УДК 519.624

# ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ СТИЛТЬЕСА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ*

**М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 01.11.2013 г.

**Аннотация**: в работе метод конечных элементов адаптирован для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на графе, которая возникает при моделировании деформаций системы струн с локализованными особенностями (упругие опоры, импульсные внешние воздействия), расположенной вдоль геометрического графа-звезда. При этом такого рода особенности могут быть локализованы как на ребрах, так и в узле графа. Получена оценка погрешности.
**Ключевые слова**: геометрический граф, мера, интеграл Стилтьеса, импульсные воздействия, метод конечных элементов.

**Abstract**: in this paper the finite elements method is adapted for solution of a boundary value problem with Stieltjes differentials on a graph, that occurs when modeling deformations of a system of strings with localized singularities ( elastic supports, impulse external impacts), located along the geometric graph-star. Thus such singularities can be localized as on edges of the graph, so in the node of the graph. The error estimate is received.
**Keywords**: geometric graph, measure, Stieltjes integral, impulse impacts, finite elements method.

В последнее десятилетие в теории обыкновенных дифференциальных уравнений на геометрических графах был осуществлен качественный прорыв. Появилось несколько монографий и обзоров (см, например [1], [2], включая библиографию) наряду с сотнями публикаций в разных журналах. Геометрические графы активно используются в математическом моделировании, поскольку современные технические конструкции часто допускают структурную формализацию в виде одномерных континуумов, взаимодействующих через связующие их узлы. Это могут быть и антенные устройства, и упругие сетки, и решетки из стержней, и электрические цепи, и гидравлические системы, и многое другое. К настоящему времени для уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами, рассматриваемых на геометрических графах, изучен вопрос о разрешимости задачи с краевыми условиями типа Штурма–Лиувилля при условиях трансмиссии во внутренних вершинах графа, вопрос о структуре спектра, получен аналог осцилляционной теоремы Штурма, установлен аналог формулы Даламбера, разработаны алгоритмы для численного решения. Начато исследование задач на графе, когда коэффициенты и правая часть не только не являются непрерывными, но и могут иметь особенности типа дельта-функций и их производных (публикации Ю. В. Покорного, С. А. Шаброва, М. Б. Зверевой, Ж. И. Бахтиной [3]–[7] и др.). Такие задачи возникают при моделировании объектов с сингулярной структурой, когда допускаются упругие опоры, сосредоточенные массы, сосредоточенные внешние воздействия и пр.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ВГУ (№ ПСР-МГ/04-13), грантов РФФИ № 12-01-00392 и № 14–01–00867

Ю. В. Покорным был предложен подход [6], позволяющий формализовать подобные задачи в виде единого уравнения в дифференциалах Стилтьеса. Введение дифференциала Стилтьеса позволяет проводить поточечный анализ решений и при этом учитывать возможность появления дельта функций не только во внутренних точках ребер графа, но и в узле. Подобные дельта-функции, порождаемые ветвящимися атомами меры, в математической физике ранее не были известны. Однако численные методы для решения такого рода задач находятся в стадии формирования. В настоящей работе разработаны численные методы для распределенных систем на геометрических графах (типа звезда) с учетом локализованных особенностей, необходимые для решения задач наблюдения за процессами и контроля состояния конструкции объектов.

Пусть $\Gamma$ — граф-звезда, состоящий из $M$ ребер (прямолинейных интервалов $\gamma_i = (a, b_i)$, $i = 1, 2, \dots M$) и узла $a$, т.е. $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{M} (a, b_i) \bigcup \{a\}$. Всюду далее будем использовать терминологию и обозначения из [1], [3], [6], [7]. Множество граничных вершин $\Gamma$ обозначим через $\partial\Gamma$, т.е. $\partial\Gamma = \{b_i, i = 1, 2, \dots M\}$. Обозначим через $R(\Gamma) = \bigcup\limits_{i=1}^{M} \gamma_i$, $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \partial\Gamma$. Пусть ребра параметризованы отрезком $[0, 1]$ и ориентированы к узлу. Тогда точке $a$ ставится в соответствие $x = 1$; граничным вершинам ставится в соответствие $x = 0$. Рассмотрим на $\Gamma$ задачу

