

К УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ МИКРОСТРУКТУРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УЗКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ

Н. Д. Вервейко¹, С. А. Ноаман², А. И. Шашкин¹

¹ Воронежский государственный университет

² университет г. Диала, Ирак

Поступила в редакцию 31.01.2014 г.

Аннотация: методом малого параметра построены добавки к скорости сдвигового течения материала в канале за счёт кривизны слоя, микроструктуры материала и возмущения ширины канала. Ограниченность возмущенного течения свидетельствует об устойчивости стационарного течения микроструктурной вязкой жидкости в каналах криволинейной формы.

Ключевые слова: микроструктура, вязкость, течения, слой, кривизна, устойчивость.

Abstract: in this paper authors built additives for velocity flow microstructure viscosity liquid in the narrow curvilinear channel by method small parameter. Show stability of the form flow liquid in the channel under change parameters microstructure material.

Keywords: microstructure, viscosity, flow, layer, curvature, stability.

ВВЕДЕНИЕ

Вращательное сдвиговое течение различного рода природных и искусственных материалов в зазорах криволинейной формы достаточно широко распространено в технике и в различных технологических процессах. Ниже в качестве математической модели такого рода рассмотрено течение микроструктурной [1] вязкой жидкости в относительно узком канале, образованном вращающимся валом и внешним эллиптическим контуром. Методом малого параметра [2] приведено влияние кривизны канала, переменности ширины канала и параметров микроструктуры на устойчивость течения в зазоре.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоское вращательное течение микроструктурной вязкой жидкости в канале, образованном внешним эллиптическим контуром и внутренним цилиндром радиуса R_0 вращающийся с угловой скоростью Ω_0 (рис. 1)

Уравнения стационарного плоского движения несжимаемой микроструктурной вязкой жидкости в полярных координатах r, φ для компонент поля скоростей $v_r = v, v_\varphi = w$ и давления p имеет вид [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right) = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}; \quad \varepsilon = \varepsilon^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon^c = 0; \quad (1)$$

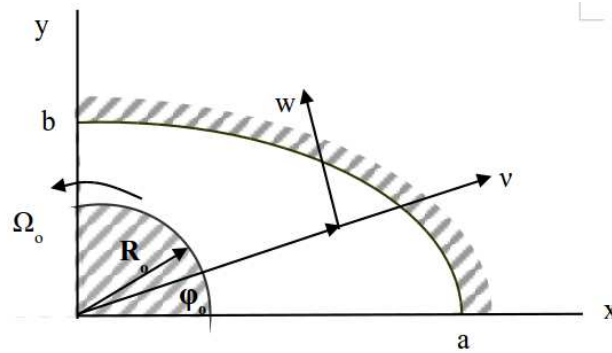


Рис. 1. Изображение канала образованного внешним неподвижным контуром в форме эллипса с полуосями a, b и внутренним цилиндром радиуса R_0 вращающимся с угловой скоростью Ω_0 .

здесь: $\varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right)$; $\varepsilon^c = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial v} + \frac{v}{r}$; компоненты скорости деформации по Коши; $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа; μ — коэффициент вязкости.

Введём характерные величины: H — средняя толщина слоя, V_0 средняя скорость течения, P_0 — характерное давление. Координату r точки M течения будем далее отсчитывать от границы $r = R_0$, $r = R_0 + y$ и обозначим далее $y = \xi H$.

