УДК 517.983

РЕГУЛЯРНЫЕ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Р. Зачепа

Воронежский экономико-правовой институт

Поступила в редакцию 20.09.2013 г.

Аннотация: рассмотрена проблема локального ветвления решений неразрешенной относительно производной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $F(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ в некоторой окрестности стационарного решения $x = 0$, где F — аналитическое отображение, действующее из окрестности нуля U пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0,0) = 0$. Использован переход к нелинейному аналитическому уравнению $F(x, y) = 0$ (заменой $\dot{x} = y$). Акцент сделан на случай, в котором точка $(0,0)$ — особое стационарное решение (точка бифуркации) заданного уравнения: rank $\frac{\partial F(0,0)}{\partial y} < n$ (в данном случае нельзя использовать теорему о неявной функции, иначе задача сводилась бы к "разрешенному интегрированию"). В статье предложен метод приближенного нахождения решений $y = y(x)$ $(\dot{x} = y(x))$ с оценкой количества возможных решений и построением асимптотических представлений решений (в нуле). Указаны условия конечной определенности решений (структурной устойчивости асимптотических представлений относительно возмущений уравнения слагаемыми достаточно высокого порядка в нуле).

Ключевые слова: неразрешенные относительно производной дифференциальные уравнения, ветвление решений, конечная определенность уравнения, асимптотические представления ветвей решений.

Abstract: we consider the problem of the local branching of solutions to a nonlinear system of ordinary differential equations unresolved with respect to a derivative $F(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ in some neighborhood $U \subset \mathbb{R}^n$ of a stationary solution $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, where F is an analytical mapping acting from a neighborhood of zero U of the space $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ into the space $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0,0) = 0$. We use the transition to a nonlinear analytical equation F(x, y)=0 (by replacing $\dot{x} = y$). Emphasis is placed on the case when the point $(0,0)$ is a special solution (bifurcation point) of the equation: rank $\frac{\partial F(0,0)}{\partial y} < n$ (in this case we cannot use the implicit function theorem, otherwise the problem would be reduced to a "permitted integration"). We propose a method for finding approximate solutions to $y = y(x)$ $(\dot{x} = y(x))$ with an estimate of the number of solutions and the construction of asymptotic representations of solutions at zero. We point out the conditions of the finite definiteness of solutions (structural stability of asymptotic representations with respect to perturbations of the equation by the terms of a sufficiently high order at zero).

Keywords: differential equations unresolved with respect to a derivative, branching of solutions, finite definiteness of an equation, asymptotic representations of branches of solutions.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи механики, физики и других естественых наук приводят к проблеме построения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x_i} = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

в некоторой окрестности стационарного решения $x = 0$. При этом функции $P_i(x)$ предполагаются аналитическими или достаточно гладкими. Процедуру построения решения такой задачи назовем *интегрированием уравнения, разрешенного относительно производной* или, более кратко, *разрешенным интегрированием.*

При построении решений обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной, возникает ситуация *неразрешенного интегрирования* уравнения

$$F(x(t), \dot{x}(t)) = 0\,, \tag{1}$$

где F — аналитическое отображение из окрестности U нуля пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0,0) = 0$.

После замены $\dot{x} = y$ уравнение (1) сводится к уравнению

$$F(x, y) = 0\,, \tag{2}$$

Основной интерес представляет случай, в котором точка $(x, y) = (0,0)$ является особым решением (точкой бифуркации) уравнения (2), то есть

$$\operatorname{rank} \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} < n.$$

В противном случае (регулярного решения $(x, y) = (0,0)$) можно было бы воспользоваться теоремой о неявной функции, и задача свелась бы к разрешенному интегрированию.

В особом случае основной интерес представляет разработка процедуры построения решений $y = y(x)$ $(\dot{x} = y(x))$, оценка количества решений и отыскание их асимптотик (в нуле). Сопутствующая задача — исследование порядков конечной определенности решений (устойчивости асимптотик решений относительно возмущений уравнения слагаемыми достаточно высокого порядка в нуле).

Рассмотренная в статье задача построения решений тесно связана с более ранними результатами автора по теории простых малых решений [1]–[3] гладких уравнений. Основу всех рассуждений представляет полученный автором алгоритм проверки конечной определенности аналитического уравнения и построения асимптотических приближений к ветвям малых решений [1].

