УДК 517.956

ТЕОРЕМЫ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.01.2014 г.

Аннотация: в работе доказаны теоремы о композиции и об ограниченности для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра.

Ключевые слова: преобразование Фурье, весовое преобразование, весовой псевдодифференциальный оператор, композиция псевдодифференциальных операторов.

Abstract: we prove a theorem on the composition and the boundedness for a class of pseudodifferential operators with weight variable symbol, depending on the complex parameter.

Keywords: Fourier transform, weight conversion, weight pseudodifferential operator, the composition of pseudodifferential operators.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений с вырождением относятся к "неклассическим" задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. В работах В. П. Глушко [5], [6] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [7], [8]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [9], [10], Х. Леопольдом [11], С. З. Левендорским [12]. Отметим, что существенным условием работы [12] является условие принадлежности основной весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^{\infty}(R^1)$.

Дальнейшее развитие теории коэрцитивной разрешимости вырождающихся уравнений потребовало развития теории псевдодифференциальных операторов. Одним из направлений

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14–01–00867).

развития этой теории стало исследование весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [13]. Исследование весовых псевдодифференциальных операторов с постоянным символом позволило доказать коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (см. [13]). Изучение новых классов весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом позволило исследовать новые классы вырождающихся уравнений высокого порядка (см. [14], [15]).

Параболические задачи с вырождением по пространственной переменной приводятся к эллиптическим вырождающимся задачам, зависящим от комплексного параметра, для исследования которых необходимо исследовать новые классы вырождающихся псевдодифференциальных операторов с символами, зависящими от комплексного параметра. Некоторые свойства таких операторов были сформулированы в [16].

В настоящей статье получены теоремы об ограниченности и композиции одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ

Рассмотрим функцию $\alpha(t), t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1.1}$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Преобразование (1.1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{1.2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)} u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L_2(R^1_+)}, \tag{1.3}$$

что даёт возможность расширить преобразование (1.1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Легко показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), j = 1, 2, \dots, \text{ где } D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $\mathrm{H}_{s,\alpha}(R_+^n); H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,p}^2 = \int\limits_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \, |F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]|^2 \, d\xi d\eta. \tag{1.4}$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1 \leqslant l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2}\}, l = 1, 2, \dots,$$

σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1.1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор (п. д. о.) по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{1.5}$$

Определение 2. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,p}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$ - открытое множество, $p \in Q$, $Q = \{p : \ |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$- некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ - действительное число, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left|\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \frac{\partial^l}{\partial \eta^l}\lambda(p,t,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{j,l}\left(|p|^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma - l)} \tag{1.6}$$

с константами $c_{j,l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $p \in Q$, $t \in \Omega$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовые п. д. о. с символами $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ и $q(p,t,\xi,\eta)$, принадлежащими соответственно классам $S_{\alpha,p}^{m_1}(\Omega)$ и $S_{\alpha,p}^{m_2}(\Omega)$ (m_1 и m_2 — действительные числа). Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = \max\{m_1, m_2\}$. Тогда для любого $N \geqslant 0$ существует такое $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,p}^{-N}(\Omega)$, что справедливо равенство*

$$K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})Q(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1-1} R_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t}), \tag{1.7}$$

где $T_{N_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой п. д. о. с символом $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)$; $R_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой п. д. о. с символом

$$r_j(p,t,\xi,\eta) = \frac{1}{j!}\partial_\eta^j\lambda(p,t,\xi,\eta)\cdot(\alpha(t)\partial_t)^j q(p,t,\xi,\eta). \tag{1.8}$$

Теорема 2. *Пусть* $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S^{m}_{\alpha,p}(\Omega), m$ *— действительное число. Пусть выполнено условие 1 при* $\sigma = m$. *Тогда весовой п. д. о.* $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ *для любого действительного* s *есть ограниченный оператор из* $H_{s+m,\alpha}(R^n_+)$ *в* $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ О КОМПОЗИЦИИ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим весовые псевдодифференциальные операторы вида

$$K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F^{-1}_{\alpha}[\lambda(t,\xi,\eta)F_{\alpha}[u]], \tag{2.1}$$

$$Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F^{-1}_{\alpha}[q(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[u]] \tag{2.2}$$

и рассмотрим композицию этих операторов.