Система трех дифференциальных уравнений для скоростей $\bar{v} = v/V_0$; $\bar{w} = w/V_0$ и давления $\bar{p} = p/P_0$ примет вид

$$\frac{\nu}{1 + \nu \xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{\varepsilon}_{r\varphi}^c + \delta \bar{\Delta} \bar{\varepsilon}_{r\varphi}^c) = \partial \bar{p} / \partial \xi; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\varepsilon}_{r\varphi}^c + \delta \bar{\Delta} \bar{\varepsilon}_{r\varphi}^c) = \frac{\nu}{1 + \nu \xi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi}; \quad \bar{\varepsilon}^c + \delta \bar{\Delta} \bar{\varepsilon}^c = 0. \quad (2)$$

здесь $\bar{\varepsilon}_{r\varphi}^c = \frac{\nu \partial \bar{\varphi}}{(1 + \nu \xi) \partial \varphi} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} - \frac{\nu \bar{w}}{1 + \nu \xi}$; $\bar{\varepsilon}^c = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{\nu \partial \bar{w}}{(1 + \nu \xi) \partial \varphi} + \frac{\nu \bar{v}}{1 + \nu \xi}$;

$$P_0 = \mu V_0 / 2H; \quad v = H / R_0; \quad \delta = h^2 / 6H^2; \quad V_0 = \Omega_0 R_0$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{1 + \nu \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 + \nu \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\nu^2 \partial^2}{(1 + \nu \xi)^2 \partial \varphi^2}.$$

Система трех уравнений в частных производных (2) для случая учёта микроструктуры (δ — мало) является сингулярно возмущенной, так как малый параметр δ стоит перед производными нам высшего (третьего) порядка. При $\delta \rightarrow 0$ порядок дифференциальных уравнений снижается, что ведет к невыполнению всех граничных условий и требуется введение в рассмотрение пограничного слоя.

В случае малой кривизны канала ($H/R_0 = \nu$ — мало) система уравнений является регулярно возмущенной и возможно применение метода возмущений во всей области течения.

ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Исходя из приближения криволинейного канала к реальным ситуациям полагаем, что он образован зазором между вращающимся с угловой скоростью Ω_0 валом радиуса R_0 и неподвижным контуром в виде эллипса малого эксцентриситета ε , $\varepsilon = (b^2 - a^2) / (a^2 + b^2)$ с полуосями a и b (рис. 1).

Будем полагать прилипание элемента микроструктурной жидкости к подвижной поверхности вала и на внешней границе канала — прилипание к неподвижной границе. При постановке граничных условий следует выделить пограничный слой толщины Δ_0 , условия прилипания к твёрдой поверхности и условия продолжения решения за пограничный слой. На

поверхности вращающегося вала такими условиями будут

$$w(R_o) = \Omega_o R_o \text{ и } w^{\text{ОТН}}(R_o + \Delta_o) - \gamma \frac{\partial w^{\text{ОТН}}(R_o + \Delta_o)}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

причём первое условие имеет место для решения в пограничной слое, а второе является условием продолжения решения на верхней границе пограничного слоя.

В безразмерном виде условия примут вид

$$w(1) = 1; \quad w(1 + \Delta_o) - \gamma \partial w(1 + \Delta_o) / \partial \xi = 1. \quad (4)$$

Для постановки граничных условий прилипания на внешнем контуре в виде эллипса зададим его приближенно с точностью до первого порядка эксцентриситета ε

$$\Phi(\xi, \varphi) = \xi - \rho_o \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \cos 2\varphi \right) = 0; \quad \left(\rho_o = \frac{ab\sqrt{2}}{R_o\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \quad (5)$$

Условия прилипания материала течения к стенке ($v_n = 0$ и $v_t = 0$) и линейного продолжения решения для v_t за пограничной слой представим в безразмерном виде с точностью до ε^1 относя разложение в ряд по ε на контур эллипса, который в нулевом приближении представляет собой окружность радиуса ρ_o .

$$v(\rho_o, \varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \rho_o \varepsilon \cos 2\varphi (\partial v(\rho_o, \varphi) / \partial \xi) = 0; \quad w(\rho_o, \varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \rho_o \varepsilon \cos 2\varphi (\partial w(\rho_o, \varphi) / \partial \xi) = 0 \quad (6)$$

$$[w - \gamma \partial w / \partial \xi - \rho_o \varepsilon \sin 2\varphi (v - \gamma \partial v / \partial \xi + \gamma \partial w / \partial \xi) + (\varepsilon/2) \cos 2\varphi (\partial w / \partial \xi - \gamma \partial w / \partial \xi)]_{\xi=\rho_o} = 0.$$