1. ЛОКАЛЬНАЯ КОНОИДНОСТЬ МНОЖЕСТВА НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ТОЧКЕ РЕГУЛЯРНОГО ВЕТВЛЕНИЯ

Рассмотрим случай *φ-регулярного ветвления решений нелинейного аналитического уравнения* (2) в окрестности нулевого особого решения

$$(0,0) \in \Sigma\,(F) := \{(x, y) \in U |\ \operatorname{rank} DF(x, y) < n\}$$

($\Sigma(F)$ — множество особых точек отображения F).

Определение 1. *Назовем $(x, y) = (0,0)$ точкой φ-регулярного ветвления уравнения (2), где φ — аналитическая неотрицательная функция, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \varphi\,(0) = 0$, если на замыкании некоторой окрестности U нуля в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ выполнены следующие условия:*

1. $\sum(F) \bigcap F^{-1}(0) = \{(0,0)\}$ *(то есть уравнение (2) регулярно в $\bar{U}(0) \setminus (0,0)$ или, что эквивалентно, нуль является регулярным значением отображения $F : \bar{U} \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$).*
2. *Функция $\varphi : \left(F^{-1}(0) \setminus (0,0)\right) \bigcap \overline{U} \to \mathbb{R}^1$ является регулярной.*

Функция φ называется при этом *выстилающей*[1)] на U для F. Заметим, что при $\varphi(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, свойство φ-регулярности вытекает из первого условия сформулированного выше определения 1 (см. также [5], стр. 37-38).

Лемма 1. *Пусть начало координат — точка φ-регулярного ветвления уравнения (2), тогда выполнено:*

1. $\varphi(x, y) > 0$, *для всех* $(x, y) \in F^{-1}(0) \setminus (0, 0)$;

2. *существует такая константа* $c_0 > 0$, *что* $\varphi(x, y) > c_0$ *для* $(x, y) \in F^{-1}(0) \bigcap \partial U$, *где* ∂U *— граница области* U.

Доказательство. Функция φ не может, вследствие второго условия определения, достигать на множестве $F^{-1}(0) \setminus (0, 0)$ своего минимума. Следовательно, $\varphi(x, y) > 0$ для $(x, y) \in F^{-1}(0) \setminus (0, 0)$. Утверждение 2. следует из непрерывности $\varphi(x, y)$ и компактности множества $F^{-1}(0) \bigcap \partial U$.

Заметим, что из второго условия определения φ-регулярности ветвления вытекает следующее свойство: *множество* $F^{-1}(0) \bigcap \varphi^{-1}(c), c \in (0, c_0]$, *является гладким подмногообразием (без края) размерности* $n - 1$.

Следующая теорема и ее следствие позволяют выяснить локальную структуру множества решений уравнения, имеющего в нуле φ-регулярное ветвление. Оказывается, что локальное множество решений такого уравнения гомеоморфно конусу над гладким многообразием.

Теорема 1. *Пусть уравнение (2) имеет в нуле φ-регулярное ветвление. Тогда гладкое многообразие* $F^{-1}(0) \setminus (0, 0)$ *диффеоморфно декартову произведению* $M \times (0, c_0]$, *где* $M = F^{-1}(0) \bigcap \varphi^{-1}(c)$ *— многообразие без края (компактное) размерности* $n - 1$, *а* $(0, c_0]$ *— полуинтервал вещественной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность нуля

$$V = \{(x, y) \in U | \varphi(x, y) < c_0\}.$$

Так как отображение

$$\varphi : (F^{-1}(0) \setminus (0, 0)) \bigcap \overline{V} \longrightarrow (0, c_0]$$

регулярно и собственно (последнее следует из того, что $\varphi^{-1}(0) = (0, 0)$) и, таким образом, оно задает гладкое расслоение над стягиваемой базой $(0, c_0]$. Следовательно, существует тривиализующий диффеоморфизм

$$h : (F^{-1}(0) \setminus (0, 0)) \bigcap \overline{V} \longrightarrow M \times (0, c_0],$$

где стандартный слой M представляет собой пересечение множества нулей отображения F с какой-нибудь фиксированной поверхностью уровня функции φ :

$$M = F^{-1}(0) \bigcap \varphi^{-1}(c), c \in (0, c_0].$$

Следствие. *Множество решений уравнения (2) гомеоморфно конусу над M.*

$$(con\ M = M \times [0, c_0]/M \ \times \{0\}).$$

Доказательство. Согласно лемме, имеем:

$$\varphi^{-1}(0) \bigcap F^{-1}(0) = (0, 0).$$

[1)] Этот термин было введен Р. Томом в близкой ситуации [4].