Так как

$$Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(t)}\, u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}]]_{\tau=\varphi(t)},$$

то

$$\begin{aligned}&K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) =\\ &\quad= \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_{\alpha}(\tau)]]]]_{\tau=\varphi(t)}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}K(p,\tau,\xi,D_{\tau})Q(p,\tau,\xi,D_{\tau})[u_{\alpha}(\tau)]\bigg|_{\tau=\varphi(t)}, \tag{2.3}$$

где

$$K(p,\tau,\xi,D_{\tau})u(\tau) = F^{-1}_{\eta\to\tau}[p,\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u(\tau)]], \tag{2.4}$$

$t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_{t}^{d} \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Определение 2.1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)$ принадлежит при всех $\xi \in R^{n-1}$ классу символов $S^{m}_{p}(\Omega_1)$, m - действительное число, $\Omega_1 \subset R^1$, если функция $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)$ принадлежит пространству $C^{\infty}(\Omega_1)$ по переменной τ и пространству $C^{\infty}(R^1)$ по переменной η. При этом для всех $j,l = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|\partial^{j}_{\tau}\partial^{l}_{\eta}\lambda(p,\tau,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}(m-l)} \tag{2.5}$$

при всех $p \in Q, \tau \in R^1, \xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1$ с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от p,τ,ξ,η.

Так как $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S^{m_1}_{\alpha,p}$, то для всех $l = 0,1,2,\ \ldots$ получим оценки

$$\left|\partial^{l}_{\eta}\lambda(p,t,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{l}(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}(m_1-l)} \tag{2.6}$$

с константами $c_l > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1$.

Заметим, что

$$(-\alpha(t)\partial_t)^{j}\lambda(p,t,\xi,\eta\,)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)} = \partial^{j}_{\tau}\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta). \tag{2.7}$$

Отсюда

$$\left|\partial^{j}_{\tau}\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\right| \leqslant c_{j}(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{m_1}{2}} \tag{2.8}$$

с константами $c_j > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1$.

Из (2.7) и (2.8) следует, что если $p(t,\xi,\eta) \in S^{m_1}_{\alpha,p}$, то $\widetilde{p}(\tau,\xi,\eta) = p(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S^{m_1}_p$.

Обозначим через B^∞совокупность таких бесконечно дифференцируемых функций $f(\tau)$ на R^1, что $f(\tau)$и все её производные ограничены на R^1.

Назовем ядром оператора $K(p,\tau,\xi,D_\tau)$ функцию $k(p,\tau,\xi,z) = F^{-1}_{\eta\to z}[\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]$ (2.9)

По аналогии с работой [17] докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* $\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S^m_p$ *(m — действительное число),* $f(\tau) \in B^\infty$. *Тогда функция*

$$h(p,\tau,\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,\tau-y)e^{-i(y-\tau)\xi}f(y)dy \tag{2.9}$$

при $\eta \to \infty$ *допускает асимптотическое разложение*

$$h(p,\tau,\xi,\eta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i)^j}{j!}\partial^j_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\cdot f^{(j)}(\tau).$$

Здесь $f^{(j)}(\tau)$ *— производная порядка* j *от функции* $f(\tau)$. *При этом для любых* $N > 0$ *найдется* $N_1 > 0$, *что функция*

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta) = h(p,\tau,\xi,\eta) - \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{(i)^j}{j!}\partial^j_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\cdot f^{(j)}(\tau) \tag{2.10}$$

принадлежит классу S^{-N}_p.

Доказательство. Запишем (2.9) в виде

$$h(p,\tau,\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z)f(\tau-z)e^{iz\eta}dz. \tag{2.11}$$

Разложим функцию $f(\tau - z)$ по формуле Тейлора в окрестности точки τ, получим

$$f(\tau-z) = \sum_{j=0}^{N_1-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(\tau)(-z)^j + g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}, \tag{2.12}$$

где

$$g_{N_1}(\tau,z) = \frac{(-1)^{N_1}}{(N_1-1)!}\int\limits_0^1 f^{(N_1)}(\tau-\theta z)(1-\theta)^{N_1-1}d\theta.$$

Применяя (2.12) в (2.11), получим

$$h(p,\tau,\xi,\eta) = \sum_{j=0}^{N_1-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z)\cdot\frac{1}{j!}(-z)^j f^{(j)}(\tau)e^{iz\eta}dz + \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z)\cdot g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz. \tag{2.13}$$

