{L}_2\left(K+1\right)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1}w(s)\,\|y\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)}\,ds.$$

Снова используя неравенство Гельдера, имеем:

$$\|y(t)\|_E \leqslant \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\left(M\,|\vartheta|_{\mathcal{B}} + 1\right)C'\left(\int\limits_0^T |w(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\mathcal{L}_2\left(K+1\right)C'\left(\int\limits_0^T |w(s)|^p\,\|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$q_0 = N\mathcal{L}_1 + N\mathcal{L}_2\left(M\,|\vartheta|_{\mathcal{B}} + 1\right)C'\left(\int\limits_0^T |w(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}, h(s) = \left[N\mathcal{L}_2C'(K+1)\right]^{1/p}w(s), \quad s \in [0,T].$$

Тогда получаем:

$$\|y\|_{\mathcal{PC}([0,t];E)} \leqslant q_0 + \left(\int\limits_0^T |h(s)|^p\,\|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)}\,ds\right)^{1/p}.$$

Пусть $z(t) = \|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)}$, тогда из последнего неравенства получаем следующую оценку:

$$z(t) \leqslant 2^p q_0^p + 2^p\int\limits_0^T |h(s)|^p\,z(s)ds,$$

для всех $t \in [0,T]$. Теперь, применяя Лемму 4.9 к последнему неравенству, получаем:

$$z(t) = \|y\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)} \leqslant 2^p q_0^p\left(1 + \int\limits_0^T exp\left\{2^p\int\limits_s^T |h(\theta)|^p\,d\theta\right\}|h(s)|^p\,ds\right),$$

для всех $t \in [0,T]$. Пусть

$$R_0 = 2q_0 \sqrt[p]{1 + \int\limits_0^T exp\left\{2^p \int\limits_s^T |h(\theta)|^p \, d\theta\right\} |h(s)|^p \, ds},$$

тогда мы получаем окончательную оценку:

$$\|y\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leqslant R_0.$$

Применим теперь Теорему 3.1, полагая $a = y^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ и $\overline{\mathcal{U}_{\mathcal{D}}} = \Big\{v \in \mathcal{D}, \quad \|v\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leqslant R\Big\}$, где $R \geqslant R_0$.

Мы получаем, что множество неподвижных точек $Fix\ \mathcal{G}$ непусто и компактно. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПРОЦЕССА ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

В качестве приложения мы рассмотрим задачу управляемости для процесса, описываемого диффузионным уравнением дробного порядка. Уравнения такого типа возникают в задачах электроаналитической химии, моделирования диффузии в фрактальных средах и др. (см. [26] и имеющиеся там ссылки).

Для простоты мы рассмотрим одномерную модель. Пусть $z(t,x)$ - концентрация диффундирующего вещества в момент времени $t \in [0,T]$ в точке $x \in \mathbb{R}$. Мы будем предполагать следующее:

(H_1) имеется l источников вещества, свойства которых зависят от концентрации и плотность которых характеризуется функциями $\varphi_i(x,z)$, $i = 1,\dots,l$, $\varphi_i : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Интенсивность источников в каждый момент времени характеризуется функциями $v_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,l$, диапазон регулирования которых определяется ограничениями типа обратной связи:

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_l(t)) \in V\left(z\left(t,\cdot\right)\right), \quad t \in [0,T], \tag{5.1}$$

где $V : L^2(\mathbb{R}) \to Kv(\mathbb{R}^l)$ - п.н.с. мультиотображение удовлетворяющее условию глобальной ограниченности

$$\|V(z)\| \leqslant M, \tag{5.2}$$

для всех $z \in L^2(\mathbb{R})$, где $M > 0$;

(H_2) обозначая $y(t) = z(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, будем полагать также, что процесс диффузии подвержен в моменты $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, $m \geqslant 1$, импульсным воздействиям (2.3), где отображения $\mathcal{I}_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяют условиям $(\mathcal{I}_1)$, $(\mathcal{I}_2)$;

(H_3) наконец, предполагая процесс управляемым, мы будем считать, что управляющие функции выбираются по правилу $u(\cdot) \in L^p(I,U)$, $p > 1/\alpha$, где U — гильбертово пространство управлений. Реализация управляющих воздействий осуществляется с помощью ограниченного линейного оператора $B : U \to L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, считая для простоты коэффициент дробной диффузии равным еденице, мы получаем, что процесс описывается следующими соотношениями:

$$D^\alpha z(t,x) = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial^2 x} + \sum_{i=1}^{l} v_i(t)\varphi_i\left(x, z\left(t,x\right)\right) + Bu(t), \quad t \in [0,T], \quad \alpha \in (0,1), \tag{5.3}$$

$$z(t,\pm\infty) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{5.4}$$

$$z(0,\cdot) = z_0 \in L^2(\mathbb{R}), \tag{5.5}$$

и подчиняется также условиям импульсных воздействий (2.3).