Следовательно, диффеоморфизм

$$h : (F^{-1}(0) \setminus (0,0)) \bigcap \overline{V} \longrightarrow M \times (0, c_0]$$

продолжается до гомеоморфизма

$$F^{-1}(0) \bigcap \overline{V} \longrightarrow conM.$$

Таким образом, множество решений уравнения (2), имеющего в нуле φ-регулярное ветвление, локально гомеоморфно конусу над многообразием уровня $M = F^{-1}(0) \bigcap \varphi^{-1}(c)$. Если же рассматривать множество решений уравнения (2) без особой точки $(x, y) = (0, 0)$, то гомеоморфизм становится диффеоморфизмом на $M \times (0, c_0]$.

Полученные утверждения дают информацию о топологическом строении множества решений уравнения (2), но не дают ответ на одну из основных проблем — разрешимость уравнения (1) относительно производной.

Замечание. *В принципе, свойство локальной коноидности аналитических множеств в изолированных особых точках достаточно давно известно (см., например, [6] и близкие идеи (о конусах Уитни), изложенные в [7]). В рамках задачи конечной определенности гладкого уравнения оно впервые было введено и использовано автором данной статьи [1], [2].*

Ниже будет сформулирована теорема 5, являющаяся средством доказательства конечной определенности уравнений. Под конечной определенностью уравнения $f(x) = 0$ в нуле здесь подразумевается конечная v-определенность.[2)]

2. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЮ РЕГУЛЯРНОСТИ ПО ПРОИЗВОДНОЙ

В качестве выстилающей функции для отображения $F(x, y)$ будем рассматривать $\varphi(x, y) = \|x\|^2$.

В дальнейшем вместо "φ-регулярное" будем говорить "регулярное" ветвление.

Определение 2. *Будем говорить, что уравнение (2) регулярно по переменной y в $U \setminus (0,0)$, если*

$$\operatorname{rank} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = n$$

при $(x, y)\, \varepsilon F^{-1}(0) \setminus (0, 0)$ (это эквивалентно тому, что $\det \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0$ при $(x, y)\, \varepsilon F^{-1}(0) \setminus (0, 0)$).

Лемма 2. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной y в $U \setminus (0, 0)$. Тогда уравнение $F(0, y) = 0$ локально (в достаточно малой окрестности нуля) имеет единственное решение $y = 0$.*

Доказательство. В противном случае существовала бы последовательность ненулевых решений $y_k \to 0$ (аналитического) уравнения $\Phi(y) := F(0, y) = 0$. Тогда, по лемме об отборе кривых и лемме о строении одномерного алгебраического многообразия ([5], стр. 31 – 39; см. также комплексно-аналитический аналог в [7], стр. 51 – 53, 56 – 59), существует аналитическая кривая $y(\tau)$, $y(0) = 0$, $y(\tau) \neq 0$ при $\tau \neq 0$, которая принадлежит $\Phi^{-1}(0)$.[3)] Последнее противоречит условию $\dim(\Phi^{-1}(0) \setminus 0) = 0$ (что вытекает из условия $\operatorname{rank} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} = n$).

Теорема 2. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной y в $U \setminus (0, 0)$. Тогда уравнение (2) имеет вблизи нуля регулярное ветвление.*

[2)] Уравнение $f(x) = 0$ называется v-определенным порядка r, $r \in \mathbb{N}$, в нуле, если топологический тип ростка множества $\widetilde{f}^{-1}(0)$ в нуле не зависит от выбора гладкого отображения $\widetilde{f}$ в струе $j_0^r(f)$ [1], [2].

[3)] Это также вытекает из представимости малых решений в виде дробно-степенных рядов [8], [9]

Доказательство. Условие 1 из определения регулярного ветвления в $U \setminus (0,0)$ выполнено, так как из равенства rank $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = n$ вытекает равенство rank $\frac{\partial F(x,y)}{\partial (x,y)} = n$ (при $(x, y) \in F^{-1}(0) \setminus (0,0)$).