$$\begin{cases} -D(pu') + uDQ = DF, \\ u|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $DG$ — дифференциал Стилтьеса [6], [7] от функции ограниченной вариации на графе. Определения на графе функции ограниченной вариации и абсолютно-непрерывной функции аналогичны классическим. Если исходные функции $p$, $Q$, $F$ дифференцируемы внутри каждого ребра $\gamma_i$ графа $\Gamma$, то на каждом ребре уравнение (1) эквивалентно классическому уравнению Штурма–Лиувилля

$$-(p_i u_i')' + q_i u_i = f_i, \tag{2}$$

где $q_i$ и $f_i$ — обычные производные вдоль соответствующего ребра $\gamma_i$ от функций $Q_i$, $F_i$ ($q_i = Q_i', f_i = F_i'$). В узле справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{M} p_i(a-0) u_i'(a-0) + q(a)u(a) = f(a), \tag{3}$$

где через $z_i$ обозначено сужение функции $z$ на ребро $\gamma_i$.

В задаче (1) мы предполагаем, что функции $p, Q, F$ ограниченной на $\overline{\Gamma}$ вариации, непрерывны в точках $\partial\Gamma$, причем $\inf\limits_{R(\Gamma)} p > 0$. Пусть, более того, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации. Решение задачи (1) мы ищем в классе $E$ — абсолютно-непрерывных на $\overline{\Gamma}$ функций $u(x)$, производная которых $u'(x)$ является на каждом ребре функцией ограниченной вариации. Заметим, что $DQ$ определяет распределение упругой реакции внешней среды ($dQ_i$ определяет распределение упругой реакции вдоль ребра $\gamma_i$), а $DF$ отвечает за плотность внешней нагрузки ($DF_i$ отвечает за распределение внешней нагрузки вдоль ребра $\gamma_i$). При этом $dQ_i$, $dF_i$ определяют меры на объединении ребер, т.е. на $R(\Gamma)$. $Q$-мера точки $a$, обозначаемая через $Q\{a\}$, предполагается неотрицательной и совпадает с упругостью опоры, сосредоточенной в этой точке. А $F$-мера точки $a$, обозначаемая через $F\{a\}$, равна внешней силе, сосредоточенной в точке $a$. Из сделанных предположений следует, что задача (1) имеет единственное решение (см. [6], [7]).

На всяком ребре $\gamma_i$ уравнение (1) может быть записано в виде

$$-(p_i u_i')(x) + \int_0^x u_i \, dQ_i = F_i(x) - F_i(0) - (p_i u_i')(0). \tag{4}$$

Из (4) следует, что для всякой точки $\xi$, расположенной на ребре, в которой хотя бы одна из функций $p_i$, $Q_i$, $F_i$ терпит разрыв, справедливо равенство

$$-\Delta(p_i u_i')(\xi) + u_i(\xi)\Delta Q_i(\xi) = \Delta F_i(\xi),$$

где скачок $\Delta z(\xi)$ функции $z(x)$ в точке $\xi$ определяется как $\Delta z(\xi) = z(\xi{+}0){-}z(\xi{-}0)$. Отметим, что скачок функции $Q(x)$ в точке $\xi$ равен упругости опоры, сосредоточенной в этой точке, а скачок функции $F(x)$ в точке $\xi$ равен сосредоточенной в этой точке силе. В узле уравнение (1) реализуется в виде

