УДК 517.95

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 20.07.2012 г.

Аннотация: рассматриваются вопросы корректности, непрерывной зависимости и дифференцируемости в смысле Гато по малым параметрам обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором произвольной натуральной степени.

Ключевые слова: смешанная задача, нелинейное дифференциальное уравнение, обобщенная разрешимость, непрерывная зависимость, дифференцируемость решения по малым параметрам.

Abstract: in this article we consider the questions of correctness, continuously dependence and differentiability in the Gateaux sense with respect to small parameters of generalized solution of mixed value problem for nonlinear partial differential equation with pseudoparabolic operator of arbitrary natural power.

Keywords: mixed value problem, nonlinear partial differential equation, generalized solvability, continuously dependence, differentiability with respect to small parameters.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачи, которые по одной переменной являются начальными, а по другим переменным - краевыми, называются смешанными. Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [1]. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теория струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков [2]. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков. Дифференциальных уравнений более высоких порядков необходимо решать и при построении инвариантных решений дифференциальных уравнений с использованием высшей симметрии и законов сохранения.

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (-1)^m \nu \frac{\partial^{2m+1}}{\partial t \partial x^{2m}} + \nu\mu \frac{\partial^{4m+1}}{\partial t \partial x^{4m}} + \frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^n u(t,x) = f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),$$
$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_j(x),\ j=\overline{2,n} \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}u(t,x)_{|x=0}=$$
$$=u(t,x)_{|x=l}\,u_{xx}(t,x)_{|x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}u(t,x)_{|x=l}=0, \tag{3}$$

где $f(t,x,u)\in C(D\times R)$, $\varphi_j(x)\in C^{4mn+1}(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=\varphi_j''(x)_{|x=l}=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|x=l}=0$, $j=\overline{1,n}$, $D\equiv D_T\times D_l, D_T\equiv[0,T], D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $0<\nu,\mu$ — малые параметры, n,m — натуральные числа.

Следует отметить, что изучению линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ и при этом применены разные методы (см., напр. [3-8]). Метод Фурье разделения переменных для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка обоснован во многих работах, в частности в [8]. В работе [9] методом Фурье разделения переменных изучены вопросы разрешимости для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка. В работе [10] рассмотрены нелинейные уравнения с параболическим оператором высокой степени. В данной работе рассматриваются вопросы корректности, непрерывной зависимости и дифференцируемости по малым параметрам обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором произвольной натуральной степени и при этом используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)-(3) в виде предела

$$u(t,x,\nu,\mu)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}a_i(t,\nu,\mu)\cdot b_i(x), \tag{4}$$

где $b_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x, \lambda_i=\frac{i\pi}{l}$.

Применение ряда Фурье в виде (4) и использование интегрального тождества типа Ладыженской позволяет нам отказаться от непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1). Кроме того, такой подход позволяет свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Поскольку ССНИУ замкнуты, и их практически невозможно разрешить, предлагается рассматривать укороченную систему нелинейных интегральных уравнений.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

Множество $\{a(t)=(a_i(t))|a_i(t)\in C(D_T),\ i=\overline{1,N}\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_p^N(T)}=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\max_{t\in D_T}|a_i(t)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}},p>1$$

становится банаховым пространством и обозначается через $B_p^N(T)$. Наряду с этим пространством также рассмотрим банахово пространство $B_p(T)$ с нормой

$$\|a(t)\|_{B_p(T)}=\left[\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(\max_{t\in D_T}|a_i(t)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Для каждого элемента $a(t) \in B_p(T)$ определяется оператор:

$$Qa(t) = u(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_i(t) \cdot b_i(x).$$

Обозначено через $E_p(D)$ множество значений оператора Q. Здесь очевидно, что $Q : B_p(T) \to E_p(D)$ и $E_p(D) \subset L_p(D)$.

Обозначается через $W_p^{(k)}(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)$, $\ldots, \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}\Phi(t,x)$ при фиксированном $t \in D_T$ принадлежат области определения оператора $-\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial x^{4nm-2}}$, имеют обобщенные производные порядка k по t в смысле Соболева, принадлежащие $L_p(D)$, и обращаются в нуль при $t \geqslant T - \delta$ ($0 < \delta$ — зависит от $\Phi(t,x)$), где

$$L_{p,q}(D) = \left\{ u(t,x) : \left[\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^l |u(t,x)|^p\, dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ясно, что пространство $W_p^{(k)}(D)$ всюду плотно в пространстве $L_p(D)$.

3. СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)-(3) К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для функций из $W_p^{(k)}(D)$ справедливы соотношения

$$\lim_{t\to T} \int\limits_0^l \Phi(t,y)dy = \lim_{t\to T} \int\limits_0^l \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial t} dy = \ldots = \lim_{t\to T} \int\limits_0^l \frac{\partial^{n-1}\Phi(t,y)}{\partial t^{n-1}} dy = 0 \text{ при } k = n.$$

Определение. Если функция $u(t,x,\nu,\mu) \in E_p\left(D \times [0,\alpha_0] \times [0,\beta_0]\right)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ u(t,y,\nu,\mu) \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Phi + n\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m+2}}\Phi + \ldots + \right.\right.$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm-1}}{\partial t\partial y^{4nm-2}}\Phi + \frac{\partial^{4nm}}{\partial y^{4nm}}\Phi + \nu\left(\frac{\partial^{n+2m}}{\partial t^n\partial y^{2m}}\Phi + n\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{6m}}\Phi + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m+2}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm+2m-1}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi \right) +$$
$$+ \nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^n\partial y^{4m}}\Phi + n\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{8m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m+2}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi + \right.$$
$$\left.\left.\left. + n\frac{\partial^{4nm+4m-1}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi \right) \right] - f\Phi \right\} dydt = \int\limits_0^l \varphi_1(y) \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi + n\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi + \right.$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m+2}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\partial y^{4nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi +$$
$$+ \nu\left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi + n\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m+2}}\Phi + \ldots + \right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\bigg)+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m}}\Phi+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+\ n\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int\limits_0^l\varphi_2(y)\left[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi+n\frac{\partial^{n+4m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m}}\Phi+\ \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{4m+2}}\Phi+\ldots+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm-5}}{\partial t\partial x^{4nm-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-4}}{\partial x^{4nm-4}}\Phi+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{2m}}\Phi+\right.$$

$$+n\frac{\partial^{n+6m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-4}\partial^{6m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm+2m-5}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-6}}\Phi+$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-4}}{\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi\right)+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{8m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm+4m-5}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-6}}\Phi+$$

$$\left.\left.+\ \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-4}}{\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+\ldots-\int\limits_0^l\varphi_{n-2}(y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+n\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4m+2}}{\partial y^{4m+2}}\Phi+\nu\left(\frac{\partial^{2m+2}}{\partial t^2\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m+1}}{\partial t\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{6m+2}}{\partial y^{6m+2}}\Phi\right)+$$

$$\left.+\nu\mu\left(\frac{\partial^{4m+2}}{\partial t^2\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m+1}}{\partial t\partial y^{8m}}\Phi+\ \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{8m+2}}{\partial y^{8m+2}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+\int\limits_0^l\varphi_{n-1}(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$

$$\left.+\nu\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\right)+\nu\mu\left(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int\limits_0^l\varphi_n(y)\left[\Phi+\nu\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\nu\mu\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=0}dy$$

для любого $\Phi(t,x)\in W_p^{(n)}(D)$,то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).

Приближенное решение смешанной задачи ищем в виде

$$u^N(t,x,\nu,\mu)=\sum_{i=1}^N a_i(t,\nu,\mu)\cdot b_i(x). \tag{5}$$

Покажем, что коэффициенты разложения $a_i(t,\nu,\mu)$ решения смешанной задачи (1)-(3) удовлетворяют следующей системе нелинейных интегральных уравнений (СНИУ):

$$a_i(t,\nu,\mu)=w_i(t,\nu,\mu)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Q^Na(s,\nu,\mu)\right)b_i(y)P_i(t,s,\nu,\mu)dyds, \tag{6}$$

где

$$w_i(t,\nu,\mu)=\sum_{k=1}^n\varphi_{ki}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^n\theta_{1i}^{j-k}(\nu,\mu)\frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)t\right\},$$

$$P_i(t,s,\nu,\mu)=\frac{(n-1)!(t-s)^{n-1}}{\theta_{0i}^n(\nu,\mu)}\exp\left\{-\theta_{1i}^{(}\nu,\mu)(t-s)\right\},$$

$$\theta_{1i}^n(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^{4nm}}{\theta_{0i}^n(\nu,\mu)},\quad \theta_{0i}^n(\nu,\mu)=\left(1+\nu\lambda_i^{2m}+\nu\mu\lambda_i^{4m}\right)^n,$$

$$Q^N a(t,\nu\mu)=u^N(t,x,\nu,\mu)=\sum_{i=1}^{N}a_i(t,\nu,\mu)\cdot b_i(x).$$

С учетом (5), в силу того, что $\Phi=\Phi_j(t,x)=h(t)b_j(x)\in W_p^{(n)}(D)$ в определении и $b_j(x)$полны и ортонормированны в $L_p(D_l)$, где $0\neq h(t)\in C^n(D_T)$, $j=\overline{1,N}$ следует

$$\int_0^T h(t)\Big[a_i^{(n)}(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{4m}a_i^{(n-1)}(t,\nu,\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4m+2}a_i^{(n-2)}(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4m+4}a_i^{(n-3)}(t,\nu,\mu)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm-6}a_i'''(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm-4}a_i''(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{4nm-2}a_i'(t,\nu,\mu)+\lambda_i^{4nm}a_i(t,\nu,\mu)+$$

$$+\nu\Big(\lambda_i^{2m}a_i^{(n)}(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{6m}a_i^{(n-1)}(t,\nu,\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{6m+2}a_i^{(n-2)}(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{6m+4}a_i^{(n-3)}(t,\nu,\mu)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+2m-6}a_i'''(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+2m-4}a_i''(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{4nm+2m-2}a_i'(t,\nu,\mu)\Big)+$$

