УДК 621.91

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И АПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СТАТИСТИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

И. Ю. Бутусов[1], **А. Е. Гриднев**[2], **Ю. Н. Перин**[2]

[1] *Воронежский государственный университет инженерных технологий*
[2] *Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 09.12.2013 г.

Аннотация: получены частотные характеристики колебательных и апериодических динамических систем с нормальным распределением времени запаздывания реакции на внешнее воздействие.

Ключевые слова: частотные характеристики, динамическая система, время запаздывания, функция Гаусса, дисперсия.

Abstract: frequency characteristics of oscillating and aperiodic dynamical systems with normally distribution for the delay time of reaction on external action were obtained.

Keywords: frequency characteristics, dynamical system, delay time, Gaussian distribution, dispersion.

ВВЕДЕНИЕ

Колебательные и апериодические динамические системы применяются в радиотехнических устройствах, измерительных приборах и датчиках, в физических и технических установках различного назначения.

Колебательная система с запаздыванием описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\omega_0^{-2}\frac{d^2y}{dt^2} + 2r\omega_0^{-2}\frac{dy}{dt} + y = kz, \tag{1}$$

$$z = x\,(t-\tau)\,, \tag{2}$$

где k — коэффициент усиления, r — коэффициент затухания, ω_0 — круговая частота собственных колебаний системы, τ — время запаздывания. Внешнее воздействие на систему и её реакция на это воздействие являются функциями времени t:

$$x = x\,(t)\,, \quad y = y\,(t)$$

При наличии запаздывания аргумент функции x уменьшается на величину τ.

Апериодическая система с запаздыванием описывается, как известно, следующим уравнением:

$$T\frac{dy}{dt} + y = kz, \tag{3}$$

где T — постоянная времени, остальные величины определены выше.

Существуют динамические системы, которые характеризуются средней величиной времени запаздывания. Например, при горении жидкого топлива в энергетических установках энергия выделяется через некоторый интервал времени после поступления очередной порции топлива в зону горения. Процесс преобразования исходных веществ в продукты горения растянут во времени, так как не все молекулы одновременно вступают в реакцию. Этот процесс характеризуется средней величиной времени запаздывания и статистическим распределением событий во времени. Другим примером динамической системы со средней величиной времени запаздывания и статистическим распределением событий по времени являются запаздывающие нейтроны, которые образуются наряду с мгновенными нейтронами в результате деления ядер урана в процессе размножения нейтронов в некоторых типах ядерных реакторов на тепловых нейтронах; их время запаздывания находится в пределах от долей секунды до нескольких секунд и среднее время запаздывания около 12 секунд [1]. Имеется ряд физических и технических динамических систем с таким типом запаздывания.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИИ ГАУССА

Для дальнейшего рассмотрения представим величину z в следующем виде:

$$z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\left(\theta\right)\delta\left[\theta - (t-\tau)\right]d\theta, \tag{4}$$

где использована дельта-функция, которая обладает следующим свойством [2]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\theta\right)\delta\left[\theta - C\right]d\theta = f\left(C\right). \tag{5}$$

Здесь f — непрерывная функция. Выражение (5) получено с помощью (4) и для этого принято:

$$f\left(\theta\right) = x\left(\theta\right), \quad C = \left(t-\tau\right).$$

Норма дельта-функции равна единице.

При рассмотрении динамических систем, в которых события распределены во времени и поэтому характеризуются средней величиной времени запаздывания, необходимо вместо дельта-функции использовать другую функцию. Дельта-функция обычно используется при решении задач, в которых рассматриваются сосредоточенные в одной точке физические величины, так как дельта-функция отлична от нуля только в одной точке с нулевым значением ее аргумента. Если нет такого сосредоточения, то необходимо вместо дельта-функции использовать статистическую функцию распределения.

Для учета влияния распределения событий во времени на частотные характеристики динамических систем вместо дельта-функции применим в (4), (5) функцию распределения Гаусса:

$$\psi\left(v\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-0,5\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2\right], \tag{6}$$

где σ — дисперсия.

Величина дисперсии должна определяться экспериментально для каждой конкретной динамической системы.

Функция Гаусса четная, ее норма равна единице и она обладает следующим свойством [2]:

$$\lim_{\sigma\to 0}\psi\left(v\right) = \delta\left(v\right). \tag{7}$$

Таким образом, вместо выражения (4) далее используем следующее выражение:

$$z^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,(\theta)\psi\,[\theta - (t-\tau)]\,d\theta. \tag{8}$$

Здесь и далее τ — средняя величина времени запаздывания динамической системы; ее численное значение должно определяться экспериментально для каждой конкретной динамической системы.

Согласно (4), (7), (8)

$$\lim_{\sigma \to 0} z^* = z. \tag{9}$$

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В качестве функций для внешнего воздействия и реакции системы используем следующие представления (как это обычно делается при расчете частотных характеристик):

$$x\,(t) = x_0 \exp\,(i\omega t)\,, \quad y\,(t) = y_0 \exp\,(i\omega t)\,, \tag{10}$$

где x_0, y_0 — постоянные величины, i — мнимая единица, ω — круговая частота вынужденных колебаний.

