УДК 517.9

ТРЕХМОДОВЫЕ БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ИЗ ТОЧКИ МИНИМУМА ФРЕДГОЛЬМОВА ФУНКЦИОНАЛА В УСЛОВИЯХ КРУГОВОЙ СИММЕТРИИ

Е. В. Дерунова, Ю. И. Сапронов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 09.01.2014 г.

Аннотация: статья является обзором недавно полученных результатов авторов статьи по бифуркационному анализу экстремалей из резонансных точек минимума для $SO(2)-$инвариантных фредгольмовых функционалов. Действие группы $SO(2)$ предполагается линейным и слабо гладким (гладким на каждом конечномерном $SO(2)$-инвариантном подпространстве). Указаны нормальные формы вторично редуцированных и огрубленных ключевых функций $W(r)$, $r \in \mathbb{R}^3$, в случаях двойных резонансов $1:2:3$, $1:2:4$, $p:q:p+q$ и др. ($W(r)$ — функция, полученная применением (вариационного) метода Ляпунова-Шмидта и вторичной редукции по угловым переменным). Использованы переходы к краевым и угловым особенностям функций, упрощающие изучение геометрии каустик и ветвей бифурцирующих экстремалей.

Ключевые слова: фредгольмов функционал, экстремаль, круговая симметрия, резонанс, бифуркация, метод Ляпунова-Шмидта.

Abstract: in this paper we give an overview of bifurcational analysis of extremals of $SO(2)-$ invariant fredholm functionals at a minimum resonance point. An action of the group $SO(2)$ is assumed linear and weakly smooth(smooth on every finite-dimensional linear $SO(2)$-invariant subspace). We list normal forms of roughened secondary reduced key functions $W(r)$, $r \in \mathbb{R}^3$, which corresponds double resonances $1:2:3$, $1:2:4$, $p:q:p+q$ etc. ($W(r)$ is the function that we obtain after a variational modification of Lyapunov-Shmidt reduction and a secondary reduction on angular variables). The reduction to angular and boundary singularities is used for simplification of a description of caustics' geometry and brunches of bifurcating extremals.

Keywords: fredholm functionals, extremals, circular symmetry, resonance, bifurcation, Lyapunov-Shmidt method.

ВВЕДЕНИЕ

Тема статьи тесно связана с многомодовым циклогенезом в динамических системах. Проблема многмодового анализа бифуркаций возникает в задачах классической механики, теории фазовых переходов в кристаллах, теории нелинейных волн, при моделировании автоколебаний в RC-генераторах, а также в экономике, популяционной динамике, химической кинетике и др. разделах естествознания. Соответствующие модельные уравнения не допускают, как правило, общих формул для своих решений. Алгоритмов приближенного построения и анализа периодических колебаний, бифурцирующих из особой точки с многомодовым вырождением, разработано крайне мало.

В данной работе изложена вполне алгоритмизуемая процедура приближенного вычисления и анализа критических $SO(2)$-орбит фредгольмовых функционалов (см. [8] – [4]). Критические орбиты служат прототипом периодических колебаний динамических систем, моделируемых периодическими решениями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: гамильтоновых динамических систем, уравнений вариационного исчисления и т .д. [4] – [6]. В качестве модели абстрактного фредгольмова уравнения $f(x, \lambda) = 0$ в статье рассмотрено ОДУ шестого порядка

$$\frac{d^6w}{dt^6} + a_2\frac{d^4w}{dt^4} + a_1\frac{d^2w}{dt^2} + a_0w + U\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \ldots, \frac{d^6w}{dt^6}\right) = 0, \tag{1}$$

$U(w, w_1, w_2, \ldots, w_6) = O(w^2 + w_1^2 + \ldots + w_6^2)$. Под двойным резонансом (типа $p_1 : p_2 : p_3$) уравнения (1) подразумевается случай одновременного существования (для соответствующего линеаризованного ОДУ) трех периодических решений $\exp(\frac{2\pi\, i\, p_k}{T}\ t)$, $T > 0$, $p_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, 3$, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3$, $HOD(p_1, p_2, p_3) = 1$. Резонанс $p_1 : p_2 : p_3$ называется сильным, если существует такой ненулевой набор целых чисел n_1, n_2, n_3, что $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 0$ и $|n_1| + |n_2| + |n_3| \leqslant 4$. Число $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ называется порядком резонансного соотношения $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 0$. Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется порядком данного резонанса. Ниже предполагается, что $1 \leqslant p_1 < p_2 < p_3$ (резонансы типа $1 : 1$ не рассмотрены).

Напомним, что резонансные соотношения порядка $\leqslant 4$ называются сильными, а остальные — слабыми. Резонанс, для которого существует сильное резонансное соотношение, называется сильным, и слабым — в противном случае.

Основное предположение — условие потенциальности уравнения. Для уравнения (1) это означает, что оно служит уравнением Эйлера-Лагранжа экстремалей функционала $V(w, a) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^3w}{dt^3}\right)^2 - a_2\left(\frac{d^2w}{dt^2}\right)^2 + a_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - a_0\, w^2\right) + \mathcal{U}\right) dt, \tag{2}$$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \frac{d^3w}{dt^3}\right)$, $\mathcal{U}\ (w, w_1, w_2, w_3) = o(w^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$. Функционал V рассмотрен на пространстве E, состоящем из $2\pi-$периодических функций класса C^6 со значениями в области вещественных чисел.

Центральная конструктивная идея статьи, вокруг которой сгруппировано ее содержание, — сведе́ние (редукция) задачи об изучении бифурцирующих критических орбит к задаче о бифуркации критических точек полинома от шести переменных, обладающего круговой симметрией [7] – [10].