$$+\nu\mu\Big(\lambda_i^{4m}a_i^{(n)}(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{8m}a_i^{(n-1)}(t,\nu,\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{8m+2}a_i^{(n-2)}(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{8m+4}a_i^{(n-3)}(t,\nu,\mu)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+4m-6}a_i'''(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+4m-4}a_i''(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{4nm+4m-2}a_i'(t,\nu,\mu)\Big)-$$

$$-\int_0^l f\left(t,y,Q^N a(t,\nu,\mu)\right)\cdot b_i(y)dy\Big]dt=0. \tag{7}$$

Так как $h(t)$ — любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, то $a_i(t,\nu,\mu)$ имеет обобщенные производные порядка n по t в смысле Соболева на отрезке D_T. Поскольку $h(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (7) следует

$$a_i^{(n)}(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{4m}a_i^{(n-1)}(t,\nu,\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4m+2}a_i^{(n-2)}(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4m+4}a_i^{(n-3)}(t,\nu,\mu)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm-6}a_i'''(t,\nu,\mu)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm-4}a_i''(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{4nm-2}a_i'(t,\nu,\mu)+\lambda_i^{4nm}a_i(t,\nu,\mu)+$$

$$+\nu\left(\lambda_i^{2m}a_i^{(n)}(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{6m}a_i^{(n-1)}(t,\nu,\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{6m+2}a_i^{(n-2)}(t,\nu,\mu)+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{6m+4}a_i^{(n-3)}(t,\nu,\mu)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+2m-6}a_i'''(t,\nu,\mu)+$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+2m-4}a_i''(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{4nm+2m-2}a_i'(t,\nu,\mu)\right)+$$

$$+\nu\mu\left(\lambda_i^{4m}a_i^{(n)}(t,\nu,\mu)+n\lambda_i^{8m}a_i^{(n-1)}(t,\nu,\mu)+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{8m+2}a_i^{(n-2)}(t,\nu,\mu)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{8m+4}a_i^{(n-3)}(t,\nu,\mu)+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+4m-6}a_i'''(t,\nu,\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+4m-4}a_i''(t,\nu,\mu)+$$

$$\left.+n\lambda_i^{4nm+4m-2}a_i'(t,\nu,\mu)\right)=\int_0^l f\left(t,y,Q^N a(t,\nu,\mu)\right)\cdot b_i(y)dy. \qquad (8)$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$a_i(t,\nu,\mu)=\left(C_{1i}+C_{2i}t+C_{3i}t^2+C_{4i}t^3+\ldots+C_{ni}t^{n-1}\right)\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)t\right\}+$$

$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q^N a(s,\nu,\mu)\right)b_i(y)P_i(t,s,\nu,\mu)dyds,\, t\in D_T, \qquad (9)$$

где

$$P_i(t,s,\nu,\mu)=\frac{(n-1)!(t-s)^{n-1}}{\theta_{0i}^n(\nu,\mu)}\cdot\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\right\},$$

$$\theta_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^{4m}}{\theta_{0i}(\nu,\mu)},\theta_{0i}^n(\nu,\mu)=\left(1+\nu\lambda_i^{2m}+\nu\mu\lambda_i^{4m}\right)^n.$$

Для определения коэффициентов C_{ji} $(j=\overline{1,n})$, в (9) используются условия $a_i(0,\nu,\mu)=\varphi_{1i}, a_i'(0,\nu,\mu)=\varphi_{2i}, a_i''(0,\nu,\mu)=\varphi_{3i},...,\quad a_i^{(n-1)}(0,\nu,\mu)=\varphi_{ni}$. При этом начальные данные φ_{ji} подбираются из (2) так, что суммы

$$\varphi_j^N(x)=\sum_{i=1}^N\varphi_{ji}b_i(x),(j=\overline{1,n})$$

аппроксимируют при $N\to\infty$ функции $\varphi_j(x)\in L_p(D_l),(j=\overline{1,n})$.

4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СНИУ (6)

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\displaystyle\int_0^T\left\|f\left(t,x,Q^N w(t,\nu,\mu)\right)\right\|_{L_p(D_l)}dt\leqslant\Delta<\infty$;

2. $|f(t,x,u)-f(t,x,\vartheta)|\leqslant L(t,x)\,|u-\vartheta|$, где $\displaystyle 0<\int_0^t\|L(s,x)\|_{L_p(D_l)}\,ds<\infty$;

3. $\|w(t,\nu,\mu)\|_{B_p^N(T)} < \infty$.
Тогда СНИУ (6) имеет единственное решение в пространстве $B_p^N(T)$.
Доказательство. Используется метод последовательных приближений:

$$a_i^0(t,\nu,\mu) = w_i(t,\nu,\mu), t \in D_T, a_i^{k+1}(t,\nu,\mu) = w_i(t,\nu,\mu)+ \\ + \int_0^t \int_0^l f\left(s,y,Q^N a^k(s,\nu,\mu)\right) b_i(y) P_i(t,s,\nu,\mu) dyds, k = 0,1,2,3,..., t \in D_T. \quad (10)$$