Из (6), (8), (10) следует:

$$z^* = \frac{x_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\,(i\omega t) \exp\left[-0,5\left(\frac{\theta-(t-\tau)}{\sigma}\right)^2\right] d\theta. \tag{11}$$

Введем новую переменную v и воспользуемся формулой Эйлера:

$$v = \theta - (t-\tau)\,,$$

$$\exp\,(i\omega t) = \cos\,(\omega t) + i \sin\,(\omega t)\,.$$

Тогда имеем

$$z^* = \frac{x_0 \exp\,(ivt)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\,(-i\omega t)\,(J_1 + J_2)\,,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\,(\omega t) \exp\left[-0,5\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2\right] dv,$$

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\,(\omega t) \exp\left[-0,5\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2\right] dv$$

Значение второго интеграла равно нулю, так как в нем подинтегральная функция нечетная. В первом интеграле подинтегральная функция четная и его значение определено по таблицам [3]:

$$J_1 = \sigma\sqrt{2\pi} \exp\left[-0,5\,(\omega \cdot \sigma)^2\right].$$

Таким образом, получаем

$$z^* = x_0 \exp\,[i\omega\,(t-\tau)] \cdot a\,(\omega,\sigma)\,, \tag{12}$$

$$a\left(\omega,\sigma\right)=\exp\left[-0,5\left(\omega\cdot\sigma\right)^{2}\right]. \tag{13}$$

Для величины z согласно (6) и (11) имеем

$$z^{*}=x_{0}\exp\left[i\omega\left(t-\tau\right)\right]. \tag{14}$$

Из (12) и (14) следует

$$z^{*}=a\left(\omega,\sigma\right)\cdot z. \tag{15}$$

Если величина дисперсии равна нулю (нет распределения событий по времени, все события происходят одновременно), то из (13) получаем

$$a\left(\omega,0\right)=1 \tag{16}$$

При увеличении величины σ величина $a\left(\omega,\sigma\right)$ уменьшается.

Согласно (15) и (16)

$$\lim_{\sigma\to 0} z^{*}=z$$

и равенство (9) подтверждается.

Из (15) следует, что выражение (12) для z^{*} является более общим по сравнению с (14) для z. Выражение (12) учитывает распределение событий во времени. Поэтому в (2) и соответственно в правых частях уравнений (1) и (3) далее вместо z используется z^{*}.

Уравнения (1) и (3) с использованием (10) и (12) преобразуются и в результате имеем

$$\frac{x_{0}\exp\left(i\omega t\right)}{y_{0}\exp\left(i\omega t\right)}=\frac{k\cdot a\left(\omega,\sigma\right)}{u+iw}\exp\left(-i\omega\tau\right), \tag{17}$$

где введены величины u и w:
для колебательной системы

$$u=1-\omega^{2}\omega_{0}^{-2},\quad w=2r\omega\omega_{0}^{-2}; \tag{18}$$

для апериодической системы

$$u=1,\quad w=\omega T. \tag{19}$$

После преобразований выражений с комплексными величинами и с использованием (10) из (17) получаем выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики с запаздыванием:

$$K=\frac{y}{x}=A^{*}\exp\left(i\varphi\right)\cdot\exp\left(i\Delta\varphi\right). \tag{20}$$

Здесь $\varphi=-arctg\frac{w}{u}$ (21)
– фазо-частотная характеристика динамической системы без учета запаздывания;

$$\Delta\varphi=-\omega\tau \tag{21}$$

– дополнительный сдвиг по фазе, который пропорционален среднему значению времени запаздывания;

$$A=k\cdot\left[u^{2}+w^{2}\right]^{-0,5} \tag{22}$$

– амплитудно-частотная характеристика динамической системы без учета запаздывания;

$$A^{*}=a\left(\omega,\sigma\right)\cdot A \tag{23}$$

– амплитудно-частотная характеристика для динамической системы с распределенными во времени событиями.

При равной нулю дисперсии согласно (16) величины A и A^* совпадают. Выражения (20-24) применимы для обеих рассматриваемых динамических систем (с соответствующими величинами u и w согласно (18) и (19).).

Выражение (23) получено для динамических систем с распределенными во времени событиями и со средней величиной времени запаздывания на основе применения функции Гаусса в качестве функции распределения. Величина $a(\omega, \sigma)$ является переменным коэффициентом в правой части выражения (23). Согласно (13) с увеличением частоты ω величина этого коэффициента уменьшается, поэтому амплитуды A^* меньше амплитуд A и разница между ними возрастает с увеличением частоты. Это обстоятельство может привести к расширению области устойчивой работы динамических систем со статистически распределенным временем запаздывания внешнего воздействия на динамическую систему.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе модели статистического распределения времени запаздывания с применением функции Гаусса получены аналитические выражения для всех частотных характеристик колебательных и апериодических динамических систем. Установлено, что с увеличением величины дисперсии амплитуды колебаний уменьшаются, что может привести к расширению области устойчивости рассмотренных динамических систем. Фазовые частотные характеристики не зависят от величины дисперсию

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Левин В.Е. Ядерные реакторы / В.Е. Левин. — М.: Госатомиздат, 1963. — 304 с.

[2] Маделунг Э. Математический аппарат физики / Э. Маделунг. — М.: Физматгиз, 1960. — 518 с.

[3] Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. — М.: Наука, 1973. — 228 с.

Бутусов И.Ю., кандидат технических наук, доцент кафедры физики, Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: phys@vgta.vrn.ru
Тел.: +7(473) 255-63-47

Гриднев А.Е., ассистент кафедры общей физики, Воронежский государственный университет
E-mail: aegridnev@mail.ru
Тел.: +7(473) 2-208-281

Перин Ю.Н., ассистент кафедры общей физики, Воронежский государственный университет
E-mail: kof134@phys.vsu.ru
Тел.: +7(473) 2-208-281

Butusov I.Yu., Candidate of Technical Sciences, Associated Professor, Department of Physics, Voronezh State University of Engineering Technology
E-mail: phys@vgta.vrn.ru
Tel.: +7(473) 255-63-47

Cridnev A.E., assistant, Department of General Physics, Voronezh State University
E-mail: aegridnev@mail.ru
Tel.: +7(473) 2-208-281

Perin Yu.N., assistant, Department of General Physics, Voronezh State University
E-mail: kof134@phys.vsu.ru
Tel.: +7(473) 2-208-281