Замкнутая математическая модель вращательного движения микроструктурной вязкой жидкости в узком криволинейном канале для двух компонент скорости w, v и давления p , представленная в форме трех дифференциальных уравнений в частных производных (2) и граничных условий (4), (6) содержит три малых параметра δ, ε, ν , вследствие непрерывной зависимости решения задачи от этих параметров, допускает применение метод возмущений к представлению решения в виде степенного ряда по параметрам.

$$f_k(\xi, \varphi) = f_k^o(\xi, \varphi) + f_k^v(\xi, \varphi) v + f_k^\varepsilon(\xi, \varphi) \varepsilon + f_k^\delta(\xi, \varphi) \delta + \dots \quad (7)$$

$$(k = 1, 2, 3); \quad f_1 = w; \quad f_2 = v; \quad f_3 = p$$

НУЛЕВОЕ ВНЕШНЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Подставляя выражения (7) для разложения скоростей и давления в ряд по параметрам v, δ, ε в уравнения (2,4,6) и удерживая слагаемые нулевого порядка по малым параметрам получим систему уравнений с граничными условиями

$$\frac{\partial p^o}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial^2 w^o}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial v^o}{\partial \xi} = 0; \quad v^o(1) = 0; \quad w^o(1) = 0; \quad w^o(1 + \Delta_o) - \gamma \frac{\partial w^o(1 + \Delta_o)}{\partial \xi} = 1; \\ v^o(f_o) = 0; \quad w^o(f_o) = 0; \quad w^o(f_o + \Delta_o) - \gamma \frac{\partial w^o(f_o + \Delta_o)}{\partial \xi} = 0. \quad (8)$$

Из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) следует: давление p сохраняется по постоянным во всей области течения

$$p^o(\xi, \varphi) = p_o = const; \quad (9)$$

радиальная скорость течения материала v^o отсутствует

$$v^o(\xi, \varphi) = 0; \quad (10)$$

окружная скорость течения $w^o(\xi, \varphi)$ изменяется линейным образом вдоль радиуса ξ

$$w^o(\xi, \varphi) = c_1 + c_2 \xi. \quad (11)$$

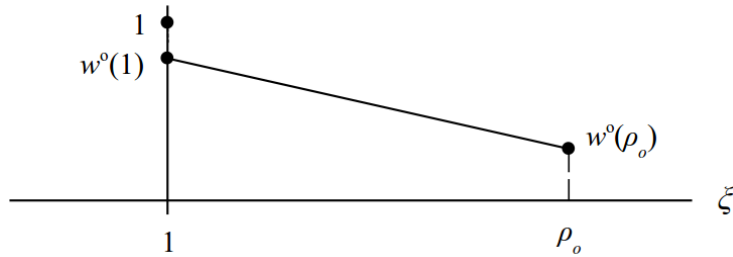


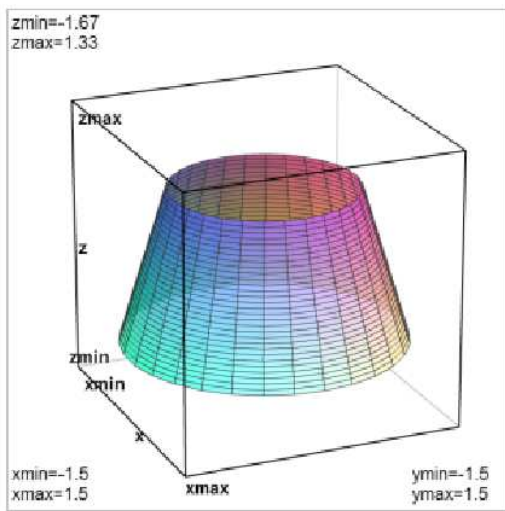
Рис. 2. Распределение окружной скорости $w^o(\xi)$ в канале где имеет отсутствие прилипания к границам канала ($w^o(1) \neq 1$; $w^o(\rho_o) \neq 0$) вследствие наличия пограничного слоя.