Учет условий теоремы в (10) дает оценки

$$\left\|a^1(t,\nu,\mu) - a^0(t,\nu,\mu)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \Delta, \quad (11)$$

$$\left\|a^2(t,\nu,\mu) - a^1(t,\nu,\mu)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant M_{1,N} M_{2,N}^2 \int_0^t \int_0^l L(s,y) \left\|a^1(s,\nu,\mu) - a^0(s,\nu,\mu)\right\|_{B_p^N(T)} dyds \leqslant$$

$$\leqslant \Delta M_{1,N}^2 M_{2,N}^3 l^{\frac{2}{q}} \int_0^t \|L(s,x)\|_{L_p(D_l)} ds, \quad (12)$$

где

$$M_{1,N} = \|P(t,s,\nu,\mu)\|_{B_p^N(T)}, \quad M_{2,N} = \|b(x)\|_{B_p^N(l)}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа k, подобно (12) получаем

$$\left\|a^{k+1}(t,\nu,\mu) - a^k(t,\nu,\mu)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant \left(M_{1,N} l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} M_{2,N}^{2k+1} \Delta \frac{\left[\int_0^t \|L(s,x)\|_{L_p(D_l)} ds\right]^k}{k!}. \quad (13)$$

Существование решения СНИУ (6) следует из оценки (13), так как при $k \to \infty$ последовательность функций $\left\{a^k(t,\nu,\mu)\right\}_{k=1}^{\infty}$сходится равномерно по t к функции $a(t,\nu,\mu) \in B_p^N(T)$. Для проведения доказательства единственности этого решения в пространстве $B_p^N(T)$ предполагается, что СНИУ (6) имеет два решения: $a(t,\nu,\mu) \in B_p^N(T)$ и $\vartheta(t,\nu,\mu) \in B_p^N(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\|a(t,\nu,\mu) - \vartheta(t,\nu,\mu)\|_{B_p^N(T)} \leqslant \\ \leqslant M_{1,N} M_{2,N}^2 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \|L(s,x)\|_{L_p(D_l)} \|a(s,\nu,\mu) - \vartheta(s,\nu,\mu)\|_{B_p^N(T)} ds. \quad (14)$$

Применение к (14) неравенства Гронуолла-Беллмана, дает, что

$$\|a(t,\nu,\mu) - \vartheta(t,\nu,\mu)\|_{B_p^N(T)} \equiv 0$$

для всех $t \in D_T$. Отсюда следует единственность решения СНИУ (6) в пространстве $B_p^N(T)$.

5. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)-(3)

Подстановка СНИУ (6) в предел (4) дает формальное решение смешанной задачи (1)-(3)

$$u(t,x,\nu,\mu)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}[w_i(t,\nu,\mu)+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q^N a(s,\nu,\mu)\right)b_i(y)\;P_i(t,s,\nu,\mu)dyds]\cdot b_i(x). \quad (15)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $\|w(t,\nu,\mu)\|_{B_p^(T)}<\infty$. Если $a(t,\nu,\mu)\in B_p^N(T)$ является решением СНИУ (6), то (15) будет обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).

Доказательство. Так как $a(t,\nu,\mu)\in B_p^N(T)$, то из равенства

$$\lim_{N\to\infty}u^N(t,x,\nu,\mu)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}a_i(t,\nu,\mu)\cdot b_i(x)=u(t,x,\nu,\mu)$$

в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to\infty}f\left(t,x,u^N(t,x,\nu,\mu)\right)=f\left(t,x,u(t,x,\nu,\mu)\right) \quad (16)$$

в смысле метрики $L_p(D)$.

Рассмотрим последовательность функционалов:

$$V_N=\int_0^T\int_0^l\Big\{u^N(t,y,\nu,\mu)\Big[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Phi+\,n\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m+2}}\Phi+$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm-1}}{\partial t\partial y^{4nm-2}}\Phi+\frac{\partial^{4nm}}{\partial y^{4nm}}\Phi+$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m}}{\partial t^n\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m+2}}\Phi+\right.$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+$$

$$\left.+\,n\frac{\partial^{4nm+2m-1}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right)+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^n\partial y^{4m}}\Phi+\,n\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{86m+2}}\Phi+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi\;+n\frac{\partial^{4nm+4m-1}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\Big]+$$

$$+f\left(t,y,u^N(t,y,\nu,\mu)\right)\Phi\Big\}\,dydt-\int_0^l\varphi_1^N(y)\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi+n\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi+$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m+2}}\Phi+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right)+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+\ n\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\Big)\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\varphi_2^N(y)\Big[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi+n\frac{\partial^{n+4m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{4m+2}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-5}\partial y^{4m+4}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm-5}}{\partial t\partial x^{4nm-6}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-4}}{\partial x^{4nm-4}}\Phi+\nu\Big(\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+6m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{6m+2}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-5}\partial y^{6m+4}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm+2m-5}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-6}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-4}}{\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi\Big)+\nu\mu\Big(\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{8m+2}}\Phi+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-5}\partial y^{8m+4}}\Phi+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm+4m-5}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-4}}{\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi\Big)\Big]_{t=0}dy-$$