$$\sum_{i=1}^{M}(p_i u_i')(a-0) + u(a)Q\{a\} = F\{a\}. \tag{5}$$

Заметим, что в силу непрерывности в узле, для всех $i$ должно выполняться $u(a) = u_i(a)$. При этом, если в узле отсутствует упругая опора (т.е. $Q\{a\} = 0$), и не прикладывается сосредоточенная сила ($F\{a\} = 0$), то (5) принимает вид условия трансмиссии

$$\sum_{i=1}^{M}(p_i u_i')(a-0) = 0.$$

Для нахождения приближенного решения задачи (1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого рассмотрим разбиение $\overline{\Gamma}$ на, вообще говоря, неравные части точками $0 = x_0^i < x_1^i < \ldots < x_{n_i}^i = 1$, $(i = 1, 2, \ldots M)$. Отметим, что граничные вершины и узел будем обязательно включать в разбиение.

Для $i$-го ребра $k$-ю базисную функцию $\varphi_{k,i}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots M)$ зададим формулой

$$\varphi_{k,i}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k-1}^i}{x_k^i - x_{k-1}^i}, & x \in [x_{k-1}^i, x_k^i], \\ \dfrac{x - x_{k+1}^i}{x_k^i - x_{k+1}^i}, & x \in [x_k^i, x_{k+1}^i], \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что базисные функции $\varphi_{k,i}(x)$ равны нулю везде на $\overline{\Gamma}$, кроме промежутка $(x_{k-1}^i, x_{k+1}^i)$ соответствующего ребра с номером $i$. При этом $\varphi_{k,i}(x_k^i) = 1$.

Также определим базисную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n_i-1}^i}{1 - x_{n_i-1}^i}, & x \in [x_{n_i-1}^i, 1], \quad i = 1, 2, \ldots M, \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в точках разбиения. В связи с этим будем использовать в задаче (1) вместо $u(x)$ кусочно-линейную функцию

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_i-1} v_j^i \varphi_{j,i}(x) + c\varphi(x),$$

где $v_j^i$, $c$ — значения $v(x)$ в точках разбиения. Умножим уравнение (1) на $\varphi_{k,i}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots M)$ и проинтегрируем по графу $\Gamma$. Заметим, что

$$\int\limits_{\Gamma} z\,dG = \sum_{i=1}^{M}\int\limits_{\gamma_i} z_i\,dG_i + z(a)G\{a\},$$

где $G\{a\}$ — атом меры, сосредоточенной в узле, $G_i$ — сужение $G$ на ребро $\gamma_i$, $z_i$ —сужение $z$ на ребро $\gamma_i$.

Получим, что

$$-\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)\,d(pu')+\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)u(x)\,dQ=\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)\,dF.$$

Поскольку функции $\varphi_{k,i}(x)$ равны нулю в граничных вершинах и узле, то интеграл $-\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)d(pu')$ совпадает с суммой интегралов по ребрам, которая, в свою очередь, после применения на каждом ребре формулы интегрирования по частям, равна

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi'_{k,i}(x)(pu')(x)\,dx.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi'_{k,i}(x)(pu')(x)\,dx+\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)u(x)\,dQ=\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)\,dF. \tag{7}$$

Умножим теперь уравнение (1) на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по графу Г. Получим, что

$$-\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\,d(pu')+\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)u\,dQ=\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\,dF.$$

Заметим, что с учетом $\varphi(0)=0$ и интегрирования по частям, имеем:

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\,d(pu')=\sum_{i=1}^{M}\int\limits_{\gamma_i}\varphi(x)\,d(pu')-\varphi(1)\sum_{i=1}^{M}(p_iu_i'(1-0))=$$
$$=\sum_{i=1}^{M}\varphi(1)(p_iu_i'(1-0))-\sum_{i=1}^{M}\int\limits_{\gamma_i}\varphi'(x)(pu')(x)\,dx-\sum_{i=1}^{M}\varphi(1)(p_iu_i'(1-0))=-\int\limits_{\Gamma}\varphi'(x)pu'(x)\,dx.$$