Граничные условия на внешней границе пограничных слоёв на вращающемся вале $\xi = 1$ и на эллипсе в нулевом предложении $\xi = \rho_o$ позволяют найти c_1, c_2 и представить выражение для скорости $w^o(\xi, \varphi)$ в виде

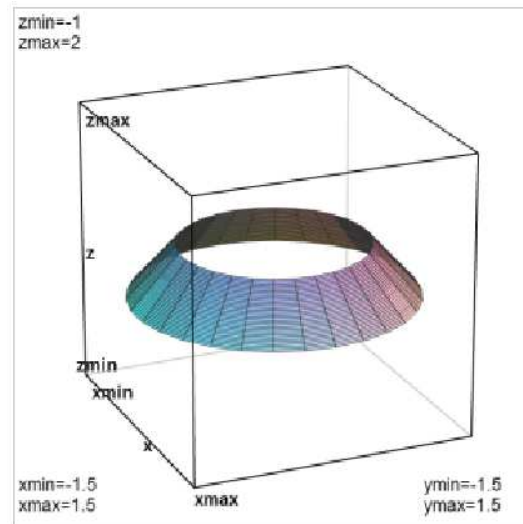
$$w^o(\xi, \varphi) = \frac{\rho_o + \gamma - \xi}{\rho_o + 2\gamma - 1}, \quad (12)$$

где $w^o(1) = 1 - \frac{\gamma}{\rho_o + 2\gamma - 1}$; $w^o(\rho_o) = \frac{\gamma}{\rho_o + 2\gamma - 1}$.

С геометрической точки зрения нулевое приближение соответствует сдвиговому течению в плоском канале при наличии пограничных слоёв толщиной Δ_o на обеих границах канала, где имеет место проскальзывание материала.



$\rho_o = 1.1, \gamma = 0.1$



$\rho_o = 1.5, \gamma = 0.2$

Рис. 3. Результаты численного расчёта окружной скорости в цилиндрическом зазоре для различных значений ρ_o и γ .

Из графиков Рис. 3, представляющих значение безразмерной окружной скорости как функции радиуса $\varepsilon = r/R_o$ для различных ρ_o и γ , следует, что увеличение линейного размера микроструктуры γ ведёт к более интенсивному проскальзыванию материала относительно границ области течения, а увеличение внешнего радиуса ρ_o ведёт к менее градиентом течению.

ПЕРВОЕ ВНЕШНЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАЗЛОЖЕНИИ ПО ПАРАМЕТРУ $\nu = H/R_o$

Подставляя разложение (7) для скоростей w, v и давление p в уравнение (2) и граничные условия (4), (6) и удерживая слагаемые при ν^1 получим

$$\frac{\partial^2 w^o}{\partial \varphi \partial \xi} = \frac{\partial p^o}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 v^o}{\partial \varphi \partial \xi} + \frac{\partial^2 w^o}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w^o}{\partial \xi} = \frac{\partial p^o}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v^o}{\partial \xi} + \frac{\partial w^o}{\partial \varphi} + v^o = 0. \quad (13)$$

$$v^v(1) = 0; \quad w^v(1) = 0; \quad w^v(1 + \Delta_o) - \gamma \frac{\partial w^v(1 + \Delta_o)}{\partial \xi} = 0;$$

$$v^v(\rho_o) = 0; \quad w^v(\rho_o) = 0; \quad w^v(\rho_o + \Delta_o) - \gamma \frac{\partial w^v(\rho_o + \Delta_o)}{\partial \xi} = 0.$$

Из системы уравнений граничных условий (13) следует

$$p^\circ(\xi, \varphi) = 0; \quad v^v(\xi, \varphi) = 0; \quad w^v(\xi, \varphi) = 0.$$

Таким образом, слабое, порядка $\nu = H/R_o$, искривление границ канала не ведёт к возмущению параметров течения нулевого приближения, что допускает возмущение течения более высокого порядка по v .

ПЕРВОЕ ВНЕШНЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ПО ПАРАМЕТРУ $\delta = (h^2/6H^2)$

Уравнения для первого приближения в разложении в ряд по параметру δ вместе с граничными условиями следуют из уравнений (2), (4), (6)

$$\frac{\partial p^\delta}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} w^\circ + \frac{\partial^2 w^\delta}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial v^\delta}{\partial \xi} = 0. \quad (14)$$

Нулевое приближение для w° , v° и p° вместе уравнениями (15) и нулевыми граничными условиями дают нулевое решения для этого приближения

$$p^\delta(\xi, \varphi) = 0; \quad w^\delta(\xi, \varphi) = 0; \quad v^\delta(\xi, \varphi) = 0. \quad (15)$$

Таким образом микроструктура материала не влияет в первом приближении на сдвиговое течение в канале.

ТЕЧЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ОБУСЛОВЛЕННОМ МИКРОСТРУКТУРОЙ МАТЕРИАЛА

Уравнение движения материала (2) в проекции на окружное направление φ в отсутствие перепада давления по φ ($\partial p/\xi \partial \varphi = 0$) при удержании величин порядка δ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 w_\pi^\delta}{d\eta^4} = \partial p/\eta \partial \varphi = 0. \quad (16)$$

Заметим, что не только $\partial p/\xi \partial \varphi = 0$ но и $\int_{\circ}^{\Delta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \partial \eta = 0$ и $\int_{\circ}^{\lambda} \int_{\circ}^{\xi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \partial \eta \partial \xi = 0$, что соответствует отсутствию перепада давлений не только в точке течения, но и по всему сечению пограничного слоя, а также отсутствию момента внешних сил в поперечном сечении пограничного слоя. Это условие приводит уравнение (16) к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w_\pi^\delta}{d\eta^2} = 0 \quad (17)$$

решением которого является линейное распределение скорости w_π^δ в пограничном слое

$$w_\pi^\delta(\xi, \varphi) = c_1 + c_2 \xi. \quad (18)$$

Граничными условиями являются совпадение скорости частицы материала со скоростью нижней границы пограничного слоя и совпадение со скоростью внешнего потока на верхней границе пограничного слоя

$$w_{\pi}^{\delta}(0) = w_{\pi}; \quad w_{\pi}^{\delta}(\Delta_{\circ}) = w_{\circ}(0). \quad (19)$$

Из (2), (4) получим

$$c_1 = w_{\pi}^{\circ}; \quad c_2 = (w_{\circ}^{\circ} - w_{\pi}^{\circ}) / \Delta_{\circ}; \quad w_{\pi}^{\delta} = w_{\pi}^{\circ} + \frac{w_{\circ}^{\circ} - w_{\pi}^{\circ}}{\Delta_{\circ}} \xi. \quad (20)$$

На рис. 4 представлен график распределения окружной скорости $w^{\circ}(\xi)$ с учётом пограничного слоя.

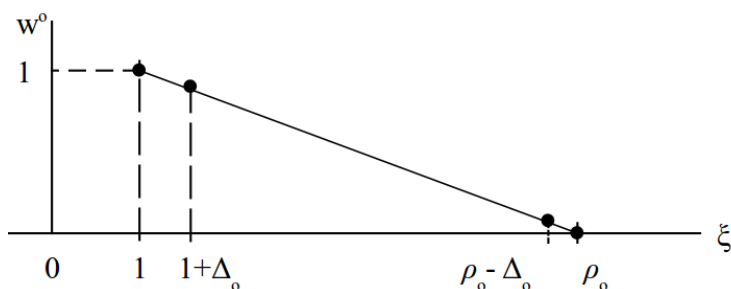


Рис. 4. Распределение окружной скорости $w^{\circ}(\xi)$ в сечении канала с учётом пограничных слоёв.

ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ПО ПАРАМЕТРУ ε — ЭКСЦЕНТРИСИТЕТУ ВНЕШНЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ГРАНИЦЫ

Уравнения и граничные условия для первого приближения v^{ε} , w^{ε} , p^{ε} следуют из уравнения (2), (4), (6)

$$\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial^2 w^{\varepsilon}}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v^{\varepsilon}}{\partial \xi^2} = 0;$$

$$v^{\varepsilon}(1, \varphi) = 0; \quad v^{\varepsilon}(1, \varphi) - \gamma \frac{\partial v^{\varepsilon}(1, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad w^{\varepsilon}(1, \varphi) = 0; \quad w^{\varepsilon}(1, \varphi) - \gamma \frac{\partial w^{\varepsilon}(1, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad (21)$$

$$v^{\varepsilon}(\rho_{\circ}, \varphi) + \frac{1}{2} \rho_{\circ} \cos 2\varphi \frac{\partial v^{\circ}(\rho_{\circ}, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad w^{\varepsilon}(\rho_{\circ}, \varphi) + \frac{1}{2} \rho_{\circ} \cos 2\varphi \frac{\partial w^{\circ}(\rho_{\circ}, \varphi)}{\partial \xi} = 0;$$

$$w^{\varepsilon}(\rho_{\circ}, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^{\varepsilon}(\rho_{\circ}, \varphi)}{\partial \xi} - \rho_{\circ} \sin 2\varphi \left(v^{\circ}(\rho_{\circ}, \varphi) - \gamma \frac{\partial v^{\circ}(\rho_{\circ}, \varphi)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial w^{\circ}(\rho_{\circ}, \varphi)}{\partial \xi \varphi} \right) + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \left(\frac{\partial w^{\circ}(\rho_{\circ}, \varphi)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial^2 w^{\circ}(\rho_{\circ}, \varphi)}{\partial \xi^2} \right) = 0.$$

Система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (16) вместе с граничными условиями допускает: 1) тривиальное возмущение для давления p^{ε} и радиальной скорости v^{ε}

$$p^{\varepsilon}(\xi, \varphi) = 0; \quad v^{\varepsilon}(\xi, \varphi) = 0; \quad (22)$$

2) линейное решение по ξ для окружности скорости w^{ε}

$$w^{\varepsilon}(\xi, \varphi) = C_1^{\varepsilon}(\varphi) + C_2^{\varepsilon}(\varphi) \xi. \quad (23)$$

Граничные условия (16) на внешних границах пограничных слоёв при $\xi = 1$ и $\xi\rho_0$ с учётом нулевого внешнего приближения $w^0(\xi)$ и $v^\varphi(\xi)$ принимают вид

$$w^\varepsilon(1_0, \varphi) - \gamma \frac{\partial w^\varepsilon(1_0, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad w^\varepsilon(\rho_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^\varepsilon(\rho_0, \varphi)}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \frac{\partial w^0(\rho_0, \varphi)}{\partial \xi} = 0 \quad (24)$$

где $w^\varepsilon(\xi, \varphi) = (\rho_0 + \gamma - \xi) / (\rho_0 + 2\gamma - 1)$.