$$-\ldots+\int_0^l\varphi_{n-2}^N(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+n\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4m+2}}{\partial y^{4m+2}}\Phi+\nu\Big(\frac{\partial^{2m+2}}{\partial t^2\partial y^{2m}}\Phi+$$

$$+n\frac{\partial^{6m+1}}{\partial t\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{6m+2}}{\partial y^{6m+2}}\Phi\Big)+\nu\mu\Big(\frac{\partial^{4m+2}}{\partial t^2\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m+1}}{\partial t\partial y^{8m}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{8m+2}}{\partial y^{8m+2}}\Phi\Big)\Big]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_{n-1}^N(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\nu\Big(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\Big)+$$

$$+\nu\mu\Big(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\Big)\Big]_{t=0}dy+\int_0^l\varphi_n^N(y)\Big[\Phi+\nu\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\nu\mu\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\Big]_{t=0}dy. \quad (17)$$

Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (17) и учитывая условия теоремы и начальные условия $a_i(0,\nu,\mu)=\varphi_{1i}, a_i'(0,\nu,\mu)=\varphi_{2i},\ a_i''(0,\nu,\mu)=\varphi_{3i},\ldots,a_i^{(n-1)}(0,\nu,\mu)=\varphi_{ni}$, получаем:

$$V_N=\int_0^l\Big(\varphi_1(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{1i}b_i(y)\Big)\Big[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi+n\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m+2}}\Phi+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi+\nu\Big(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\Big)+$$

$$+\nu\mu\Big(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+$$

$$+n\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\Bigg)\Bigg]_{t=0}dy-\int\limits_0^l\left(\varphi_2(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{2i}b_i(y)\right)\Bigg[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi+n\frac{\partial^{n+4m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{4m+2}}\Phi+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-5}\partial x^{4m+4}}\Phi+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm-5}}{\partial t\partial x^{4nm-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-4}}{\partial x^{4nm-4}}\Phi+\nu\Bigg(\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{2m}}\Phi+$$

$$+n\frac{\partial^{n+6m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{6m+2}}\Phi+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-5}\partial y^{6m+4}}\Phi+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm+2m-5}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-4}}{\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi\Bigg)+$$

$$+\nu\mu\Bigg(\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{8m+2}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-5}\partial y^{8m+4}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm+4m-5}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-6}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-4}}{\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi\Bigg)\Bigg]_{t=0}dy+\ldots-\int\limits_0^l\left(\varphi_{n-2}(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{(n-2)i}b_i(y)\right)\times$$

$$\times\Bigg[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+n\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4m+2}}{\partial y^{4m+2}}\Phi+\nu\Bigg(\frac{\partial^{2m+2}}{\partial t^2\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m+1}}{\partial t\partial y^{6m}}\Phi+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{6m+2}}{\partial y^{6m+2}}\Phi\Bigg)+\nu\mu\Bigg(\frac{\partial^{4m+2}}{\partial t^2\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m+1}}{\partial t\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{8m+2}}{\partial y^{8m+2}}\Phi\Bigg)\Bigg]_{t=0}dy+$$

$$+\int\limits_0^l\left(\varphi_{n-1}(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{(n-1)i}b_i(y)\right)\Bigg[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\nu\Bigg(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\Bigg)+$$

$$+\nu\mu\Bigg(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\Bigg)\Bigg]_{t=0}dy-\int\limits_0^l\left(\varphi_n(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{ni}b_i(y)\right)\times$$

$$\times\left[\Phi+\nu\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\nu\mu\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=0}dy+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Phi(t,y)\,[f\,(t,y,Qa(t,\nu,\mu))-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^N\int\limits_0^l f\left(t,z,Q^Na(t,\nu,\mu)\right)\cdot b_i(z)dz\right]b_i(y)dydt.\quad(18)$$

Очевидно, что первые n интегралы в (18) стремятся к нулю при $N\to\infty$, так как $\varphi_j(x)\in L_p(D_l)$, $j=\overline{1,n}$. Сходимость последней разности в (18) при $N\to\infty$ следует из (16). Отсюда ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty}V_N=0$. Это и доказывает теорему.

6. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)-(3)

Следует отметить, что СНИУ (6) при $N\to\infty$ является счетной системой нелинейных интегральных уравнений. Из доказанных выше двух теорем следует однозначная разрешимость

ССНИУ (6) в пространстве $B_p^{(}T)$. Поэтому предел (15) можно переписать в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(t,x,\nu,\mu) = u_0(t,x,\nu,\mu) + \int_0^t \int_0^l H(t,s,x,y,\nu,\mu) f\,(s,y,u(s,y,\nu,\mu))dyds, \tag{19}$$

где

$$u_0(t,x,\nu,\mu) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} w_i(t,\nu,\mu)\cdot b_i(x),$$

$$H(t,s,x,y,\nu,\mu) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} P_i(t,s,\nu,\mu) b_i(y) b_i(x).$$

Теорема 3. Пусть выполняются следующие условия:

1. $f(t,x,u) \in Lip\left\{L(t,x)_{|u}\right\}$, где $0 < \int_0^t \int_0^l L(s,y)dyds < \infty$;

2. $\|w(t,\nu,\mu)\|_{B_p(T)} < \infty$.