Наша главная цель — разработка и апробация методики вычисления и изучения бифурцирующих орбит в случаях двойных резонансов $1 : 2 : 3$, $1 : 2 : 4$, $p : q : p + q$ и др. Помимо общих методов нелинейного функционального анализа и теории бифуркаций решений фредгольмовых уравнений, в работе использованы элементы теории особенностей гладких функций, теории инвариантов и теории приближенных вычислений (см. [8]).

Фредгольмово уравнение $f(x, \lambda) = 0$ рассмотрено в последовательности трех непрерывно вложенных банаховых пространств $E \subset F \subset H$, причем H — гильбертово пространство, E плотно в H. Рассмотрение тройки пространств позволяет одновременно учитывать круговую симметрию и спектральное строение линейной части уравнения (при построении мод бифуркации и выводе асимптотических формул для экстремалей). Анализ бифуркационных эффектов осуществлен посредством одной из модификаций вариационной версии метода Ляпунова-Шмидта [8], [7], позволяющей свести анализ функционала (2) к анализу ключевой функции

$$W(\xi, a) = \inf_{w:\ \langle w, e_k\rangle = \xi_k} V(w, a) = V\left(\sum_{i=1}^{6} \xi_i\, e_i + \Phi(\xi)\right) \tag{3}$$

от шести ключевых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ ($e_1, e_2, \ldots, e_6$ — моды бифуркации).

При выяснении взаимных примыканий экстремалей разного типа возникает, вообще говоря, необходимость в получении информация о структуре фазового портрета динамической системы $\dot{w} = -\mathrm{grad}\, V(w, a)$ (градиент задан в скалярном произведении $\langle p, q\rangle$ пространства H). Если известна ключевая функция W, то эта структура определяется фазовым портретом градиентной динамической системы $\dot{\xi} = -\mathrm{grad}\, W(\xi, a)$.

В статье использован переход к краевой и угловой особенностям, позволяющий упростить описание геометрии каустики и ветвей бифурцирующих орбит экстремалей.

1. КЛЮЧЕВЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ НЕЛИНЕЙНОЙ РИТЦЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Топологические и аналитические понятия, характеризующие тип стационарной точки фредгольмова функционала (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.д. [11]) можно вводить через ключевые функции и их нормальные формы [8]. Найденная нормальной формы ключевой функции позволяет детально описать качественную картину поведения ветвей бифурцирующих критических точек и, в частности, находить точное их количество и первые асимптотики.

Опишем одну практическую схему локальной редукции [8].

Рассмотрим потенциальное уравнение $f(x, \lambda) = 0$ с потенциалом $V(x, \lambda) = 0$, $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, при стандартных предположениях: E, F — вещественные банаховы пространства, H — гильбертово пространство, E непрерывно вложено в F, E плотно в H. Пусть Ω — некоторая открытая окрестность нуля в E, $\mathcal{U}$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$ и $f(0, \lambda) = 0\ \forall\ \lambda$.

Пусть выполнены следующие два условия:

1) на $\mathcal{U}$ определен набор гладких нормированных в H функций из E (ведущих мод бифуркации) $\{e_i(\lambda)\}_{i=1}^{n}$, $\lambda \in \mathcal{U}$, таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)\ e_i(\lambda) = \alpha_i(\lambda)\ e_i(\lambda), \tag{4}$$

где $\{\alpha_i(\lambda)\}_{i=1}^{n}$ — гладкие спектральные функции;

2) ноль является невырожденной критической точкой для сужения $V(x, \lambda)|_{x \in L_\lambda}$, где $L_\lambda = E \bigcap N_\lambda^\perp$, $N_\lambda = \mathrm{span}\,\{e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)\}$, $N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение к N_λ в H.

Для любого $x \in \Omega$ положим $\xi_i(\lambda) = \langle x, e_i(\lambda)\rangle$ ($\langle\cdot, \cdot\langle$ — скалярное произведение в H). Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\lambda)\ e_i(\lambda) + v(\lambda)\,, \quad v(\lambda) \perp e_i(\lambda)\ \forall\ i.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x, \lambda)\ e_i(\lambda) + f_*(x, \lambda)\,, \quad f_*(x, \lambda) \perp e_i(\lambda)\ \forall\ i\,.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \bigcap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия регулярности 2) следует, что $f_*(\cdot, 0) : L_0 \to L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности Ω точки $0 \in L_0$). По теореме о неявной функции, найдется такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \Omega^n \times \mathcal{U}$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где Ω^n — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, что

$$f_*\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\ e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda\right) = 0, \quad \forall\ (\xi, \lambda) \in \Omega^n \times \mathcal{U}.$$

Функция
$$W(\xi,\lambda) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \ e_i(\lambda) + \Phi(\xi,\lambda), \lambda\right) \qquad (5)$$
является ключевой для функционала $V(x,\lambda)$, а уравнение
$$f^n\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \ e_i(\lambda) + \Phi(\xi,\lambda), \lambda\right) = 0$$
является ключевым (уравнением разветвления).

Достаточно близкая к нулю точка $a \in E$ является решением уравнения $f(x,\lambda) = 0$ при $\lambda = \bar{\lambda}$ тогда и только тогда, когда
$$a = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \ e_i + \Phi(\bar{\xi},\bar{\lambda}), \qquad (6)$$
где $\bar{\xi}$ — близкая к нулю критическая точка ключевой функции. При этом a — невырожденное решение уравнения $f(x,\lambda) = 0$ (невырожденная экстремаль функционала V) лишь одновременно с невырожденностью $\bar{\xi}$, как критической точки для функции $W(\cdot,\bar{\lambda})$. Таким образом, изучение решений уравнения $f(x,\lambda) = 0$ или экстремалей функционала V вблизи нуля также сводится к анализу критических точек функции $W(\cdot,\lambda)$. Формула (6) дает асимптотические представления критических точек (по закритическим приращениям параметров).