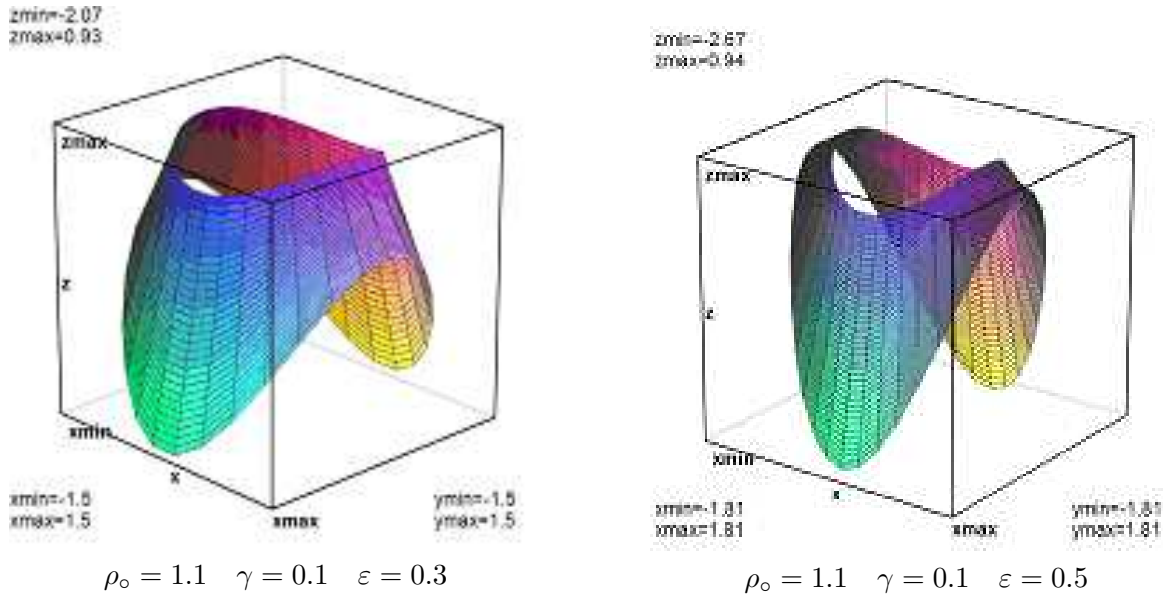


Рис. 5. График окружной скорости $w(\xi, \varphi)$ в полярных координатах для различных значений $\rho_0 > 1$ и малых γ .

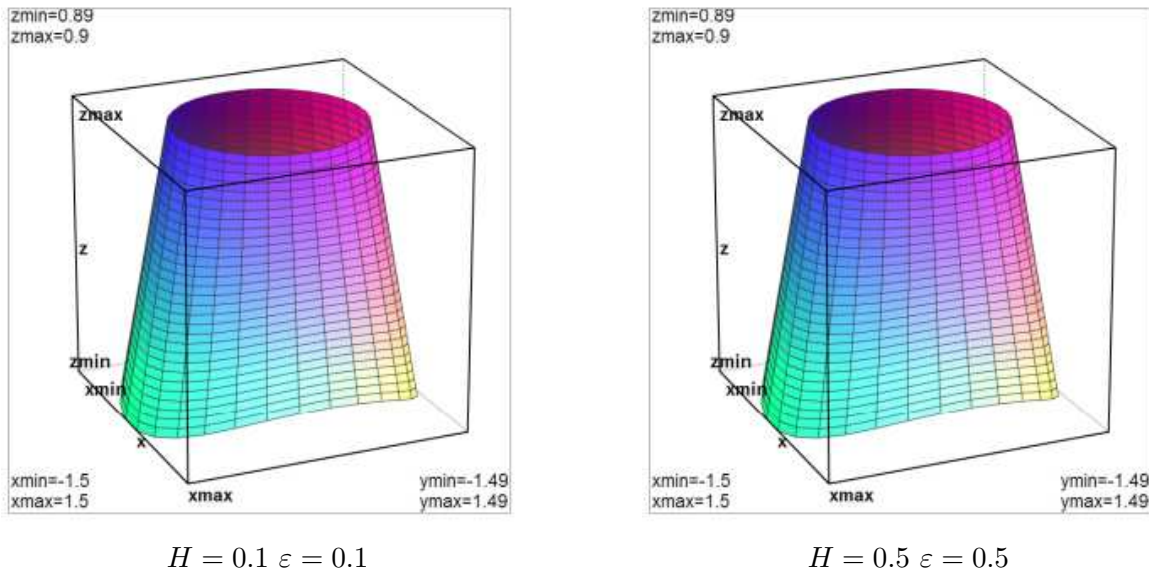


Рис. 6. График окружной скорости $w(\xi, \varphi)$ для случая $\gamma = 0$, $\bar{H} = 0.1; 0.01$, $\varepsilon = 0.1; 0.01$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\xi \in [1, \rho_0]$.

В силу граничных условий (19) возмущение для скорости $w^\varepsilon(\xi, \varphi)$ находится

$$w^\varepsilon(\xi, \varphi) = \cos 2\varphi \frac{\gamma - 1 + \xi}{2(-1 + \rho_0 + 2\gamma)^2}. \quad (25)$$

С учетом (12) и (24) окружная скорость течения $w(\xi, \varphi)$ в канале с точностью до ε^1, δ^1 и ν^1 представима в виде

$$w(\xi, \varphi) = \frac{1}{\rho_0 + 2\gamma - 1} \left(\rho_0 + \gamma - \xi - \frac{\varepsilon(1 - \gamma - \xi)}{2(\rho_0 + 2\gamma - 1)} \cos 2\varphi \right) \quad (26)$$

Исследуем поведение скорости $w(r, \varphi)$ для предельно малых значениях γ

$$w(\xi, \varphi)_{\gamma \rightarrow 0} \rightarrow 1 + \bar{H} - \frac{\bar{H}^2}{2} (\xi + \varepsilon \cos 2\varphi (1 - \xi)) \quad (27)$$

здесь $\bar{H} = H/R_0$ — относительная ширина канала.

Из (27) следует что зависимость окружной скорости от координаты ξ поперёк ширины канала имеет второй порядок малости по \bar{H} так что при $\bar{H} \rightarrow 0$ материал движется как твёрдое угловое со скоростью $w = 1$.

На рис. 6 представлен график $w(\xi, \varphi)|_{\gamma=0}$.

Из графиков рис. 5–6 следует уменьшение окружной скорости течения в области расширения ширины канала и увеличение скорости в области сужения канала по закону $\cos 2\varphi$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный методом возмущений анализ сдвигового течения микроструктурной вязкой жидкости в криволинейных каналах переменной ширины показал, что учёт микроструктуры материала ведёт к возникновению пограничного слоя, а малые кривизна и изменение ширины канала не изменяют форму сдвигового течения, которая является устойчивой [3] по отношению к рассмотренным малым возмущениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Быкова М. И. и др. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры. изд ВГУ. — 2010. — 192 с.
 [2] Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972. — 274 с.
 [3] Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 232 с.

Вервейко Н. Д., доктор технических наук, Воронежский государственный университет
 E-mail: nikolay verveyko@mail.ru
 Тел.: 8(473)-267-46-58

Verveiko N. D., Doctor of Technical Sciences, Voronezh State University
 E-mail: nikolay verveyko@mail.ru
 Tel.: 8(473)-267-46-58

Ноаман С. А., аспирант каф. теоретический и прикладной механики, Воронежский государственный университет (университет г. Дияла/ Ирак)
 E-mail: salam_000@yahoo.com
 Тел.: +79515687940

Noaman S. A., PhD. student of department Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, (University of Djalal / Iraq)
 E-mail: salam_000@yahoo.com
 Tel.: +79515687940

Шашкин А. И., доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет
 E-mail: dean@amm.vsu.ru
 Тел.: 8(473)220-83-22

Shashkin A. I., Doctor of physical and mathematical sciences, Voronezh State University
 E-mail: dean@amm.vsu.ru
 Tel.: 8(473)220-83-22