Если $a(t,\nu,\mu) \in B_p^{(}T)$ является решением ССНИУ (6), то решение смешанной задачи (1)-(3) непрерывно зависит от начальных данных (2).

Доказательство. Пусть $u_1(t,x,\nu,\mu)$ и $u_2(t,x,\nu,\mu)$– два различные решения смешанной задачи (1)-(3), соответствующие двум различным значениям функций $\varphi_{k1}(x)$и $\varphi_{k2}(x), k = \overline{1,n}$, соответственно.

Положим, что

$$\|\varphi_{k1}(x) - \varphi_{k2}(x)\|_{C(D_l)} < \delta_k, \quad 0 < \delta_k = const, k = \overline{1,n}.$$

Тогда, в силу условий теоремы, из уравнения (19) следует

$$\|u_{01}(t,x,\nu,\mu) - u_{02}(t,x,\nu,\mu)\|_{C(D)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_{k1}(x) - \varphi_{k2}(x)\|_{C(D_l)} \frac{T^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{j=k}^{n} \frac{T^{j-k}}{(j-k)!} \left\|\theta_1^{j-k}(\nu,\mu)\right\|_{\ell_p} < \delta, \tag{20}$$

$$\|u_1(t,x,\nu,\mu) - u_2(t,x,\nu,\mu)\|_{C(D)} \leqslant \|u_{01}(t,x,\nu,\mu) - u_{02}(t,x,\nu,\mu)\|_{C(D)} +$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{l}} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \int_0^t \int_0^l L(s,y) \|u_1(s,y,\nu,\mu) - u_2(s,y,\nu,\mu)\|_{C(D)} dyds, \tag{21}$$

где

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \frac{T^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{j=k}^{n} \frac{T^{j-k}}{(j-k)!} \left\|\theta_1^{j-k}(\nu,\mu)\right\|_{\ell_p},$$

$$\bar{M}_i = \lim_{N\to\infty} M_{i,N}, i = 1,2.$$

Так как по условию теоремы $0 < \int_0^t \int_0^l L(s,y)dyds < \infty$, то можно применять неравенства Гронуолла-Беллмана к (21). Тогда с учетом (20) из (21) получаем

$$\|u_1(t,x,\nu,\mu) - u_2(t,x,\nu,\mu)\|_{C(D)} < \varepsilon,$$

если положим

$$\delta = \varepsilon \cdot \exp \left\{ -\sqrt{\frac{2}{l}} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \int\limits_0^T \int\limits_0^l L(t,y) dy dt \right\}.$$

7. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПО МАЛЫМ ПАРАМЕТРАМ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)-(3)

Сначала изучим непрерывную зависимость решения смешанной задачи (1)-(3) по первому малому параметру ν.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 1 и

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(1 + \mu\lambda_i^{2m}\right) \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{ki}| \sum_{j=k}^{n} \lambda_i^{2[2(j-k)+3]m} < \infty,$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(1 + \mu\lambda_i^{2m}\right) \lambda_i^{6m} \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left| f\left(t, y, \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j(t, \nu_2, \mu) \cdot b_j(y)\right) \right| |b_i(y)|\, dy dt < \infty.$$

Если $a(t,\nu,\mu) \in B_p(T)$ является решением ССНИУ (6), то для произвольных $\nu_1, \nu_2 \in [0,\nu]$ справедлива оценка:

$$|u(t,x,\nu_1,\mu) - u(t,x,\nu_2,\mu)| \leqslant A\,|\nu_1 - \nu_2|\,, \quad 0 < A = const. \tag{22}$$

Доказательство. Для разности $a_i(t,\nu_1,\mu) - a_i(t,\nu_2,\mu)$ из ССНИУ (6) имеем оценку

$$\begin{aligned}
&\|a(t,\nu_1,\mu) - a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_p(T)} \leqslant \|w(t,\nu_1,\mu) - w(t,\nu_2,\mu)\|_{B_p(T)} + \\
&\quad + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \int\limits_0^l |P_i(t,s,\nu_1,\mu) - P_i(t,s,\nu_2,\mu)| \times \\
&\quad \times \left| f\left(s, y, \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j(s,\nu_2,\mu) \cdot b_j(y)\right) \right| |b_i(y)|\, dy ds + \\
&\quad + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \int\limits_0^l |P_i(t,s,\nu_2,\mu)| \left| f\left(s, y, \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j(s,\nu_1,\mu) \cdot b_j(y)\right) - \right. \\
&\quad \left. - f\left(s, y, \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j(s,\nu_2,\mu) \cdot b_j(y)\right) \right| |b_i(y)|\, dy ds,
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\|w(t,\nu_1,\mu)-w(t,\nu_2,\mu)\|_{B_p(T)}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\max_{t\in D_T}\left\{\sum_{k=1}^{n}|\varphi_{ki}|\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\left|\theta_{1i}^{j-k}(\nu_1,\mu)-\theta_{1i}^{j-k}(\nu_2,\mu)\right|\right\}+$$
$$+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\max_{t\in D_T}\{|\exp\{-\theta_{1i}(\nu_1,\mu)t\}-\exp\{-\theta_{1i}(\nu_2,\mu)t\}|\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n}|\varphi_{ki}|\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\left|\theta_{1i}^{j-k}(\nu_2,\mu)\right|\Bigg\},\quad(24)$$