Откуда следует равенство

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi'(x)(pu')(x)\,dx+\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)u(x)\,dQ=\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\,dF. \tag{8}$$

Подставив в равенства (7), (8) вместо $u(x)$ функцию $v(x)$, получим систему из $\sum\limits_{i=1}^{M}n_i-M+1$ уравнений с $\sum\limits_{i=1}^{M}n_i-M+1$ неизвестными вида

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_i-1}v_j^i\int\limits_{\Gamma}p(x)\varphi'_{k,i}(x)\varphi'_{j,i}(x)\,dx+c\int\limits_{\Gamma}p(x)\varphi'_{k,i}(x)\varphi'(x)\,dx+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_i-1}v_j^i\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)\varphi_{j,i}(x)\,dQ+$$
$$+c\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)\varphi(x)\,dQ=\int\limits_{\Gamma}\varphi_{k,i}(x)\,dF.$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_i-1}v_j^i\int\limits_{\Gamma}p(x)\varphi'(x)\varphi'_{j,i}(x)\,dx+c\int\limits_{\Gamma}p(x)\varphi'^2(x)\,dx+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_i-1}v_j^i\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\varphi_{j,i}(x)\,dQ+$$

$$+ c \int\limits_{\Gamma} \varphi^2(x)\, dQ = \int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\, dF.$$

Эта система имеет «почти» трёхдиагональную матрицу. Введем обозначение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_{\Gamma} p\varphi'\psi'\, dx + \int\limits_{\Gamma} \varphi\psi\, dQ.$$

Очевидно, что последнее выражение представляет собой билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывных на $\overline{\Gamma}$ функций, имеющих производную, суммируемую с квадратом (на каждом ребре) и удовлетворяющих условию $u|_{\partial\Gamma} = 0$. Благодаря положительности функции $p$, неубывания $Q$ на каждом ребре (в смысле ориентации) и неотрицательности $Q\{a\}$, он еще и невырожденный, т.е.

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_{\Gamma} p\varphi'\psi'\, dx + \int\limits_{\Gamma} \varphi\psi\, dQ > 0$$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0.$$

Поэтому этот функционал может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты рассматриваемой системы уравнений $A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$ образуют матрицу Грамма системы линейно независимых векторов $\varphi_{k,i}$, $\varphi$. Значит, определитель матрицы коэффициентов изучаемой системы уравнений отличен от нуля, откуда следует, что полученная система имеет единственное решение.

**Теорема 1.** *Пусть $u(x)$ — точное решение задачи* (1); *$v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда*

$$\langle u - v, u - v \rangle \leqslant Ch,$$

*причем, константа $C$ не зависит от $h = \dfrac{1}{N}$, где $N$ — количество интервалов, на которые производится разбиение каждого ребра (сетка предполагается равномерной).*

*Доказательство.* Для упрощения выкладок будем считать $p(x) = 1$. При произвольной $p(x)$, отделенной от нуля, проведенные ниже рассуждения необходимо незначительно изменить. Как было показано в [6], [7], задача (1) возникает из задачи о минимизации квадратичного функционала (потенциальной энергии)

$$\Phi(v) = \int\limits_{\Gamma} \frac{v'^2}{2}\, dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{v^2}{2}\, dQ - \int\limits_{\Gamma} v\, dF \tag{9}$$

при условии $v|_{\partial\Gamma} = 0$. Решение (1) и является точкой минимума функционала (9) на множестве $E_0$, где $E_0$ — подпространство $E$ функций, удовлетворяющих условию $v|_{\partial\Gamma} = 0$. Так как функционал (9) не содержит вторых производных, то его можно определить на функциях, у которых первая производная суммируема с квадратом, т.е. на $\widehat{E}_0$ — пополнении $E_0$ по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{E}_0} = \int\limits_{\Gamma} u'^2\, dx + \int\limits_{\Gamma} u^2\, dQ.$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимального значения функционала, поскольку каждое новое значение $\Phi(v)$ есть предел $\Phi(v_n)$, где $v_n \in E_0$

и $\|v_n - v\|_{\widehat{E}_0} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, если $u$ доставляет $\min\limits_{E_0} \Phi(v)$, то $\Phi(v_n) \geqslant \Phi(u)$, и следовательно, $\Phi(v) \geqslant \Phi(u)$ для всех $v \in \widehat{E}_0$.