В приложениях часто достаточно ограничиться несколькими первыми членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных задачах для этого используются специальным образом подобранные ритцевские аппроксимации. Ритцевской аппроксимацией функционала V, заданного на банаховом пространстве E, называется функция
$$W_R(\xi) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \ e_i\right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^\top,$$
где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации). Экстремалям $\bar{\xi} = (\bar{\xi_1}, \ldots, \bar{\xi_n})$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi_i} \ e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V.

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида
$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$
где Φ — гладкое отображение из $N := \mathrm{span}\,(e_1, \ldots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы (см. [8]).

Схему Ляпунова-Шмидта можно рассматривать как реализацию разновидности нелинейной ритцевской аппроксимации.

Напомним, что каустика Σ для фредгольмова функционала $V(\cdot,\lambda)$ — это совокупность тех значений параметра $\lambda \in \Lambda \subset R^n$, при которых $V(\cdot,\lambda)$ имеет в $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ вырожденную критическую точку. Критическая точка 0 гладкой функции $W : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ называется конечнократной [11], если локальная алгебра градиентного отображения конечномерна:

$$\mu := \dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}[[x_1, x_2, \ldots, x_m]] \Big/ \left\langle \frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_m} \right\rangle \right) < \infty.$$

Число μ называется кратностью критической точки [11].

Представленная выше редукция является лишь одной из известных схем «конечномерного усечения» вариационной задачи. Имеются и другие подходы. Большинство из них является соответствующей специализацией общей редуцирующей схемы, изложенной в [8]. В задачах с непрерывной групповой симметрией работает аналогичная методика [9], [10].

При исследовании ключевых функций фредгольмовых функционалов важную роль играют условия локальной конечной определенности гладких функций в особых точках. Приведем один из наиболее часто употребляемых признаков конечной определенности функций, найденный Дж. Мазером (см. [11], [12]). Напомним, что гладкая функция W называется сильно $r-$определенной в точке a, если каждая функция U с тем же отрезком ряда Тейлора (порядка r) в точке a, который имеется у W, сильно локально гладко эквивалентна функции W, то есть найдется такое гладкое отображение $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^n, a)$ с единичной матрицей Якоби в точке a, что в некоторой окрестности этой точки a выполнено равенство $W(\varphi(x)) = U(x)$. Согласно Дж. Мазеру, достаточным условием сильной r-определенности W в нуле является следующее условие (условие Мазера):

$$\mathfrak{M}^{r+1} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(W). \tag{7}$$

Здесь $\mathfrak{M}^k$ — $k-$ая степень максимального идеала $\mathfrak{M}$ в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[x]]$, а $J(W)$ — якобиев идеал функции W (в нуле) [11], [12]. Это условие допускает естественное обобщение

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(W), \tag{8}$$

где $\mathfrak{U}$ — произвольный конечнодефектный идеал (в кольце ростков гладких функций). При условиях (7), (8) допускается «уничтожение» (диффеоморфной заменой координат) «хвоста» тейлоровского разложения, включенного в $\mathfrak{U}$.

Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные*, играющие важную роль в общей теории деформаций особенностей. Это связано с тем, что версальные деформации «содержат в себе» информацию о всех допустимых метаморфозах (перестройках линий уровня, расклейках и склейках особых точек, различных бифуркационных эффектах и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функции.

Гладкая деформация $U(\cdot, \lambda)$ особенности функции W в нуле называется версальной ([11], [12]), если факторклассы функций $\frac{\partial U}{\partial \lambda_k}(x, 0)$ (λ_k — координата λ, $k = 1, 2, \ldots, \mu$) дают систему линейных образующих в локальном кольце особенности W в нуле (рассматриваемом как линейное пространство). Систему функций $\left\{ \frac{\partial U}{\partial \lambda_k}(x, 0),\ k = 1, 2, \ldots, \mu \right\}$ называют начальными скоростями деформации.

Деформация $U(x, \lambda)$ называется миниверсальной, если факторклассы ее начальных скоростей деформации образуют базис в локальном кольце особенности W в нуле. Сокращенная на один параметр (после «отбрасывания» монома нулевой степени) миниверсальная деформация становится так называемой ограниченной миниверсальной деформацией [11]. Число входящих в нее управляющих параметров совпадает с коразмерностью особенности.

Посредством миниверсальных деформаций можно вводить различные бифуркационные диаграммы, важнейшими среди которых являются каустики, дискриминантные множества и множества Максвелла.

Каустика $\Sigma(W)$ функции W — это совокупность тех «управлений» λ, при которых $W(\cdot,\lambda)$ имеет вырожденную критическую точку (в достаточно малой окрестности нуля). Дискриминантное множество $Dskr$ — совокупность управлений λ, при которых $W(\cdot,\lambda)$ имеет критическую точку на нулевой поверхности уровня. Множество Максвелла $\mathcal{M}$ — совокупность управлений λ, при которых $W(\cdot,\lambda)$ принимает равные значения на паре различных критических точек.

Аналогичным образом каустика, дискриминантное множество и множество Максвелла определяется непосредственно для фредгольмова функционала [8].

Геометрическая структура этих множеств не изменяется после перехода к ключевой функции $W(\xi,\delta)$. На практике функция W разыскивается в виде полиномиальной нормальной формы

$$W_0(\xi)+\sum_{k\in K}\alpha_k(\lambda)\xi^k$$

(K — конечное подмножество в $\mathbf{Z}^n_+$, W_0 — полином). Если деформация миниверсальна, то редуцирующее отображение $\pi:\ \lambda\longmapsto\alpha=(\alpha_k(\lambda))_{k\in K}$ субмерсивно в нуле. Следовательно, $\Sigma(V)=\pi^{-1}(\Sigma(\widetilde{W}))$, где $\widetilde{W}(\xi,\alpha)=W_0(\xi)+\sum\limits_{k\in K}\alpha_k\xi^k$, $\alpha=\{\alpha_k\}_{k\in K}$, а $\Sigma(V)$ и $\Sigma(\widetilde{W})$ — каустики.