$$|P_i(t,s,\nu_1,\mu)-P_i(t,s,\nu_2,\mu)|\leqslant\left|\frac{1}{\theta_{0i}^n(\nu_1,\mu)}-\frac{1}{\theta_{0i}^n(\nu_2,\mu)}\right|\cdot(n-1)!\,|t-s|^{n-1}+$$
$$+\frac{(n-1)!\,|t-s|^{n-1}}{\theta_{0i}^n(\nu_2,\mu)}|\exp\{-\theta_{1i}(\nu_1,\mu)t\}-\exp\{-\theta_{1i}(\nu_2,\mu)t\}|.\quad(25)$$

Используем следующие три оценки

$$\left|\frac{1}{\theta_{0i}^n(\nu_1,\mu)}-\frac{1}{\theta_{0i}^n(\nu_2,\mu)}\right|\leqslant n\lambda_i^{2m}\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)|\nu_1-\nu_2|;$$

$$|\exp\{-\theta_{1i}(\nu_1,\mu)t\}-\exp\{-\theta_{1i}(\nu_2,\mu)t\}|\leqslant\lambda_i^{6m}\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)T\,|\nu_1-\nu_2|;$$

$$\left|\theta_{1i}^{n-1}(\nu_1,\mu)-\theta_{1i}^{n-1}(\nu_2,\mu)\right|\leqslant\frac{\lambda_i^{2(2n-1)m}}{n-1}\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)|\nu_1-\nu_2|.$$

Тогда из (24) и (25) следуют оценки

$$\|w(t,\nu_1,\mu)-w(t,\nu_2,\mu)\|_{B_p(T)}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n-1}+T\lambda_i^{8m}\right)\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)\sum_{k=1}^{n}|\varphi_{ki}|\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\frac{T^{j-k}}{(j-k)!}\lambda_i^{2[2(j-k)-1]m}|\nu_1-\nu_2|,\quad(26)$$

$$|P_i(t,s,\nu_1,\mu)-P_i(t,s,\nu_2,\mu)|\leqslant\lambda_i^{2m}\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)T^{n-1}n!\frac{\lambda_i^{4m}+Tn}{n^2}\cdot|\nu_1-\nu_2|.\quad(27)$$

Далее, в силу условий теоремы, с учетом (26) и (27) из (23) имеем

$$\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_p(T)}\leqslant$$
$$\leqslant A_0|\nu_1-\nu_2|+\bar M_1\bar M_2^2 l^{\frac{1}{q}}\int_0^t\|L(s,x)\|_{L_p(D_l)}\|a(s,\nu_1,\mu)-a(s,\nu_2,\mu)\|_{B_p(T)}ds,\quad(28)$$

где

$$A_0 = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n-1}+T\lambda_i^{8m}\right)\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)\sum_{k=1}^{n}|\varphi_{ki}|\,\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\frac{T^{j-k}}{(j-k)!}\lambda_i^{2[2(j-k)-1]m}+$$

$$+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^{2m}\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)T^{n-1}n!\frac{\lambda_i^{4m}+Tn}{n^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left|f\left(t,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}a_j(t,\nu_2,\mu)\cdot b_j(y)\right)\right|\times$$

$$\times\,|b_i(y)|\,dydt,\quad \bar{M}_i=\lim_{N\to\infty}M_{i,N},\, i=1,2.$$

Применение к (28) неравенства Гронуолла-Беллмана дает оценку

$$\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_p^(T)}\leqslant A_1\,|\nu_1-\nu_2|\,, \tag{29}$$

где

$$A_1=A_0\exp\left\{\bar{M}_1\bar{M}_2^2 l^{\frac{1}{q}}\int\limits_0^T\|L(t,x)\|_{L_p(D_l)}\,dt\right\}.$$

Учтем, что

$$|u(t,x,\nu_1,\mu)-u(t,x,\nu_2,\mu)|\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}|a_i(t,\nu_1,\mu)-a_i(t,\nu_2,\mu)|\cdot|b_i(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_p(T)}\cdot\|b(x)\|_{B_q(l)}\,.$$

Тогда из (29) следует (22), если положим $A=A_1\bar{M}_2$.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 4. Если $a(t,\nu,\mu)\in B_p(T)$ является решением ССНИУ (6), то для $\nu\in[0,\alpha_0]$, $\nu+h\in(0,\alpha_0)$, $h=const$ справедлива оценка:

$$\left|\frac{u(t,x,\nu+h,\mu)-u(t,x,\nu,\mu)}{h}\right|\leqslant A.$$

Аналогично изучаем устойчивость решения смешанной задачи (1)-(3) по второму малому параметру μ.