Так как

$$(-z)^j k(p,\tau,\xi,\eta) = (i)^j F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)],$$

то из (2.13) получим равенство

$$h(p,\tau,\xi,z)=\sum_{j=0}^{N_1-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i)^j\cdot\frac{1}{j!}F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]f^{(j)}(\tau)e^{iz\eta}dz+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz=\sum_{j=0}^{N_1-1}\frac{(i)^j}{j!}\partial^j_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)f^{(j)}(\tau)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz.$$

Отсюда следует, что

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz. \tag{2.14}$$

Обозначим $k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)=k(p,\tau,\xi,z)\cdot z^{N_1}$. Тогда справедливо равенство

$$k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)=z^{N_1}F^{-1}_{\eta\to z}[\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]=F^{-1}_{\eta\to z}[(\frac{1}{i}\partial_\eta)^{N_1}\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]. \tag{2.15}$$

Из (2.8), (2.14) и (2.15) при $N_1\geqslant N+m$ получим утверждение леммы 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ и $q(p,t,\xi,\eta)$, принадлежащими соответственно классам $S^{m_1}_{\alpha,p}(\Omega)$ и $S^{m_2}_{\alpha,p}(\Omega)$($m_1,m_2$ — действительные числа). $\Omega\in\bar{R}^1_+$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=\max\{m_1,m_2\}$. Тогда для любого $N\geqslant 0$ существует такое $N_1>0$ и такой символ $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)\in S^{-N}_\alpha$, что справедливо равенство*

$$K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})-\sum_{j=1}^{N_1-1}R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})=T_{N_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t}), \tag{2.16}$$

где $T_{N_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор вида (2.1) с символом $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta).R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(p,t,\xi,\eta)=\frac{1}{j!}\partial^j_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta)\cdot(\alpha(t)\partial_t)^jq(p,t,\xi,\eta). \tag{2.17}$$

Доказательство. Пусть $u(t)\in C^\infty_0(R^1_+)$, тогда в силу (2.3) получим равенство

$$K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}K(p,\tau,\xi,D_\tau)Q(p,\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}K(p,\tau,\xi,D_\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}\widetilde{u}(\eta)d\eta, \tag{2.18}$$

где $\widetilde{u}(\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$.

Из (2.18) получим равенство

$$K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [e^{i\tau\xi} K(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]]e^{-i\tau\xi} \cdot \widetilde{u}(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует, что символом оператора $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ является функция $e^{i\tau\xi}K(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]$, которую можно представить, как $r(p,\tau,\xi,\eta,\eta)$, где $r(p,\tau,\xi,\eta,y) = \int k(p,\tau,\xi,\tau-y)q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i(y-\tau)\xi}dy$.

Утверждение теоремы 2.1 следует теперь из леммы 2.1.

Утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из теоремы 2.1

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор, определённый формулой (2.1).

Заметим, что справедливо равенство

$$\|K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\|^2_{L_2(R^1_+)} = \left\|F^{-1}_{\eta\to\tau}[\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]\right\|^2_{L_2(R^1)} =$$
$$= \|K(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\|^2_{L_2(R^1)}. \quad (3.1)$$

Таким образом, норма оператора $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$в пространстве $L_2(R^1_+)$ равна норме оператора $K(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определённого в (2.4), в пространстве $L_2(R^1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S^0_{\alpha,p}(\Omega), \Omega \subset \bar{R}^1_+$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = 0$. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от p, t, ξ, u, что для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ справедлива оценка*

$$\|K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\|_{L_2(R^1_+)} \leqslant c\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Докажем вначале теорему 3.1 при следующем дополнительном предположении. Будем считать, что $p(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) = 0$ при $|\tau - a| > A$, где $A > 0$ - некоторое число, $a \in R^1$.