Из этих соотношений следует, что $\Sigma(V)$ «совпадает» с декартовым произведением $\Sigma(W)$ на диск (бесконечномерный, если исходное пространство параметров бесконечномерное).

Для выяснения точного расположения каустики в пространстве управляющих параметров требуется, как минимум, определение характера зависимости α от λ, что представляет собой весьма сложную вычислительную задачу.

Приведенные выше формулы дают конструктивную основу для разработки вычислительных алгоритмов в конкретных задачах циклогенеза.

2. ФУНКЦИНАЛЫ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ, ДВУХМОДОВЫЕ БИФУРКАЦИИ

2.1. Случай резонанса $1:2$**.** Рассмотрим в качестве примера случай резонанса $1:2$. Более подробная информация о двухмодовых бифуркациях в случае круговой симметрии имеется в [1].

Пусть задан гомоморфизм (вообще говоря, не гладкий) $T:G\longrightarrow O(H)$ группы $G=SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H, определяющий ортогональное действие (вообще говоря, не непрерывное)

$$G\times H\longrightarrow H,\ (g,w)\longmapsto y=T_g(w)\qquad\forall(g,w)\in G\times H.$$

Будем предполагать, что пространства E, F и функционал V_δ инвариантны относительно данного действия:

$$T_g(E)\subset E,\quad T_g(F)\subset F,\quad V_\delta(T_g(\cdot))=V_\delta(\cdot),$$

наряду с эквивариантностью редуцирующей субмерсии

$$\mathbf{p}:x\longmapsto\xi,\qquad x\in\mathcal{U}\subset E,\ \ \xi\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n$$

($\mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ — некоторые открытые подмножества). Очевидно, что ключевая функция W_δ также будет инвариантной [10].

Основное условие, используемое в работе, состоит в требовании гладкости действия группы $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров. Это условие выполнено, если, например, отображение

$$R:g\longrightarrow SO(N),\quad R_g:=T_g\Big|_N,\quad N:=\operatorname{Ker}\frac{\partial f_0}{\partial x}(0),\tag{9}$$

является гладким ($\dim\ N = n$).

В пределах данной статьи предполагается, что отображение $\mathcal{T} : SO(2) \longrightarrow O(H)$ из группы $SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H является *слабо гладким*. Последнее означает, по определению, что индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ является гладким.

В рассмотренных ниже случаях индуцированное действие $SO(2)$ на пространстве ключевых параметров $\mathbb{R}^n$ предполагается полусвободным (начало координат — единственная неподвижная точка). В таком случае $n = 2m$. Если при этом отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^{2m}$ с комплексным вектором $z = (z_1, \dots, z_m)^\top \in \mathbb{C}^m$, $z_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k}$, то условие инвариантности W_δ можно записать в виде соотношения

$$W_\delta(\widetilde{z}) = W_\delta(z), \qquad \widetilde{z} = (\exp(i\, p_1\varphi)z_1, \dots, \exp(i\, p_m\varphi)z_m)^\top, \quad p_k \in \mathbb{Z},$$

(инвариантность относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i\, p_1\varphi)z_1, \dots, \exp(i\, p_m\varphi)z_m)^\top \tag{10}$$

группы $SO(2)$).

Множество ненулевых критических точек ключевой функции и их образов относительно маргинального отображения $\varphi_\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ представляет собой набор одномерных подмногообразий (критических орбит действия (10)), диффеоморфных окружности.

Теорема 1. *В случае $4-$мерного вырождения ($n = 4$) ключевая функция W_δ допускает представление в виде*

$$-\frac{1}{2}\left(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2\right) + \frac{1}{3}\left(C_3 I_3 + C_4 I_4\right) + \frac{1}{4}\left(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2\right) + o(\|\xi\|^4) + O(\delta)O(\|\xi\|^4), \tag{11}$$

где

$$I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \qquad I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2,$$
$$I_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4, \qquad I_4 = 2\xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4$$

— полная система образующих инвариантов действия (10) группы $SO(2)$ на $\mathbb{R}^4$, A_1, A_2, B, C_1, C_2 — константы, α_1, α_2 — зависящие от δ малые параметры.

Доказательство основано на асимптотическом представлении

$$W_\delta = U_\delta(\xi) + o(I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_3 I_4), \tag{12}$$

где

$$U_\delta(\xi) = V\left(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4 + \sum_{j:|j|=2}^{3} a_j \xi^j\right)$$

— нелинейная ритцевская аппроксимация V по модам бифуркации e_1, e_2, e_3, e_4, $\quad a_j = a_j(\delta)$ — вычисляемые элементы пространства E, $\langle a_j, e_k\rangle = 0 \quad \forall j, k$.

После масштабирования и деления W_δ на подходящий множитель получим функцию

$$\widetilde{W_\delta} = \widetilde{U_\delta}(\xi) + o(\|\xi\|^4),$$

где

$$\widetilde{U_\delta}(\xi) = -\frac{1}{2}\left(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2\right) + \frac{1}{3}\left(C_1 I_3 + C_4 I_4\right) + \frac{1}{4}\left(I_1^2 + I_2^2 + 2a I_1 I_2\right).$$

В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *В случае $4-$мерного вырождения с резонансом $1:2$ ключевая функция W_δ допускает в полярных координатах*

$$\xi_1 = r_1\cos(\varphi_1), \quad \xi_2 = r_1\sin(\varphi_1), \qquad \xi_3 = r_2\cos(\varphi_2), \quad \xi_4 = r_2\sin(\varphi_2), \tag{13}$$

представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$\widetilde{W} = -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + c r_1^2 r_2 \cos(\psi) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2a r_1^2 r_2^2) + \tag{14}$$

$$+\vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2, \psi), \quad a > -1,$$

где $a = a(\delta)$, $c = c(\delta)$ — вычисляемые константы, $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + const$, ϑ, ϱ — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых

$$\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6), \qquad \varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2).$$

Утверждения, близкие к теоремам 1, 2, приведены в [1] ,[8] .