В обратную сторону, минимизация $\Phi(v)$ на $\widehat{E}_0$ приводит к математической модели (1). В самом деле, для первой вариации функционала (9) имеем равенство:

$$\int\limits_{\Gamma} u'(x)h'(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} u(x)h(x)\,dQ - \int\limits_{\Gamma} h(x)\,dF = 0,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{M} \int\limits_{\gamma_i} u_i'(x)h_i'(x)\,dx + \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{\gamma_i} u_i(x)h_i(x)\,dQ_i + u(1)h(1)Q\{1\} - \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{\gamma_i} h_i\,dF_i - h(1)F\{1\} = 0.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\gamma_i} u_i'(x)h_i'(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_i} u_i'(x)\,dh_i = u_i'(1-0)h(1) - \int\limits_{\gamma_i} h_i(x)\,du_i'.$$

Тогда имеем:

$$h(1)\left(\sum_{i=1}^{M} u_i'(1-0) + u(1)Q\{1\} - F\{1\}\right) + \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{\gamma_i} h_i(x)\,d(-u_i' + g_i - F_i) = 0,$$

где $g_i(x) = \int\limits_0^x u_i\,dQ_i + c_i$. Значит, на каждом ребре верно равенство

$$-u_i'(x) + \int\limits_0^x u_i\,dQ_i - F_i(x) = \mathrm{const}, \tag{10}$$

а также

$$\sum_{i=1}^{M} u_i'(1-0) + u(1)Q\{1\} = F\{1\}.$$

Из ограниченности вариаций $Q$, $F$ и из (10) следует, что $u_i'$ имеет ограниченную вариацию на каждом ребре. Причем, $u(x)$ является абсолютно-непрерывной на $\overline{\Gamma}$, т.е. $u \in E$ — решение модели (1).

Таким образом, мы можем минимизировать $\Phi(v)$ на $\widehat{E}_0$. Другими словами, в качестве базисных функций мы можем действительно брать кусочно-линейные функции. После решения линейной системы мы получим приближенное решение $v(x)$, которое в тоже время будет аппроксимацией Ритца. Оценим разность между точным решением $u(x)$ и полученным приближенным решением $v(x)$.

Сначала оценим разность между точным решением и его интерполянтом $u_I(x)$ в энергетической норме, где

$$u_I(x) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j^i)\varphi_{j,i}(x) + u(1)\varphi(x).$$

Обозначим $w(x) = u(x) - u_I(x)$. Заметим, что $w(\eta) = 0$ для всякой точки разбиения $\eta$. Имеем

$$\langle u - u_I, u - u_I \rangle = \langle w, w \rangle = \int\limits_{\Gamma} w'^2\,dx + \int\limits_{\Gamma} w^2\,dQ.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\Gamma} w'^2\,dx = \sum_{i=1}^{M}\int\limits_{\gamma_i} w_i'^2 dx = \sum_{i=1}^{M}\int\limits_{\gamma_i} w_i' dw_i = \sum_{i=1}^{M} w_i' w_i|_{0+0}^{1-0} - \sum_{i=1}^{M}\int\limits_{0+0}^{1-0} w_i d(w_i') =$$

$$= -\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i d(w_i') + \sum_{j=1}^{N-1} w_i(x_j^i)\Delta w_i'(x_j^i)\right) = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i d(w_i') =$$

$$= -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i d(u_i'),$$

так как $w_i(1-0) = w_i(1) = 0$, $w_i(0+0) = w_i(0) = 0$, $w_i(x_j^i) = 0$, $dw_i' = du_i'$ на промежутках $(x_j^i, x_{j+1}^i)$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\Gamma} w'^2(x)\,dx\right| = \left|-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i(x)\,d(u_i')\right| \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{N-1}\sup_{[x_j^i, x_{j+1}^i]}|w_i| V_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0}(u_i'), \qquad (11)$$