Будем предполагать, что функции φ_i $(i = 1, \dots, l)$ удовлетворяют следующим условиям:

$(\varphi 1)$ $\varphi_i(\cdot, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима для любого $z \in \mathbb{R}$;

$(\varphi 2)$ $|\varphi_i(x, z)| \leqslant \rho_i$, для любого $z \in \mathbb{R}$, где $\rho_i \in L^2_+(\mathbb{R})$;

$(\varphi 3)$ $|\varphi_i(x, z_0) - \varphi_i(x, z_1)| \leqslant k_i \left| z_0 - z_1 \right|$, для любых $x \in \mathbb{R},\ z_0, z_1 \in \mathbb{R}$, где k_i не зависят от x.

Рассмотрим мультифункцию $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \multimap L^2(\mathbb{R})$,

$$\Phi(z', z'') = \left\{ \sum_{i=1}^{l} v_i \varphi_i(x, z''(x)) :\ v \in V(z') \right\}.$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение Φ имеет выпуклые замкнутые значения.

Зафиксируем z' и рассмотрим произвольную функцию $\sigma_0 \in \Phi(z', z''_0)$. Она имеет вид $\sigma_0(x) = \sum_{i=1}^{l} v_i \varphi_i(x, z''_0(x)),\ v \in V(z')$. Возьмем функцию $\sigma_1 \in \Phi(z', z''_1)$ вида $\sigma_1(x) = \sum_{i=1}^{l} v_i \varphi_i(x, z''_1(x)),\ v \in V(z')$. Тогда, применяя условие $(\varphi 3)$, получим:

$$\|\sigma_0 - \sigma_1\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{l} v_i^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \varphi_i(x, z''_0(x)) - \varphi_i(x, z''_1(x)) \right|^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{l} v_i^2 k_i^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left| z''_0(x) - z''_1(x) \right|^2 dx} = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} v_i^2 k_i^2}\, \left\| z''_0 - z''_1 \right\|_{L^2} \leqslant kM \left\| z''_0 - z''_1 \right\|_{L^2},$$

где $k = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} k_i$.

Отсюда вытекает, что мультиотображение $\Phi(z', z'')$ является по второму аргументу kM-липшицевым относительно метрики Хаусдорфа.

Зафиксируем теперь z''. Из полунепрерывности сверху мультиотображения V вытекает, что мультиотображение $\Phi(\cdot, z'')$ полунепрерывно сверху. Кроме того, для любого подмножества $\Delta \subset L^2(\mathbb{R})$ множество $\Phi(\Delta, z'') \subset L^2(\mathbb{R})$ является ограниченным подмножеством линейной оболочки функций $\varphi_1(\cdot, z''(\cdot)), \dots, \varphi_l(\cdot, z''(\cdot))$ и поэтому относительно компактно.

Это означает (см. [16], Предложение 2.2.2), что мультиотображение $F : L^2(\mathbb{R}) \to Kv(L^2(\mathbb{R}))$, $F(y) = \Phi(y, y)$ полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию регулярности относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ в $L^2(\mathbb{R}) : \chi(F(\Omega)) \leqslant kM\chi(\Omega)$.

Отметим еще, что из условий (5.2) и $(\varphi 2)$ вытекает ограниченность мультиотображения F константой $M \sum_{i=1}^{l} \|\rho_i\|_{L^2}$.

Таким образом, мы можем свести задачу к вопросу об управляемости для дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве $E = L^2(\mathbb{R})$:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(y(t)) + Bu(t),\ t \in [0, T]. \tag{5.6}$$

Здесь A обозначает оператор Лапласа $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ с областью определения $D(A) = \left\{ y \in H^2(\mathbb{R}) :\ y(\pm\infty) = 0 \right\}$, где $H^2(\mathbb{R})$ — пространство функций Соболева.

Известно (см., например, [12]), что оператор A порождает на $L^2(\mathbb{R}^n)$ полугруппу диффузии вида:

$$e^{At} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\xi - r|^2}{4t^2}} f(r) dr. \tag{5.7}$$

Таким образом, условие разрешимости линейной задачи управляемости, соответствующей (5.6), может быть записано как условие обратимости линейного оператора $W : L^p(I, U) \to L^2(\mathbb{R})$, $Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-s)}(T - s)^{\alpha - 1} Bu(s) ds$, для которого считаем выполненным условие (W).

Поскольку полугруппа (5.7) сжимающая (см. [12]), мы можем положить $J^{(\chi)} = 1$. Тогда условие уплотняемости интегрального мультиоператора (4.3) имеет вид:

$$\frac{2T^{\alpha}kM}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{2T^{\alpha}kMM_1^{(\chi)}\,\|\gamma\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)<1.$$

Таким образом, из Теоремы 4.1 вытекает, что при вышеуказанных условиях процесс дробной диффузии управляем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ахмеров Р.Р. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов, А.Е. Родкина, Б.Н. Садовский. — Новосибирск: Наука, 1986. — 266 с.