Условие стационарности орбиты по фазе $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ приводит к следующим критическим значениям фазы: $\psi = 0 + O(|\xi|^2)$, $\pi + O(|\xi|^2)$. Дальнейшее изучение условий стационарности по амплитудам r_1, r_2 приводит к задаче о бифуркации критических точек из критической точки с омбилической особенностью параболического типа [13]. В этом случае локальной нормальной формой ключевой функции (при нулевых значения возмущающих параметров) является полином $\widetilde{W}_0 = r_2^4 \pm r_1^2 r_2$.

Из теории особенностей гладких функций известно (см. [11], [13]), что критическая точка с особенностью параболической омбилики имеет кратность $\mu = 5$.

Функция $r_2^4 \pm r_1^2 r_2$ симметрична относительно следующей пары преобразований:

$$I_1 : (r_1, r_2) \longrightarrow (-r_1, r_2), \quad I_2 : (0, r_2) \longrightarrow (0, -r_2).$$

Так как и функция $\widetilde{W}_\delta$ (см. (14)) инвариантна относительно преобразований I_1, I_2 (вследствие $SO(2)$-эквивариантности ключевой функции), то ключевая функция эквивалентна (в классе деформаций особенностей с симметрией относительно преобразований I_1, I_2) следующей (миниверсальной) развертке ростка функции $\widetilde{W}_0$ в нуле:

$$W_\delta(r_1, r_2) = r_2^4 \pm r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2.$$

Стандартная замена $r_1^2 = u$, $u \geqslant 0$, приводит к эквивалентной задаче о бифуркациях экстремалей из краевой особой точки [11] для следующей развертки (ниже введено обозначение $v = r_2$):

$$\widehat{W}_\delta(u, v) = v^4 \pm uv + \delta_1 u + \delta_2 v^2, \qquad u \geqslant 0. \tag{15}$$

Полином $v^4 \pm uv$ можно заменить полиномом $v^4 + uv$, отбросив ограничение $v \geqslant 0$ (критические точки с отрицательными значениями v переходят в критические точки с положительными значениями v после смены знака во втором слагаемом полинома $v^4 + uv$).

Переход от функции $\widehat{W}_\delta$ к краевой особенности функции $v^4 + uv$, $u \geqslant 0$, и ее деформации не отражается на каустике, которая представляет собой росток в нуле следующего объединения множеств: $\Sigma = \Sigma_1^{int} \cup \Sigma_1^{ext} \cup \Sigma_0$, где $\Sigma_1^{int}, \Sigma_1^{ext}$ — подмножества (компоненты) каустики, отвечающие за вырождение краевых особенностей вдоль края и, соответственно, по нормали, а Σ_0 — компонента, отвечающая за вырождение внутренних (некраевых) критических точек.

Нетрудно проверить, что в рассмотренной задаче компонента Σ_0 является пустой. Следовательно, построение параметризации каустики сводится к параметризации лишь ее «краевых» компонент.

2.2. Вырождение вдоль края (внутреннее вырождение). Для функции $\widehat{W}_\delta(u,v) = v^4 + uv + \delta_1 u + \delta_2 v^2$ рассмотрим ее краевые критические точки, в которых вторая частная производная по v обращается в нуль, то есть выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial \widehat{W}_\delta}{\partial v}(0,v) = \frac{\partial^2 \widehat{W}_\delta}{\partial v^2}(0,v) = 0,$$

или

$$4v^3 + 2\delta_2 v = 12v^2 + 2\delta_2 = 0.$$

На основе этих соотношений легко увидеть, что множество Σ_1^{int} задается уравнением $\delta_2 = 0$. Переход параметра δ_2 сверху вниз через нуль приводит к рождению пары симметрично расположенных точек минимума (относительно края). Нуль становится при этом точкой максимума. Индекс Морса всех краевых критических точек изменяется на единицу при смене знака производной W в нуле по нормали к краю (по переменной u).

2.3. Вырождение вдоль нормали (внешнее вырождение). Рассмотрим краевые критические точки функции $\widehat{W}$, в которых частная производная по u обращается в нуль (внешнее вырождение):

$$\frac{\partial \widehat{W}_\delta}{\partial u}(0,v) = 4v^3 + 2\delta_2 v = 0.$$

После сопоставления последнего соотношения с уравнением критических краевых точек нетрудно заметить, что множество Σ_1^{ext} задается уравнением $(\delta_2 + 2\delta_1^2)\delta_1 = 0$.

Таким образом, каустика функции $\widehat{W}_\delta(u,v)$ получается объединением координатного креста $\delta_1\delta_2 = 0$ с параболой $\delta_2 + 2\delta_1^2 = 0$.

3. ТРЕХМОДОВЫЕ БИФУРКАЦИИ

В случае трехмодовой бифуркации ключевая функция приобретает следующий вид

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{3} \delta_k I_k\right) + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{3} A_k I_k^2 + 2\sum_{k,j=1}^{3} B_{k,j} I_k^2 I_j^2\right) + J + o(\|\xi\|^4), \tag{16}$$

где $I_k = \xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2$ — стандартные инварианты, а J — линейная комбинация всех дополнительных (кроме стандартных I_k) базисных инвариантов степени $\leqslant 4$ для рассматриваемого действия окружности в в $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$:

$$\{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i\,p_1\varphi)z_1,\, \exp(i\,p_2\varphi)z_2,\, \exp(i\,p_3\varphi)z_3)^\top. \tag{17}$$

.

3.1. Образующие инварианты. Перечислим инварианты для двойных резонансов. Вновь обратимся к комплексной форме вещественных многочленов:

$$z_k := \xi_{2k-1} + \xi_{2k}\, i.$$

Во всех случаях инвариантами действия окружности являются многочлены

$$I_k = |z_k|^2,\ k = 1,2,3,$$

— стандартные инварианты степени 2. Кроме того, имеются инварианты степеней 3 и 4, присущие отдельным случаям (в левой колонке указаны типы резонансов):

$1:2:3$	$\bar{z}_1^2 z_2,\ \bar{z}_1\bar{z}_2 z_3,\ \bar{z}_1\bar{z}_3 z_2^2,\ \bar{z}_1^3 z_3$
$1:2:4$	$\bar{z}_1^2 z_2,\ \bar{z}_2^2 z_3, \bar{z}_1^2\bar{z}_2 z_3$
$1:2:5$	$\bar{z}_1^2 z_2,\ \bar{z}_1\bar{z}_2^2 z_3$
$1:2:6$	$\bar{z}_1^2 z_2,\ \bar{z}_2^3 z_3$
$1:3:4$	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1\bar{z}_2 z_3$
$1:3:5$	$\bar{z}_1^3 z_2,\ \bar{z}_1^2\bar{z}_2 z_3$
$1:3:6$	$\bar{z}_1^3 z_2,\ \bar{z}_2^2 z_3$
$1:3:7$	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1\bar{z}_2^2 z_3$
$1:3:9$	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_2^3 z_3$
$p:q:p+q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\bar{z}_1\bar{z}_2 z_3$
$p:q:2p+q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\bar{z}_1^2\bar{z}_2 z_3$
$p:q:p+2q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\bar{z}_1\bar{z}_2^2 z_3$
$p:2p:q,\ p+q\geqslant 8,\ p,q\geqslant 1$	$\bar{z}_1^2 z_2$
$p:q:2q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\bar{z}_2^2 z_3$
$p:3p:q,\ p+q\geqslant 9,\ p,q\geqslant 1$	$\bar{z}_1^3 z_2$
$p:q:3q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\bar{z}_2^3 z_3$

В случае $p:q:r,\ p+q\geqslant 5,\ p+r\geqslant 5, q+r\geqslant 5$ дополнительных инвариантов степеней 3 и 4 нет.

Если перейти к полярным координатам $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, то получим ключевую функцию в виде $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P} + o(\|r\|^4)$, где

$$\mathcal{W}_0 = \sum_{j=1}^{3} r_k^4 + \sum_{j<k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2 ,$$

$\{a_{j,k}\}$ — структурные параметры, $\mathcal{P}$ — полином от r с коэффициентами, зависящими от φ), δ_j — малый параметр. Полином $\mathcal{P}$ задан следующей таблицей:

$1:2:3$	$b_1 r_1 r_2 r_3 + b_2 r_1^2 r_2 + b_3 r_1 r_2^2 r_3 + b_4 r_1^3 r_3$
$1:2:4$	$b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_2^2 r_3 + b_3 r_1^2 r_2 r_3$
$1:2:5$	$b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_1 r_2^2 r_3$
$1:2:6$	$b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_2^3 r_3$
$1:3:4$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_1 r_2 r_3$
$1:3:5$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_1^2 r_2 r_3$
$1:3:6$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_2^2 r_3$
$1:3:7$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_1 r_2^2 r_3$
$1:3:9$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_2^3 r_3$
$p:q:p+q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$b r_1 r_2 r_3$
$p:q:2p+q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$b r_1^2 r_2 r_3$
$p:q:p+2q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$b r_1 r_2^2 r_3$
$p:2p:q,\ p+q\geqslant 8,\ p,q\geqslant 1$	$b r_1^2 r_2$
$p:q:2q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$b r_2^2 r_3$
$p:3p:q,\ p+q\geqslant 9,\ p,q\geqslant 1$	$b r_1^3 r_2$
$p:q:3q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$b r_2^3 r_3$

Коэффициенты $b,\ b_j$ являются функциями от угловых переменных φ_k.

Нетрудно проверить, что стационарные по угловым переменным точки регулярны по этим переменным. От угловых переменных можно избавиться посредством вторичной редукции к функции $\mathcal{U}(r)$ (исключением угловых переменных):

$$\mathcal{U}(r) := \operatorname*{extr}_{\varphi} \mathcal{W}(r,\varphi) = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P}_0 + O(\|r\|^4) O(\delta) + o(\|r\|^4) . \tag{18}$$

Важная информация о бифуркациях в порождающей критической точке исходного функционала «спрятана» в функции $\mathcal{U}(r)$. Каждому из перечисленных выше случаев двойного резонанса соответствует определенный тип min-особенности ключевой функции. После исключения угловых переменных φ_k получается функция $\mathcal{U}(r)$, инвариантная относительно действия в $\mathbb{R}^3$ группы «остаточной» симметрии G, порожденной исходным действием окружности в $\mathbb{C}^3$. Точнее, группа G порождена теми действиями (17), которые переводят стационарные (по φ) подмногообразия (для $\mathcal{W}(r,\varphi)$) в точно такие же подмногообразия. Ниже будет приведен пример группы G «остаточной» симметрии.