Покажем, что функция

$$\| \cdot \|^2 : F^{-1}(0) \setminus (0,0) \to \mathbb{R}^1$$

является регулярной. Для этого достаточно показать, что точки $(0, c)$ при малых $c \neq 0$ является регулярными значениями отображения

$$(x, y) \to (F(x, y), \|x\|^2).$$

Последнее вытекает из того, что оператор умножения на матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

является эпиморфизмом $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ при $(x, y) \in F^{-1}(0) \setminus (0,0)$, так как $rank\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = n$ и $x \neq 0$ (лемма 2).

Следствие. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной y в $U \setminus (0,0)$. Тогда гладкое многообразие $F^{-1}(0) \setminus (0,0)$ диффеоморфно $M \times (0, c_0]$, а множество $F^{-1}(0)$ гомеоморфно конусу над M, где $M = F^{-1}(0) \bigcap Z$, $Z = \{(x, y) \in U : \|x\|^2 = c\}$.*

Доказательство вытекает из теоремы 1 и ее следствия.

Гладкое многообразие M, являясь аналитическим множеством, представляет собой объединение конечного числа связных компонент [5]:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k.$$

Таким образом, множество решений уравнения (2) гомеоморфно объединению конечного числа связных конусов:

$$F^{-1}(0) \approx con\ M_1 \cup con\, M_2 \cup \ldots \cup con\, M_k.$$

На каждом конусе rank $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ максимален при $(x, y) \neq (0,0)$. Следовательно, по теореме о неявной функции, получаем решение уравнения (2) $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Таким образом, уравнение (1) равносильно совокупности уравнений, разрешенных относительно производной

$$\dot{x}_i(t) = y_i(x(t)), \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

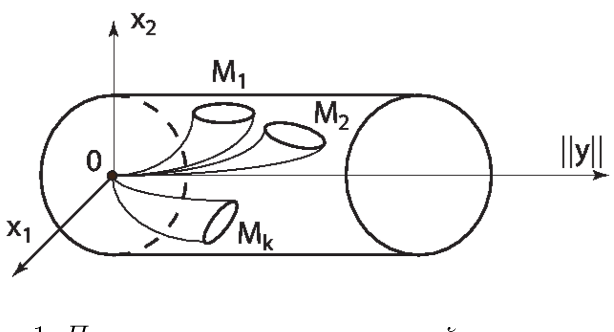

Рис. 1. *Пример множества решений уравнения (2) (гомеоморфное объединению связных конусов).*

Число уравнений k равно числу компонент связности многообразия M. Это число совпадает с бифуркационной кратностью отображения $F(0, y)$ [10]. Из утверждений работ [11] – [13] следует, что бифуркационная кратность не превосходит алебраической кратности (размерности локального кольца особенности отображения $F(0, y)$ [11], [14]) в нуле. Связь между конечной определенностью и бифуркационной кратностью уравнения в нуле изучалась ранее автором в [1] – [3], [10].

Рисунок 1 дает геометрическую иллюстрацию к сказанному выше.

Итак доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной y в $U \setminus (0,0)$. Тогда в окрестности нулевой особой точки уравнение (1) равносильно совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений (3).*

3. РЕГУЛЯРНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

В этом пункте рассмотрим специальный вид деформаций уравнения (2), не изменяющих топологическую структуру ростка множества решений.

Пусть

$$F_\varepsilon : (\overline{U}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

— семейство аналитических отображений, аналитически зависящее от параметра $\varepsilon \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — стягиваемая компактная область конечномерного вещественного пространства, содержащая нуль.

Определение 3. *Семейство F_ε назовем аналитической деформацией отображения F_0, если: 1) $F|_{\varepsilon=0} = F$; 2) при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$ отображение F_ε — аналитическое.*

Пусть F_ε — аналитическая деформация отображения F.

Определение 4. *Семейство уравнений*

$$F_\varepsilon(x, y) = 0 \tag{4}$$

назовем регулярной деформацией уравнения (2), если для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}$ уравнение (4) имеет в нуле регулярное ветвление при $(x, y) \in \overline{U}$.

Лемма 3. *Пусть (4) — регулярная деформация уравнения (2). Тогда существует константа $c_1 > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполнено неравенство $\|x\|^2 > c_1$ при $(x, y) \in F_\varepsilon^{-1}(0) \bigcap \partial U$.*

Доказательство. В противном случае нашлась бы последовательность значений параметра ε_i, сходящаяся к некоторому $\varepsilon_0 \in \mathcal{E}$, последовательность чисел $c_i \to 0$ и последовательность точек $(x_i, y_i) \in F_{\varepsilon_i}^{-1}(0) \bigcap \partial U$ таких, что $\|x_i\|^2 < c_i$. Следовательно, функция $\|x\|^2$ достигала бы на множестве $F_{\varepsilon_0}^{-1}(0) \bigcap \partial U$ своего минимума (нулевого значения). Последнее противоречит лемме 1.