Рассмотрим равенство

$$f(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\eta}\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]d\eta.$$

Перейдем в этом равенстве к преобразованию Фурье, получим равенство

$$\widetilde{f}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\lambda}_1(p,z-\eta,\xi,\eta)\widetilde{u}_\alpha(\eta)d\eta, \quad (3.3)$$

где $\lambda_1(p,\tau,\xi,\eta) = \lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta), \widetilde{\lambda}_1(p,z,\xi,\eta) = F_{\tau\to z}[\lambda_1(p,\tau,\xi,\eta)]$,

$$\widetilde{u}_\alpha(\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)].$$

С помощью интегрирования по частям в интеграле

$$\widetilde{\lambda}_1(p,z,\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z}\lambda_1(p,\tau,\xi,\eta)d\tau$$

легко устанавливается, что с некоторыми константами $c > 0$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{\lambda}_1(p,z-\eta,\xi,\eta)\right|d\eta \leqslant c\int\frac{d\eta}{(1+|\eta|)^2};\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{\lambda}_1(p,z-\eta,\xi,\eta)\right|dz \leqslant c\int\frac{dz}{(1+|z|)^2}.$$

Отсюда и из (3.3) получаем оценку

$$\left\|\widetilde{f}(z)\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c\left\|u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)}. \tag{3.4}$$

Заметив, что

$$\left\|u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} = \left\|u(t)\right\|_{L_2(R^1_+)}, \tag{3.5}$$

получаем из (3.4) утверждение теоремы 3.1 при дополнительном предположении.

Докажем теорему 3.1 в общем случае. Выберем некоторое $A > 0$ и установим, что для любого $a \in R^1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\left|K(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\right|^2 d\tau \leqslant c\{\int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A}\left|u_\alpha(\tau)\right|^2 d\tau + \int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau-y)\left|u(y)\right|dy)^2 d\tau\}, \tag{3.6}$$

где $g(z) = (1+|z|)^{-2}$. Константа c не зависит от выбора функции $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ и $a \in R^1$. Пусть $\varphi(\tau)$ - такая основная функция с носителем в шаре $|\tau| \leqslant 3A$, что $\varphi(\tau) = 1$ в шаре $|\tau| \leqslant 2A$, причём, $|\varphi(\tau)| \leqslant 1$. Тогда для оператора $\varphi(\tau-a)P(\tau,\xi,D_\tau)$ символ равен нулю при $|\tau-a| > 3A$ и мы можем воспользоваться доказанной выше оценкой:

$$\left\|\varphi(\tau-a)K(p,\tau,\xi,D_\tau)v_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c\left\|v_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} = c\left\|v(t)\right\|_{L_2(R^1_+)}, \tag{3.7}$$

причём из предыдущих рассуждений видно, что c не зависит от $v(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ и $a \in R^1$.

Обозначим $f(\tau) = K(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)$ и заметим, что при $|\tau-a| \leqslant 2A$ справедливо равенство

$$f(\tau) = \varphi(\tau-a)K(p,\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)] + K(p,\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)].$$

В силу неравенства (3.7) получим, что

$$\left\|\varphi(\tau-a)K(p,\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)]\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c\left\|\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)},$$

следовательно

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\left|\lambda(p,\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)]\right|^2 d\tau \leqslant c\int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A}\left|u_\alpha(\tau)\right|^2 d\tau. \tag{3.8}$$

Так как $1-\varphi(\tau-a)$=0 в шаре $|\tau-a| \leqslant 2A$, то

$$K(p,\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)] = \int\limits_{|y-a|>2A} k(p,\tau,\xi,\tau-y)(1-\varphi(y-a))u_\alpha(y)dy,$$

где $k(p,\tau,\xi,z)$ — ядро псевдодифференциального оператора $K(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определенное в (2.9).

Заметим, что если $\lambda(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta) \in S_p^m$, то функция $z^p \partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)$ для любых i, j при $l > m + j + 1$ будет непрерывной и ограниченной функцией при всех $\tau \in R^1, z \in R^1, p \in Q$. То есть при всех $z \neq 0$ справедливо неравенство

$$\left|\partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)\right| \leqslant c_{ij} \left|z\right|^{-l}. \tag{3.9}$$

Из (3.9) получим, что $|k(p, \tau, \xi, \tau - y)| \leqslant c(1 + |\tau - y|)^{-2}$ при $|\tau - y| \geqslant A$. Отсюда при $|\tau - a| \geqslant A$ получаем, что

$$|K(p, \tau, \xi, D_\tau)[(1 - \varphi(\tau - a))u_\alpha(\tau)]| \leqslant c \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - y|)^{-2} \left|u(y)\right| dy. \tag{3.10}$$

Неравенство (3.6) получается теперь из неравенств (3.8) и (3.10).