Теорема 3 (о частично нормализованной ключевой функции). *Если полученная редуцированием (18) (по угловым переменным φ_k) функция $\mathcal{U}(r)$ (в точке минимума с двойным сильным резонансом) конечнократна, то она приводится посредством G-эквивариантной параметрической замены координат и переопределения параметров к следующей нормальной до четвертого порядка форме:*

$$\sum_{j=1}^{3} r_k^4 + \sum_{j<k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \mathcal{P}_0 + \frac{1}{2}\left(\delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2\right) + O(\|r\|^4)O(\delta) + o(\|r\|^4)\,, \tag{19}$$

в которой слагаемое $\mathcal{P}_0$ представлено следующей таблицей:

$1:2:3$	$br_1r_2^2r_3 + \varepsilon_1 r_1r_2r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2$
$1:2:4$	$b\,r_1^2r_2r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3$
$1:2:5$	$\varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_1 r_2^2 r_3$
$1:2:6$	$\varepsilon\, r_1^2 r_2$
$1:3:4$	$\varepsilon\, r_1 r_2 r_3$
$1:3:5$	$\varepsilon\, r_1^2 r_2 r_3$
$1:3:6$	$\varepsilon\, r_2^2 r_3$
$1:3:7$	$br_1 r_2^2 r_3$
$1:3:9$	0
$p:q:p+q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\varepsilon\, r_1 r_2 r_3$
$p:q:2p+q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\varepsilon\, r_1^2 r_2 r_3$
$p:q:p+2q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\varepsilon\, r_1 r_2^2 r_3$
$p:2p:q,\ p+q\geqslant 8,\ p,q\geqslant 1$	$\varepsilon\, r_1^2 r_2$
$p:q:2q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	$\varepsilon\, r_2^2 r_3$
$p:3p:q,\ p+q\geqslant 9,\ p,q\geqslant 1$	0
$p:q:3q,\ p+q\geqslant 5,\ p,q\geqslant 1$	0

(параметры ε_j являются малыми), G — группа остаточной симметрии.

Замечание. В последней теореме учтено, что каждый моном $r_j^3 r_k,\ j\neq k$, после проецирования в фактор $\mathbb{R}[[x_1,\,x_2,\,x_3]]\Big/\left\langle \frac{\partial W}{\partial x_1},\,\frac{\partial W}{\partial x_2},\,\frac{\partial W}{\partial x_3}\right\rangle$ (локальное кольцо min-особенности, [8] - с.8, [11] – [13]) попадает в линейную оболочку мономов $r_j^2 r_k^2,\ j\neq k$, и $r_j^2 r_k r_l,\ j\neq k\neq l\neq j$.

3.2. Пример построения частично нормальной формы ключевой функции (случай резонанса $1:2:4$).

Ключевая функция, редуцированная по угловым переменным в критической точке с резонансом 1:2:4, приводится к следующей частично нормализованной форме:

$$\sum_{j=1}^{3} r_k^4 + \sum_{j<k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b\, r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1\, r_1^2 r_2 + \varepsilon_2\, r_2^2 r_3 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2 +\ o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta)\,, \tag{20}$$

c — параметр. Вычисление коэффициентов проводится стандартным образом. Сначала вычисляется тейлоровское приближение $\widetilde{W}$ к ключевой функции до четвертого порядка (на пространстве ключевых переменных $\mathbb{R}^6$). Затем в трех плоскостях парных мод бифуркации вводятся полярные координаты. У записанной в этих координатах тейлоровской аппроксимации $\widetilde{W}$ ключевой функции определяются критические значения (трех) угловых переменных. После подстановки этих значений вместо угловых переменных получаем редуцированную главную часть в виде полинома $\mathcal{W}$ четвертой степени от трех радиальных переменных. Дальнейший процесс нормализации полученной функции $\mathcal{W}$ опирается на теорему Дж. Мазера [12], с. 124-125, о конечной определенности функции своей главной частью (с учетом остаточной симметрии).

Обобщенно симметричная огрубленная ограниченная миниверсальная деформация выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{3} r_k^4 + \sum_{j<k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b\, r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2. \qquad (21)$$

Группа обобщенной симметрии G порождена следующими элементарными действиями:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 \\ -\varepsilon_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -r_3 \\ -\varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Данная симметрия является следствием круговой симметрии и наличием резонанса 1:2:4.

Из полученных утверждений следует, в силу теорем о локальной конечной определенности функций [11], [12], что ключевая функция эквивалентна развертке с главной частью в виде (20).

3.3. Случай резонанса 1:2:3. Описанные выше рассуждения можно произвести и для других случаев ключевых функций. Например, для резонанса 1:2:3 ключевая функция (огрубленная) $\mathcal{W}_\delta$ проводится к форме

$$\sum_{j=1}^{3} r_k^4 + \sum_{j<k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \varepsilon_1 r_1 r_2 r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2 + o(\|r\|^4).$$

3.4. Случай min**-особенности с резонансом** $p : 2p : q,\ p+q \geqslant 5,\ a \neq 0$ (см. [14], [15]). После замены $r_1^2 = y_1,\ r_2 = y_2,\ r_3^2 = y_3$ (для редуцированной и нормализованной ключевой функции) получим функцию с угловой особенностью [16]

$$\widetilde{U}_\delta = y_1^2 + y_2^4 + y_3^2 + a_{1,2} y_1 y_2^2 + a_{1,3} y_1 y_3 + a_{2,3} y_2^2 y_3 + \varepsilon y_1 y_2 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3.$$

Анализ таких функций представлен в [8].

3.5. Случай min**-особенности со слабым резонансом** $p : q : r,\ |p| + |q| + |r| \geqslant 5$**.**

В этом случае после замены $r_1^2 = y_1,\ r_2^2 = y_2,\ r_3^2 = y_3$ (для редуцированной и нормализованной ключевой функции) получим функцию с главной частью (после отбрасывания «наддиагональных» мономов) [11])

$$\widehat{U}_\delta(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + a y_1 y_2 + b y_1 y_3 + c y_2 y_3 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3 \qquad (22)$$

в положительном октанте $\{y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0\}$ (функцию с угловой особенностью [16] (см. также [8])). Анализ этой функции проведен в [17].