Теорема 4. *В случае регулярности деформации (4) многообразия $M = F^{-1}(0) \bigcap Z$ и $M_\varepsilon = F_\varepsilon^{-1}(0) \bigcap Z$ диффеоморфны при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Phi : \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathcal{E},$$

задаваемое соответствием:

$$(x, y, \varepsilon) \longrightarrow (F_\varepsilon(x, y), \|x\|^2, \varepsilon).$$

Из определения регулярного ветвления и тождественности отображения Φ по переменной ε следует, что точки $(0, c, \varepsilon)$ $(c < c_1)$ будут регулярными значениями отображения Φ. Следовательно, проекция

$$\pi : G \bigcap Q \to \mathcal{E},$$

где $G = \{(x, y, \varepsilon) | F_\varepsilon(x, y) = 0\}$, $Q = \{(x, y, \varepsilon) | \|x\|^2 = c\}$ будет субмерсией. Так как образ отображения Φ — стягиваемая область E, то существует тривиализующий диффеоморфизм

$$q : G \bigcap Q \to (F^{-1}(0) \bigcap Z) \times \mathcal{E},$$

сохраняющий последнюю компоненту: $q(x, y, \varepsilon) = (g(x, y), \varepsilon)$. Таким образом, многообразия $F_\varepsilon^{-1}(0) \bigcap Z$ и $F^{-1}(0) \bigcap Z$ диффеоморфны.

Следующая теорема показывает, что при регулярной деформации уравнения его локальное множество решений сохраняет свою топологическую структуру.

Теорема 5. *Пусть семейство уравнений (4) — регулярная деформация уравнения (2). Тогда для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}$ росток множества решений уравнения (4) гомеоморфен ростку множества решений уравнения (2) и гомеоморфен конусу $con\, M$.*

Доказательство. По теореме 1 и ее следствию, множество $F_\varepsilon^{-1}(0)\bigcap\overline{V}$ гомеоморфно конусу над M_ε. По теореме 4 многообразия M_ε и M диффеоморфны. Следовательно, $con\, M$ гомеоморфно $con\, M_\varepsilon$.

Последняя теорема является средством доказательства конечной определенности уравнений [1], [2].

В заключительной части этого пункта проведем построение регулярной деформации уравнения (2), удовлетворяющего условию регулярности по переменной y.

Рассмотрим аналитическую функцию

$$d(x,y)=\|F(x,y)\|^2+\left(\det\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2.$$

По неравенству Лоясевича [14] (так как $d^{-1}(0)=\{(0,0)\}$) существуют числа $c>0, \gamma>0$ такие, что

$$d(x,y)>c\|(x,y)\|^\gamma.$$

Возьмем натуральное число r, большее чем γ. Рассмотрим деформацию:

$$F_\varepsilon(x,y)=F(x,y)+\sum_{|\alpha|+|\beta|=r}\varepsilon_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta,$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n), \beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ — мультииндексы, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n, x^\alpha= x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$. Рассмотрим далее функцию

$$d_\varepsilon(x,y)=\|F_\varepsilon(x,y)\|^2+\left(\det\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial y}(x,y)\right)^2,$$

для которой верна оценка

$$d_\varepsilon(x,y)=\|F(x,y)\|^2+\left(\det\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2+O(\|(x,y)\|^r)>c\|(x,y)\|^\gamma+O(\|(x,y)\|^r)>\frac{c}{2}\|(x,y)\|^\gamma.$$

Из нее следует, что условие регулярности по переменной y выполнено при всех ε. Следовательно, построенная деформация является регулярной.

Отсюда вытекает *конечная определенность порядка r уравнения (2)*, означающая (см. [1] – [3]) гомеоморфность ростков множеств решений исходного уравнения и любого уравнения, имеющего в нуле тот же отрезок ряда Тейлора порядка r.

4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Приближенные методы нахождения решений дифференциальных уравнений, особенно в связи с развитием компьютерных технологий, в настоящее время приобрели еще большее значение. Однако, прежде чем применять эти методы, необходимо доказывать существование решения, а также его единственность. В противном случае не ясно, какое именно решение необходимо вычислить.

Особые трудности при решении этих задач возникают для неразрешенных относительно производной дифференциальных уравнений.

В этом случае через одну точку, вообще говоря, может проходить уже не одна, а несколько интегральных кривых. Так как, разрешая уравнение (1), мы получаем несколько дифференциальных уравнений (3). Поэтому свойство единственности решения уравнения (1) обычно понимается в этом смысле, что *через данную точку по данному направлению проходит не более одной интегральной кривой* [15].

Теорема 6. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной* y *в* $U\setminus(0,0)$*. Тогда существует единственное решение* $(x(t),\dot{x}(t))$ *уравнения (1), при* $t\in[t_0-h,t_0+h]$, $x(t_0)=x_0$, $\dot{x}(t_0)=y_0$, *где* $F(x_0,y_0)=0, h$ *— достаточно мало,* $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

Доказательство. Из условия регулярности по переменной y в $U\setminus(0,0)$, по теореме о неявной функции, можно найти решение уравнения (2) в окрестности точки $(x_0,y_0)\neq 0$, принадлежащей одному из конусов $conM_i$, $i=1,2,\dots,k$. То есть, уравнение (1) равносильно совокупности (3) уравнений, $\dot{x}(t)=y_i(x(t))$, $i=1,2,\dots,k$. Остается проверить, будут ли $y_i(x(t))$ удовлетворять условию Липшица или более грубому условию $\| \frac{\partial y(x)}{\partial x} \|\leqslant N$ в окрестности точки x_0.

Продифференцируем равенство $F(x,y(x))=0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\frac{\partial y(x)}{\partial x}=0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x}=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)).$$

Из условия регулярности по переменной y вытекает, что в малой окрестности точки $(x_0,y_0)\neq 0$ модуль определителя

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\right|>c>0.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1}{c}|D^*(x,y(x))|\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))\right|\leqslant N.$$

Здесь $D^*(x,y)$ — матрица, присоединенная к $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))$.

Предложенное выше доказательство в случае $n=1$ имеется, например, в [15].

5. РАСШИРЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Исследование в $n-$мерном пространстве обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной и удовлетворяющих условию регулярности по производной, можно свести к исследованию разрешенного относительно производной дифференциального уравнения в пространстве размерности $2n$.

Пусть уравнение (2) регулярно по переменной y, $x(t)$ — решение уравнения (1). Тогда

$$F\left(x(t)),\dot{x}(t)\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}F(x(t),\dot{x}(t))=\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t))\dot{x}(t)+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))\ddot{x}(t)=0,$$

$$\ddot{x}(t)=-\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t))\dot{x}(t).$$

После замены $\dot{x}(t)=y(t)$ получим

$$\dot{y}(t)=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x(t),y(t))\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t))y(t),\quad \dot{x}(t)=y(t). \tag{5}$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений в пространстве размерности $2n$, разрешенная относительно производной. Фактически доказана

Теорема 7. *Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1). Тогда $(x(t), y(t))$ (где $y(t) = \dot{x}(t)$) — решение, соответствующей уравнению (1) системы (5).*

Обратная теорема, вообще говоря, не верна.

Действительно, если $(x(t), y(t))$ — решение системы (5), то после обратных преобразований получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t) = 0.$$

Следовательно,

$$F(x(t), \dot{x}(t)) = const.$$

Для того, чтобы константа равнялась нулю, можно наложить дополнительные условия. Например, можно потребовать, чтобы решение системы (5) удовлетворяло условию $(x(t), y(t)) \to 0$ при $t \to 0$. Однако, это требование было бы слишком ограничительным. Поэтому в конкретных примерах можно непосредственно вычислять значение константы, подставив решение в уравнение.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие предыдущие результаты.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = \varepsilon x_1, \qquad 2\dot{x}_1\dot{x}_2 = \varepsilon x_2.$$

После замены $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (y_1, y_2)$ получим:

$$y_1^2 - y_2^2 = \varepsilon x_1, \quad 2y_1y_2 = \varepsilon x_2.$$

Для якобиана J левой части системы имеем

$$J = 4(y_1^2 + y_2^2) \neq 0$$

на множестве решений системы уравнений при $(x, y) \neq (0, 0)$, если $\varepsilon \neq 0$. Следовательно, система уравнений является регулярной деформацией на любом промежутке $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, не содержащем $\varepsilon = 0$. Запишем соответствующую систему (5):

$$\dot{y} = \frac{\varepsilon}{2|y|^2}\,\mathcal{A}(y)y\,, \qquad\qquad \dot{x} = y,$$

где $\mathcal{A}(y) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{pmatrix}$. Получаем

$$\dot{y}_1 = \varepsilon/2, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = y_1, \quad \dot{x}_2 = y_2.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{\varepsilon}{2}t + c_1, \quad y_2 = c_2, \quad x_1 = \frac{\varepsilon}{4}t^2 + c_1t + \frac{c_1^2 - c_2^2}{\varepsilon}, \quad x_2 = c_2t + \frac{2c_1c_2}{\varepsilon}.$$

Отсюда легко получаем уравнения фазовых траекторий: $x_1 = \frac{\varepsilon}{4c_2^2}x_2^2 - \frac{c_2^2}{\varepsilon}$.

Фазовые траектории при $\varepsilon > 0$ изображены на рис. 2. Если $c_2 = 0$, то в качестве полутраектории получаем полуось $0x_1$, к которой стремятся траектории при $c_2 \to 0$.

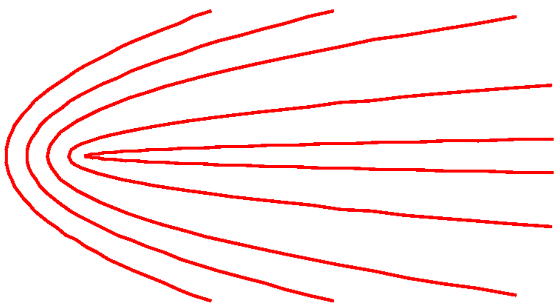

Рис. 2. *Фазовые траектории системы уравнений* $\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = \varepsilon x_1$, $2\dot{x}_1\dot{x}_2 = \varepsilon x_2$ *при* $\varepsilon > 0$.

При $\varepsilon < 0$ фазовые траектории симметричны изображенным на рис. 2 (относительно оси $0x_2$). Точка $\varepsilon = 0$ является бифуркационным значением параметра.

Пример 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с параметром $\varepsilon \in R$:

$$\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = \varepsilon(x_2^2 - x_1^2), \qquad \dot{x}_1\dot{x}_2 = -\varepsilon x_1 x_2.$$

После замены $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (y_1, y_2)$ получим:

$$y_1^2 - y_2^2 = \varepsilon(x_2^2 - x_1^2), \qquad y_1 y_2 = -\varepsilon x_1 x_2.$$

Для якобиана имеем

$$J = 2(y_1^2 + y_2^2) \neq 0$$

на множестве решений системы уравнений при $(x, y) \neq (0, 0)$, если $\varepsilon \neq 0$. Следовательно, система уравнений является регулярной деформацией на любом промежутке $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, не содержащем $\varepsilon = 0$. Запишем систему (5):

$$\dot{y} = \frac{\varepsilon}{2|y|^2}\,\mathcal{A}(y)\mathcal{B}(x)y\,, \qquad\qquad \dot{x} = y,$$

где $\mathcal{A}(y) = \begin{pmatrix} y_1 & 2\,y_2 \\ -y_2 & 2\,y_1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} -2\,x_1 & 2\,x_2 \\ -2\,x_2 & x_1 \end{pmatrix}$. Получим

$$\dot{y}_1 = -\varepsilon x_1, \qquad \dot{y}_2 = -\varepsilon x_2, \qquad \dot{x}_1 = y_1, \qquad \dot{x}_2 = y_2.$$

Отсюда получаем:

$$\ddot{x}_1 = -\varepsilon x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\varepsilon x_2,$$

то есть

$$x_1 = c_1 e^{\pm\sqrt{-\varepsilon}t}, \qquad x_2 = c_2 e^{\pm\sqrt{-\varepsilon}t},$$

если $\varepsilon < 0$. В этом случае фазовые траектории изображены на рис. 3.

В случае $\varepsilon > 0$ фазовые траектории изображены на рис. 4 (особая точка является *центром*).

Точка $\varepsilon = 0$ является бифуркационным значением параметра.

Отметим, что в отличие от предыдущего примера, где при переходе через точку $\varepsilon = 0$ фазовая картина изменялась на симметричную, в данном примере фазовые портреты, изображенные на рис. 3 и рис. 4, не симметричны.

На рассмотренных примерах мы увидели, что расширение фазового пространства часто не только приводит к разрешенному относительно производной уравнению (хотя и с удвоением размерности), но и позволяет находить интегральные кривые исходного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зачепа В.Р. О v-определенности ростка гладкого отображения в особой точке / В.Р. Зачепа // Глобальный анализ и нелинейные уравнения. Воронеж: ВГУ. 1988. — С. 119–126.

[2] Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. — Воронеж: ВГУ. 2002. — 185 с.

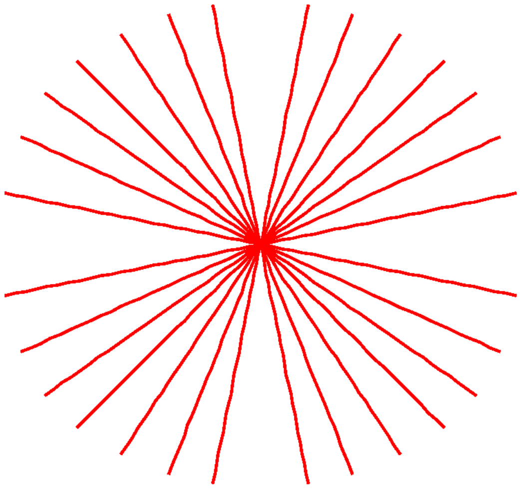

Рис. 3. *Фазовые траектории системы уравнений* $\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = \varepsilon(x_1^2 - x_2^2)$, $\dot{x}_1\dot{x}_2 = \varepsilon x_1 x_2$, $\varepsilon > 0$.

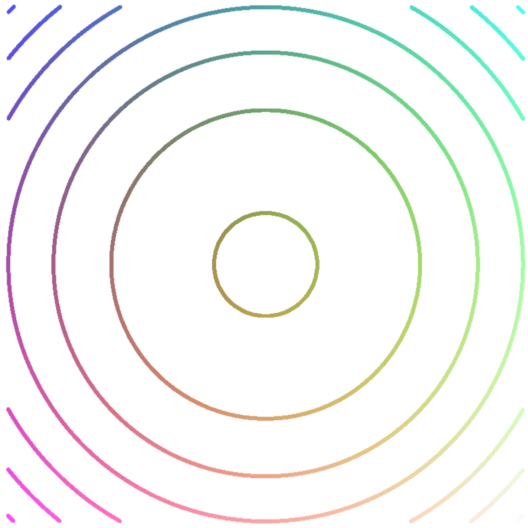

Рис. 4. *Случай* $\varepsilon < 0$ *(особая точка является центром).*

[3] Зачепа В.Р. Конечно определенные особенности функций, порожденные неразрешенным интегрированием / В.Р. Зачепа // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 2. — С. 26–34.

[4] Особенности дифференцируемых отображений. Сб. ст. – М.: Мир. 1968. – 268 с.

[5] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. — М.: Мир, 1971. — 126 с.

[6] Whitney H. Local properties of analytic varieties // Diff. and Combinator Topologie. Princeton: Princeton Univ. Press. — 1965. — P. 205–244.

[7] Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. — М.: Наука. 1985. — 272 с.

[8] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука. 1969. — 528 с.

[9] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. — М.:Наука. 1969. — 456 с.

[10] Зачепа В.Р. О регулярно ветвящихся решениях фредгольмовых уравнений / В.Р. Зачепа // Современные методы в теории краевых задач. — Воронеж: ВГУ. — 2000. — С. 65–73.

[11] Паламодов В.П. О кратности голоморфного отображения / В.П. Паламодов // Функц. анализ и его прил. — 1967. — Т. 1, вып. 3. — С. 54–65.

[12] Паламодов В.П. Замечания о конечнократных дифференцируемых отображениях / В.П. Паламодов // Функц. анализ и его прил. — 1972. — Т. 6, вып. 2. — С. 52–61.

[13] Химшиашвили Г.Н. О локальной степени гладкого отображения / Г.Н. Химшиашвили // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1977. — Т. 85, № 2. — С. 309–311.

[14] Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. — М.: Мир. 1968. — 129 с.

[15] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука. 1969. — 424 с.

Зачепа Валерий Ростиславович, Доцент кафедры прикладной информатики и математики ВЭПИ, к.ф.-м. н.
Тел.: 239–44–27

Zachepa Valeri Rostislavovich, Docent of chair of apl. inform. & math. of VEPI
Tel.: 239–44–27