Чтобы закончить теперь доказательство теоремы, достаточно в неравенстве (3.6) выбрать $A = 1$ и просуммировать неравенства (3.6) по всем a, принадлежащим множеству целых чисел. Так как отрезки $|\tau - a| \leqslant 1$ покрывают все R^1, причем, каждая точка $\tau \in R^1$ принадлежит не более чем двум таким отрезкам, то получим, что с некоторой константой выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|P(\tau, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)\right|^2 d\tau \leqslant c(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - y|)^{-2} \left|u_\alpha(y)\right| dy)^2 d\tau).$$

Остается заметить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - y|)^{-2} \left|u_\alpha(y)\right| dy)^2 d\tau) \leqslant c \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|u_\alpha(\tau)\right|^2 d\tau = c \int\limits_{0}^{\infty} \left|u(t)\right|^2 dt.$$

Теорема 3.2. *Пусть $\lambda(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha,p}^m(\Omega)$ (m — действительное число), $\Omega \subset \bar{R}_+^1$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = m$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $K(p, t, \xi, D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R_+^1)$ в $H_{s,\alpha}(R_+^1)$.*

Доказательство. Из (3.1) вытекает, что для доказательства теоремы достаточно доказать, что оператор $K(p, \tau, \xi, D_\tau)$, определённый в (2.4), является ограниченным оператором из $H_{s+m}(R^1)$ в $H_s(R^1)$.

Обозначим через $\Lambda^s(p, D_\tau)$ псевдодифференциальный оператор вида

$$\Lambda^s(p, D_\tau)u_\alpha(\tau) = F_{\eta\to\tau}^{-1}[(|p|^2 + \eta^2)^{\frac{s}{2}} F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]. \tag{3.11}$$

Заметим, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ справедливо равенство

$$\left\|K(p, \tau, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)\right\|_s = \left\|\Lambda^s(p, D_\tau)K(p, \tau, \xi, D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p, D_\tau)v(\tau)\right\|_{L_2(R^1)}, \tag{3.12}$$

где $v(\tau) = \Lambda^{s+m}(p, D_\tau)u_\alpha(\tau)$, $\left\|\cdot\right\|_s$ - норма в пространстве $H_s(R^1)$, зависящая от параметра p.

Из теоремы 2.1 следует, что $\Lambda^s(p, D_\tau)K(p, \tau, \xi, D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p, D_\tau)$ есть псевдодифференциальный оператор с символом из класса S_p^0. Таким образом, из (3.12) в силу теоремы 3.1 получим

$$\left\|P(\tau, \xi, D_{\alpha,t})u\right\|_{s,\alpha} = \left\|P(\tau, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)\right\|_s \leqslant c \left\|v(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c \left\|u(t)\right\|_{s+m,\alpha}.$$

Теорема 3.2 доказана.

Теорема вытекает теперь из теоремы 3.2, если воспользоваться равенством Парсеваля и равенством (1.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

[2] Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

[3] Михлин С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

[4] Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

[5] Глушко В. П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В. П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, вып. 3. — С. 87–88.

[6] Глушко В. П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В. П. Глушко // Труды Московского математического общества. — 1970. — Т. 23. — С. 113–178.

[7] Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

[8] Вишик М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

[9] Глушко В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — № 2. — С. 49–68.

[10] Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

[11] Леопольд Х. Г. Априорные оценки для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с невырождающейся второй производной / Х. Г. Леопольд. — Новосибирск, 1981. — 33 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.08.81, № 4269–81.

[12] Левендорский С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сб. — 1980. — Т. 111 (153), вып. 4. — С. 483–501.

[13] Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

[14] Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240с.

[15] Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

[16] Баев А. Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Докл. Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 1–4.

[17] Грушин В. В. Псевдодифференциальные операторы / В. В. Грушин. — М. : Моск. ин-т электронного машиностроения, 1975. — 107с.

Баев Александр Дмитриевич, декан математического факультета Воронежского государственного университета
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D. , Dean of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Ковалевский Ростислав Александрович, магистр математического факультета Воронежского государственного университета
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Kovalevsky Rostislav A., master student Faculty of Mathematics, Voronezh State University
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru