УДК 517.953

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ*

А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.01.2014 г.

Аннотация: в работе доказывается единственность решения математической модели, которая описывает малые вынужденные колебания стилтьесовской струны, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями.

Ключевые слова: математическая модель, стилтьесовская струна, вынужденные колебания, единственность.

Abstract: in this paper we prove the uniqueness of the solution of a mathematical model that describes small forced oscillations Stieltjes String placed in an external environment with localized singularities.

Keywords: mathematical model, Stieltjes String, forced oscillations, uniqueness.

ВВЕДЕНИЕ

Существование и единственность классического решения математической модели, реализующейся в виде начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, важны для приложений (см., например, [1], [2], [3]). Эти вопросы (существования и единственности) стоят особенно остро в случае наличия особенностей у объекта, которые приводят к потере гладкости решения. Применение теории обобщенных функций приводит к ряду трудно разрешимых проблем. Во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции (и ее производных) на разрывную (эта проблема в полном объеме не решена до сих пор), во-вторых, обсуждается только слабая разрешимость уравнения (в тоже время, для приложений важно знать значение решения (и его производных) в каждой точке).

Мы используем поточечный подход с применением производных по мере, предложенный Ю. В. Покорным [4] для одномерных граничных задач, и показавший свою эффективность не только для линейных уравнений второго порядка с непрерывными решениями [5], [6], [7], [8], [9], [10], но и для нелинейных краевых задач с непрерывными решениями [11], [12], для граничных задач второго порядка с разрывными решениями [13], [14], для дифференциальных уравнений четвертого порядка с производными по мере [15], [16], [17]. Отметим еще работу [18], в которой приводятся достаточные условия применимости метода Фурье к задаче колебания сетки из струн со сосредоточенными массами.

Цель работы доказать единственность классического решения математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \qquad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14–01–00867).

которая возникает при описании малых вынужденных колебаний стилтьесовской струны расположенной вдоль отрезка $[0;\ell]$, с закрепленными концами, где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — начальное отклонение от положения равновесия и начальная скорость системы соответственно, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, с произвольным распределением масс (включая случай сосредоточенных масс). Здесь через $u(x,t)$ обозначено отклонение точки x от положения равновесия в момент времени t, при этом предполагается, что колебания происходят в одной плоскости, и каждая точка колеблется перпендикулярно к положению равновесия. Вторая производная по пространственной переменной в правой части уравнения в (1) понимается как производная по мере σ, которая включает в себя все особенности параметров модели — это точки, в которых имеются сосредоточенные массы, локализованы особенности (типа пружины) внешней среды, приложены сосредоточенные внешние силы. Напомним, что $M(x)$ — распределение масс, $p(x)$ — сила натяжения струны в точке x; dQ — локальный коэффициент упругости внешней среды, $f(x,t)$ — внешняя сила, приложенная в точке x в момент времени t. В таких «особых» точках ξ_i уравнение в (1) понимается следующим образом

$$\Delta M(\xi_i)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_i,t)=\Delta\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\xi_i,t)-u(\xi_i,t)\Delta Q(\xi_i,t)+f(\xi_i,t),$$

где $\Delta\varphi(\xi)=\varphi(\xi+0)-\varphi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке ξ.

Решение $u(x,t)$ задачи мы будем искать в классе E — функций непрерывных по совокупности переменных, сама функция $u(x,t)$ и ее производная $u'_x(x,t)$ при всех фиксированных x имеют непрерывные производные до второго порядка по переменной t; при каждом t $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по переменной x на отрезке $[0;\ell]$; первая производная $u'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна по переменной x для всякого фиксированного t.

Уравнение в (1) задано при всех (x,t), принадлежащих декартовому произведению множеств $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ и $[0;T]$. Первое множество строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру σ. На $[0;\ell]$ введем метрику $\varrho(x;y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Достаточно очевидно, что $([0;\ell],\varrho)$ — неполное метрическое пространство. Стандартное пополнение (с точностью до изоморфизма) приводит к множеству $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть* $Q'_\sigma(x)\geqslant 0$, $\inf p(x)>0$ *и* $M'_\sigma(x)>0$. *Тогда, математическая модель* (1) *не может иметь более одного решения, определенного на* $\overline{[0;\ell]}_\sigma\times[0;T]$, *в классе* E.

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, определенных на $\overline{[0;\ell]}_\sigma\times[0;T]$, модели (1). Тогда разность $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ является решением модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-uQ'_\sigma,\\ u(0,t)=u(\ell,t)=u(x,0)=u'_t(x,0)=0.\end{cases}\tag{2}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell}\frac{\partial u}{\partial t}\left(M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+uQ'_\sigma\right)d\sigma\,dt,\tag{3}$$

где $T^* \in (0,T]$ $((x^*,T^*)$ — точка, в которой решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ различны). Так как $u(x,t)$ удовлетворяет (2), то интеграл (3) равен нулю. Разобьём его на три

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, d\sigma\, dt, \tag{4}$$

$$-\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) d\sigma\, dt \tag{5}$$

и

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} u Q'_\sigma\, d\sigma\, dt. \tag{6}$$

В силу теоремы о замене в интеграле Стилтьеса (см., напр., [5]) и свойств функций из E, интеграл (4) допускает перезапись

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, d\sigma\, dt = \int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) dM\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right)^2\right) dM = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2 dM,$$

так как $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

Внутренний интеграл в (5) проинтегрируем по частям с учетом того, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0$ в силу краевых условий

$$-\int\limits_0^{T^*}\left(\int\limits_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) d\sigma\right) dt = -\int\limits_0^{T^*}\left(\frac{\partial u}{\partial t}p(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=\ell} - \int\limits_0^{\ell} p(x)\frac{\partial u}{\partial x} d_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\, d_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt.$$

Индекс x у дифференциала в последних двух интегралах означает, что интегрирование осуществляется по переменной x.

Покажем справедливость равенства

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x) u'_x(x,t)\, d_x\left(u'_t(x,t)\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} p(x)\left(u'_x(x,T^*)\right)^2 dx, \tag{7}$$

если $u(x,t)$ принадлежит E. В самом деле, имеем

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x) u'_x(x,t)\, d_x\left(u'_t(x,t)\right) = \int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x) u'_x(x,t)\, d_x\left(u'_t(x,t) - \int\limits_0^{x} u''_{xt}(s,t)\, ds\right) +$$

$$+\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x)u'_x(x,t)\,d_x\left(\int\limits_0^{x} u''_{xt}(s,t)\,ds\right). \quad (8)$$

Покажем, что функция $u'_t(x,t)-\int\limits_0^x u''_{xt}(s,t)\,ds$ не зависит от x (это будет означать, что первый интеграл в правой части последнего равенства равен нулю). Обозначим эту функцию через $w(x,t)$:

$$w(x,t)=u'_t(x,t)-\int\limits_0^x u''_{xt}(s,t)\,ds.$$

Проинтегрируем функцию $w(x,t)$ по переменной t в пределах от 0 до некоторого $t_0\leqslant T^*$:

$$\int\limits_0^{t_0} w(x,\tau)\,d\tau=u(x,t_0)-u(x,0)-\int\limits_0^{t_0}\int\limits_0^{x} u''_{xt}\,ds\,d\tau,$$

или, после применения теоремы Фубини и несложных преобразований, будем иметь

$$\int\limits_0^{t_0} w(x,\tau)\,d\tau=u(0,t_0)-u(0,0).$$

Из последнего равенства (в силу произвола t_0) следует равенство $w(x,t_0)=u'_t(0,t_0)$, которое и означает, что $w(x,t)$ не зависит от x. Тогда, первый интеграл в правой части равенства (8) равен нулю. Для второго интеграла имеем

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x)u'_x(x,t)\,d_x\left(\int\limits_0^{x} u''_{xt}(s,t)\,ds\right)=\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x)u'_x(x,t)u''_{xt}(x,t)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left((u'_x)^2\right)\,dx,$$

или, после применения теоремы Фубини,

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell} p(x)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left((u'_x)^2\right)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\left(\left(u'_x(x,T^*)\right)^2-\left(u'_x(x,0)\right)^2\right)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\left(u'_x(x,T^*)\right)^2\,dx,$$

так как $u'_x(x,0)=0$. Таким образом, равенство (7) доказано.

Интеграл (6), после применения теоремы Фубини, преобразуем следующим образом

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell}\frac{\partial u}{\partial t}uQ'_\sigma\,d\sigma\,dt=\int\limits_0^{\ell}\int\limits_0^{T^*}\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial t}\,dt\,dQ=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\left(u^2(x,T^*)-u^2(x,0)\right)\,dQ=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}u^2(x,T^*)\,dQ,$$

напомним, что $u(x,0)=0$.

Окончательно, интеграл (3) равен

$$\int\limits_0^{T^*}\int\limits_0^{\ell}\frac{\partial u}{\partial t}\left(M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+uQ'_\sigma\right)d\sigma\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2 dM+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,T^*)\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell}u^2(x,T^*)\,dQ. \quad (9)$$

В правой части последнего равенства, в силу условий теоремы, стоит сумма неотрицательных слагаемых, следовательно, каждое из них равно нулю, так как значение интеграла (3) равно нулю. Из равенства $\int\limits_0^{\ell}p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2 dx=0$ следует, что $\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2=0$ почти всюду (по x), а так как $u(x,T^*)$ абсолютно непрерывна, то $u(x,T^*)$ есть константа на $[0;\ell]$. Последнее, с учетом граничных условий $u(0,t)=u(\ell,t)=0$, нам дает тождество $u(x,T^*)\equiv 0$ на $[0;\ell]$. Последнее противоречит нашему предположению. Теорема доказана. □

Замечание 1. *В процессе доказательства мы показали, что для функций $u(x,t)$ из класса E смешанные производные u''_{xt} и u''_{tx} равны почти всюду.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М., 1961. — 400с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Издательство МГУ. — 1999. — 800с.

[3] Лакс П.Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. Издательство «РХД». — 2010. — 296с.

[4] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167–169.

[5] Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141.

[6] Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Покорный Ю.В. и др. — М.: Физматлит, 2009. — 192с.

[7] Покорный Ю.В. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

[8] Pokornyi Yu.V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — T. 60, № 1. — C. 108–113.

[9] Pokornyi Yu.V. An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov, A.S. Ishchenko // Mathematical Notes. — 2007. — T. 82, № 3–4. — C. 518–521.

[10] Pokornyi Yu.V. Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — T. 119, № 6. — C. 769–787.

[11] Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

[12] Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

[13] Pokornyi Y.V. On the Sturm-Liouville Problem for a Discontinuous String / Y.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. — 2004. № 2004. — С. 186.

[14] Покорный Ю.В. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров, М.Б. Давыдова // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

[15] Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

[16] Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

[17] Голованёва Ф.В. О функции Грина некоторых негладких задач / Ф.В. Голованёва // дисс.... канд. физ.-мат. наук. — 2007, Воронеж. — 102 с.

[18] Лылов Е.В. Достаточные условия применимости метода Фурье к математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Теория и техника радиосвязи. — 2012. — № 3. — С. 122–124.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, декан математического факультета Воронежского государственного университета
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D. , Doctor of physico-mathematical sciences, professor, Dean of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Шабров Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: (473)220–86–90

Меач Мон, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета
E-mail: meach_mon@yahoo.com

Meach Mon, graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University
E-mail: meach_mon@yahoo.com