где $V$ означает полную вариацию по соответствующему промежутку. Заметим, что при $x \in [x_j^i, x_{j+1}^i]$ верно

$$w_i(x) = \int\limits_{x_j^i}^{x} w_i'(s)\,ds = \int\limits_{x_j^i}^{x}\left(w_i'(x_j^i+0) + \int\limits_{x_j^i+0}^{s} dw_i'\right) ds = w_i'(x_j^i+0)(x - x_j^i) + \int\limits_{x_j^i}^{x}\int\limits_{x_j^i+0}^{s} du_i'\,ds.$$

Тогда для всех $x \in [x_j^i, x_{j+1}^i]$ справедливо неравенство

$$|w_i(x)| \leqslant |w_i'(x_j^i+0)|h + hV_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0}(u_i').$$

С другой стороны,

$$|w_i'(x_j^i+0)| = \left|u_i'(x_j^i+0) - \frac{u_i(x_{j+1}^i) - u_i(x_j^i)}{h}\right| \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0}\left|u_i'(x_j^i+0) - u_i'(s)\right| ds \leqslant V_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0}(u_i').$$

Значит, для всех $x \in [x_j^i, x_{j+1}^i]$

$$|w_i(x)| \leqslant 2hV_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0}(u_i') \leqslant 2hV_{R(\Gamma)}(u').$$

Таким образом из (11), получим неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} w'^2(x)\,dx \leqslant 2h(V_{R(\Gamma)}(u'))^2.$$

Оценим $\int\limits_{\Gamma} w^2(x)\,dQ$. С учетом $w(1)=0$, получим

$$\int\limits_{\Gamma} w^2(x)\,dQ = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i^2(x)\,dQ_i \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{N-1}\sup_{[x_j^i,x_{j+1}^i]} w_i^2 V_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0}(Q_i) \leqslant 4h^2(V_{R(\Gamma)}(u'))^2 V_\Gamma(Q).$$

Значит,

$$\langle u-u_I, u-u_I\rangle \leqslant 2h(V_{R(\Gamma)}(u'))^2 + 4h^2(V_{R(\Gamma)}(u'))^2 V_\Gamma(Q).$$

Из равенства (4) следует, что $V_{R(\Gamma)}(u') \leqslant \sup\limits_{\overline{\Gamma}}|u|V_{\overline{\Gamma}}(Q) + V_{\overline{\Gamma}}(F)$. В свою очередь, $|u(x)| \leqslant \left|\int\limits_{\overline{\Gamma}}|K(x,s)|\,dF(s)\right| \leqslant \max\limits_{\overline{\Gamma}}|K(x,s)|V_{\overline{\Gamma}}(F)$, где $K(x,s)$ — функция влияния [3] задачи (1). Таким образом,$\langle u-u_I, u-u_I\rangle \leqslant Ch$.

Остается показать, что интерполянт дает приближение не хуже, чем $v(x)$. Это утверждение основано на следующем аналоге классического результата теории конечных элементов.