[2] Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Издание 2-е, испр. и доп. — М: Книжный дом «Либроком», 2011. — 224 с.

[3] Обуховский В.В., О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве / В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 192–209.

[4] Петросян Г. Г. О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве / Г. Г. Петросян // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 207–212.

[5] Самко С.Г. Интегралы и прозводные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[6] Abbas S. Topics in Fractional Differential Equations / S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guerekata. — Developments in Mathematics, Springer, New York, 2012. — 396 p.

[7] Balachandran K. Controllability of Nonlinear Systems in Banach Spaces: a Survey / K. Balachandran, J. P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — 115 (1). — P. 7–28.

[8] Baleanu D. Fractional Calculus Models and Numerical Methods / D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo. — World Scientific Publishing, New York, 2012. — 400 p.

[9] Benchohra M. Impulsive Differential Equations and Inclusions / M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas // Contemporary Mathematics and Its Applications, 2, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006. — 370 p.

[10] Benedetti I. Controllability for Impulsive Semilinear Functional Differential Inclusions with a Non-compact Evolution Operator / I. Benedetti, V. Obukhovskii, P. Zecca // Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization. — 2011. — P. 39–69.

[11] Diestel J. Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$ / J. Diestel, W.M. Ruess, W. Schachermayer // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — 118. — P. 447–453.

[12] Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm. — Springer-Verlag, Berlin, 2010. — 252 p.

[13] Engel K.-J. A Short Course on Operator Semigroups / K.-J. Engel, R. Nagel. — Springer, Berlin, 2006. — 250 p.

[14] Hale J. K. Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay / J. K. Hale, J. Kato // Funkcial. Ekvac. — 1978. — 21, no. 1. — P. 11–41.

[15] Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer. — World Scientific, Singapore, 2000. — 429 p.

[16] Hino Y. Functional Differential Equations with Infiniti Delay / Y. Hino, S. Murakami, T. Naito. — Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1473, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[17] Kamenskii M. On Some Topological Methods in Theory of Neutral Type Operator Differential Inclusions with Applications to Control Systems / M. Kamenskii, V. Obukhovskii,

J.-C. Yao // Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. — 2013. — 33. — P. 193–204.

[18] Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca. — de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin–New-York, 2001. — 231 p.

[19] Ke T.D. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays / T.D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong, J.-C. Yao // Applicable Analysis. — 2013. — V. 92, № 1. — P. 115–137.

[20] Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. — 540 p.

[21] Lakshmikantham V. Theory of Fractional Functional Differential Equations / V. Lakshmikantham // Nonlinear Anal. — 2008. — V. 69, № 10. — P. 3337–3343.

[22] Lakshmikantham V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov. — Series in Modern Applied Mathematics, 6, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989. — 273 p.

[23] Lakshmikantham V. Basic Theory of Fractional Differential Equations / V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala // Nonlinear Anal. — 2008. — V. 69, № 8. — P. 2677–2682.

[24] Miller K.S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K.S. Miller, B. Ross. — John Wiley, Inc., New York, 1993. — 384 p.

[25] Obukhovskii V. Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations / V. Obukhovskii, J.-C. Yao // Fixed Point Theory. — 2010. — V. 11, №.1. — P. 85–96.

[26] Obukhovskii V. Controllability for Systems Gaverned by Semilinear Differential Inclusions in a Banach Space with a Non-compact Semigroup / V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Analysis. — 2009. V. 70. P. 3424–3436.

[27] Perestyuk N.A. Differential Equations with Impulse Effects / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.A. Skripnik. — Multivalued Right-Hand Sides With Discontinuities. de Gruyter Studies in Mathematics, 40. Walter de Gruyter Co., Berlin, 2011. — 307 p.

[28] Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — Academic Press, San Diego, 1999. — 340 p.

[29] Qin Y. Nonlinear Parabolic-Hyperbolic Coupled Systems and Their Attractors / Y. Qin. — Operator Theory: Advances and Applications, 184. Advances in Partial Differential Equations (Basel). Birkhauser Verlag, Basel, 2008. — 480 p.

[30] Tarasov V.E. Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V.E. Tarasov. — Nonlinear Physical Science, Springer, Heidelberg; Higher Education Press, Beijing, 2010. — 504 p.

Обуховский Валерий Владимирович, Воронежский государственный педагогический университет, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Тел.: +7–(473)–255–36–63

Obukhovskii Valeri, Voronezh State Pedagogical University, Faculty of Physics and Mathematics
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Tel.: +7–(473)–255–36–63

Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет, ассистент кафедры высшей математики
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
Тел.: +7–(473)–255–36–63

Petrosyan Garik, Voronezh State Pedagogical University, Faculty of Physics and Mathematics
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
Tel.: +7–(473)–255–36–63