4. ПРИМЕР БИФУРКАЦИОННОГО АНАЛИЗА ОГРУБЛЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ, РЕДУКЦИЯ К КРАЕВОЙ ОСОБЕННОСТИ

Обратимся к случаю резонанса $1 : 2 : 4$. После замены $r_1^2 = y_1,\ r_2 = y_2,\ r_3 = y_3$ в (20) получим функцию $\overline{U}_\delta$ с краевой особенностью [11]

$$y_1^2 + y_2^4 + y_3^4 + a_{1,2} y_1 y_2^2 + a_{1,3} y_1 y_3^2 + a_{2,3} y_2^2 y_3^2 + \varepsilon_1 y_1 y_2 + \varepsilon_2\, y_1 y_3 + \varepsilon_3 y_2^2 y_3 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3^2, \qquad (23)$$

(определенную на полупространстве $y_1 \geqslant 0$).

Каустику можно представить в виде $\Sigma = \Sigma^{int}_{0,1,1} \cup \Sigma^{ext}_{0,1,1} \cup \Sigma_{1,1,1}$, где $\Sigma^{int}_{0,1,1}$ и $\Sigma^{ext}_{0,1,1}$ — подмножества (компоненты) каустики, отвечающие за вырождение краевых особенностей вдоль края $y_1 = 0$ и, соответственно, по нормали, а $\Sigma_{1,1,1}$ — компонента, отвечающая за вырождение внутренних (некраевых) критических точек.

Описание компоненты $\Sigma^{int}_{0,1,1}$ (следящей за внутренним вырождением (вырождением вдоль края)) сводится к изучению функции

$$\overline{U}_\delta(0, y_2, y_3) = y_2^4 + y_3^4 + a_{2,3} y_2^2 y_3^2 + \varepsilon_3 y_2^2 y_3 + \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3^2.$$

Компонента $\Sigma^{ext}_{0,1,1}$, следящая за внешним вырождением (вырождением вдоль нормали), определяется рассмотрением (краевых) критических точек функции $\overline{U}_\delta$, в которых производная по y_1 обращается в нуль (внешнее вырождение): $\partial\overline{U}_\delta \partial y_1(0, y_2, y_3) = 0$.

Компонента $\Sigma^{ext}_{1,1,1}$, следящая за вырождением вне края, описывается посредством редукции к одномерной особенности. Действительно, функция (23) имеет одномерное вырождение в начале координат (по переменным y_1, y_2 эта функция регулярна) и поэтому можно сделать редуцирующий переход к функции одной переменной $R(y_3) := \underset{y_1,y_2}{\mathrm{extr}}\ \overline{U}_\delta(y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Карпова А.П. Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения / А.П. Карпова, У.В. Ладыкина, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. — Т. 5, Ч. 1. — Воронеж: ВорГУ, изд-во "Созвездие", 2008. — С. 45–90.

[2] Карпова А.П. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов / А.П. Карпова, Ю.И. Сапронов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — вып. 3. — С. 12–22.

[3] Даринский Б.М. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка / Б.М. Даринский, И.В. Колесникова, Ю.И. Сапронов // Системы управления и информационные технологии. — 2009. — № 1 (35). — С. 72–76.

[4] Даринский Б.М. Ветвление сегнетоэлектрических фаз неоднородного кристалла вблизи критической фазы с трехмерной особенностью шестого порядка / Б.М. Даринский, И.В. Колесникова, Ю.И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 101–107.

[5] Копытин Н.А. Алгоритм численного исследования резонансных бифуркаций колебательных режимов в электрической цепи с дополнительным контуром / Н.А. Копытин, А.П. Карпова, В.И. Непринцев, Ю.И. Сапронов // Вестник ВГТУ. — 2009. — Т. 5, № 4. — С. 116–119.

[6] Колесникова И.В. Двухмодовые ветвления сегнетоэлектрических фаз кристалла вблизи критического состояния с однородной особенностью шестого порядка / И.В. Колесникова, Ю.И. Сапронов // Вестник Челябинского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2009. — № 6(107), вып. 11. — С. 38–48.

[7] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 101–132.

[8] Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

[9] Сапронов Ю.И. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах / Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Матем. заметки. — 2000. — Т. 58, № 5. — С. 745–754.

[10] Царев С.Л. Сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах с симметрией / С.Л. Царев // Современная математика и ее приложения. — Тбилиси. — 2003. — Т. 7. — С. 87–91.

[11] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

[12] Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977. — 208 с.

[13] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. — М.: Мир, 1980. — 608 с.

[14] Дерунова Е.В., Сапронов Ю.И. Ключевые функции, определяющие ветвление периодических экстремалей в стационарных точках с двойными резонансами порядка три / Е.В. Дерунова, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. — 2011. — Т. 7. — С. 34–47.

[15] Sapronov Yu. I. Bifurcations of critical orbits of SO(2)-invariant Fredholm functionals at critical points with double resonances / Yu. I. Sapronov, E. V. Derunova // Global and Stochastic Analysis. — 2012. — V. 2, № 1. — P. 133–148.

[16] Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc. / D. Siersma // Quart. J. Oxford Ser. — 1981. — V. 32, № 125. — P. 119–127.

[17] Гнездилов А.В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3−круговой симметрией / А.В. Гнездилов // Функц. анализ. — 2000. — Т. 34, вып. 1. — С. 83–86.

Дерунова Е.В., аспирант кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет
E-mail: derunova-el@mail.ru

Derunova E.V., VSU, Voronezh, Russia
E-mail: derunova-el@mail.ru

Сапронов Юрий Иванович, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет
E-mail: usapr@mail.ru

Sapronov Yu.I., VSU, Voronezh, Russia
E-mail: usapr@mail.ru