Предположим, что $u(x)$ минимизирует функционал $\Phi(v)$, задаваемый равенством (9), на множестве $\widehat{E}_0$. Обозначим через $E_N$ конечномерное подпространство $\widehat{E}_0$. Тогда
1) минимум $\Phi(v_h)$ и минимум $\langle u-v_h, u-v_h\rangle$, где $v_h$ пробегает подпространство $E_N$, достигается на одной и той же функции $u_h$.
2) по отношению к энергетическому скалярному произведению $u_h$ есть проекция $u$ на $E_N$, или, что то же самое, ошибка $u-u_h$ ортогональна $E_N$:

$$\langle u-u_h, v_h\rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in E_N. \tag{12}$$

3) функция $u_h$, на которой достигается минимум, удовлетворяет условию

$$\langle u_h, v_h\rangle = \int\limits_{\Gamma} v_h\,dF \text{ для всех } v_h \in E_N, \tag{13}$$

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\Gamma} v\,dF \text{ для всех } v \in \widehat{E}_0. \tag{14}$$

Как и в классической теории, для нас эта теорема ключевая. Более того, все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве с энергетическим скалярным произведением функция из подпространства $E_N$, ближайшая к заданной функции $u$, всегда является ее проекцией на $E_N$. Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\langle u-u_h-v_h, u-u_h-v_h\rangle = \langle u-u_h, u-u_h\rangle - 2\langle u-u_h, v_h\rangle + \langle v_h, v_h\rangle.$$

Если справедливо равенство (12), то

$$\langle u-u_h, u-u_h\rangle \leqslant \langle u-u_h-v_h, u-u_h-v_h\rangle.$$

Равенство возможно только когда $\langle v_h, v_h\rangle = 0$, т.е. когда $v_h = 0$. Таким образом, $u_h$ — единственная функция, на которой $\langle u-v_h, u-v_h\rangle$ достигает минимум, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (14) справедливо для всех $v \in \widehat{E}_0$, то оно справедливо и для $v_h \in E_N$; вычитая из него (13), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3). Из него вытекает 2), и из него следует 1). Если $u_h$ минимизирует $\Phi(v)$ на $E_N$, то $\Phi(u_h) \leqslant \Phi(u_h + \varepsilon v_h)$ для всех $\varepsilon$ и $v_h$. Заметив, что $\Phi(v) = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \int\limits_{\Gamma} u\,dF$, из предыдущего неравенства получим, что

$$0 \leqslant \varepsilon\left(\langle u_h, v_h\rangle - \int\limits_{\Gamma} v_h\,dF\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\langle v_h, v_h\rangle.$$

Так как неравенство верно для сколь угодно малого числа $\varepsilon$ любого знака, то $\langle u_h, v_h\rangle = \int\limits_{\Gamma} v_h\,dF$. Последнее выражает равенство нулю первой вариации функционала $\Phi$ в точке $u_h$ по направлению $v_h$. Таким образом, утверждение 3) доказано. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, А.В. Боровских, В.Л. Прядиев, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

[2] Analysis on Graphs and Its Applications / P. Exner, J. Keating, P. Kuchment, T. Sunada, A. Teplyaev. — Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. — 2008. — V. 77. — 705 p.

[3] Покорный Ю.В. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.

[4] Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 1(379). — С. 111–154.

[5] Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

[6] Покорный Ю.В. О дифференциалах Стилтьеса на геометрических графах / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, Ж.И. Бахтина // Докл. АН. — 2008. — Т. 423, № 4. — С. 452–454.

[7] Покорный Ю.В. Метод дифференциала Стилтьеса в моделировании нерегулярной системы на геометрическом графе / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, Ж.И. Бахтина // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1117–1125.

*Зверева Маргарита Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ*
*E-mail: margz@rambler.ru*
*Тел.: (473)220–86–90*

*Zvereva Margarira Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University*
*E-mail: margz@rambler.ru*
*Tel.: (473)220–86–90*

*Шабров Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ*
*E-mail: shaspoteha@mail.ru*
*Тел.: (473)220–86–90*

*Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University*
*E-mail: shaspoteha@mail.ru*
*Tel.: (473)220–86–90*

*Лылов Евгений Владимирович, аспирант каф. математического анализа ВГУ*
*E-mail: zhenya86@mail.ru*
*Тел.: (473)220–86–90*

*Lylov Evgeni Vladimirovich, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University*
*E-mail: zhenya86@mail.ru*
*Tel.: (473)220–86–90*