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 1 и

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}|\varphi_{ki}|\sum_{j=k}^{n}\lambda_i^{2[2(j-k)+4]m}<\infty,$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^{8m}\nu\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left|f\left(t,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}a_j(t,\nu,\mu_2)\cdot b_j(y)\right)\right||b_i(y)|\,dydt<\infty.$$

Если $a(t,\nu,\mu)\in B_p(T)$ является решением ССНИУ (6), то для произвольных $\mu_1,\mu_2\in[0,\mu]$ справедлива оценка:

$$|u(t,x,\nu,\mu_1)-u(t,x,\nu,\mu_2)|\leqslant B\,|\mu_1-\mu_2|\,,0<B=const. \tag{30}$$

Доказательство. Используя следующие три оценки

$$\left|\frac{1}{\theta_{0i}^n(\nu,\mu_1)}-\frac{1}{\theta_{0i}^n(\nu,\mu_2)}\right|\leqslant n\lambda_i^{4m}\,|\mu_1-\mu_2|\,;$$

$$\left|\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu_1)t\right\}-\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu_2)t\right\}\right|\leqslant\nu\lambda_i^{8m}T\left|\mu_1-\mu_2\right|,$$

$$\left|\theta_{1i}^{n-1}(\nu,\mu_1)-\theta_{1i}^{n-1}(\nu,\mu_2)\right|\leqslant\frac{\nu\lambda_i^{4nm}}{n-1}\left|\mu_1-\mu_2\right|,$$

получаем

$$\left\|w(t,\nu,\mu_1)-w(t,\nu,\mu_2)\right\|_{B_p(T)}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\nu\left(\frac{1}{n-1}+T\lambda_i^{8m}\right)\sum_{k=1}^{n}\left|\varphi_{ki}\right|\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\frac{T^{j-k}}{(j-k)!}\lambda_i^{4(j-k)m}\left|\mu_1-\mu_2\right|, \quad (31)$$

$$\left|P_i(t,s,\nu,\mu_1)-P_i(t,s,\nu,\mu_2)\right|\leqslant\nu\lambda_i^{4m}T^{n-1}n!\frac{1+Tn\lambda_i^{4m}}{n^2}\cdot\left|\mu_1-\mu_2\right|. \quad (32)$$

Тогда с учетом (31) и (32), в силу условий теоремы, для разности $a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)$ имеем оценку

$$\left\|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\right\|_{B_p(T)}\leqslant$$
$$\leqslant A_0\left|\mu_1-\mu_2\right|+\bar{M}_1\bar{M}_2^2l^{\frac{1}{q}}\int\limits_0^t\left\|L(s,x)\right\|_{L_p(D_l)}\left\|a(s,\nu,\mu_1)-a(s,\nu,\mu_2)\right\|_{B_p(T)}ds, \quad (33)$$

где

$$B_0=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\nu\left(\frac{1}{n-1}+T\lambda_i^{8m}\right)\sum_{k=1}^{n}\left|\varphi_{ki}\right|\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\frac{T^{j-k}}{(j-k)!}\lambda_i^{4(j-k)m}+$$
$$+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\nu\lambda_i^{4m}T^{n-1}n!\frac{Tn\lambda_i^{4m}+1}{n^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left|f\left(t,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}a_j(t,\nu,\mu_2)\cdot b_j(y)\right)\right|\left|b_i(y)\right|dydt.$$

Применяя к (33) неравенства Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\left\|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\right\|_{B_p(T)}\leqslant A_1\left|\mu_1-\mu_2\right|, \quad (34)$$

где

$$B_1=B_0\exp\left\{\bar{M}_1\bar{M}_2^2l^{\frac{1}{q}}\int\limits_0^T\left\|L(t,x)\right\|_{L_p(D_l)}dt\right\}.$$

Учтем, что

$$\left|u(t,x,\nu,\mu_1)-u(t,x,\nu,\mu_2)\right|\leqslant\left\|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\right\|_{B_p(T)}\cdot\left\|b(x)\right\|_{B_q(l)}.$$

Тогда из (34) следует (30), если положим $B=B_1\bar{M}_2$.

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 4 и 5. Если $a(t,\nu,\mu)\in B_p(T)$ является решением ССНИУ (6), то для $\nu_1,\nu_2\in[0,\nu]$, $\mu_1,\mu_2\in[0,\mu]$ справедлива оценка:

$$\left|u(t,x,\nu_1,\mu_1)-u(t,x,\nu_2,\mu_2)\right|\leqslant C\left(\left|\nu_1-\nu_2\right|+\left|\mu_1-\mu_2\right|\right),$$

где $C=\max\{A;B\}$.

Следствие 3. Пусть выполняются условия теоремы 5. Если $a(t,\nu,\mu) \in B_p(T)$ является решением ССНИУ (6), то для $\mu \in [0,\beta_0]\,, \quad \mu + h \in (0,\beta_0)\,, h = const$ справедлива оценка:

$$\left| \frac{u(t,x,\nu,\mu+h) - u(t,x,\nu,\mu)}{h} \right| \leqslant B.$$

8. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

Изучается дифференцируемость обобщенного решения смешанной задачи (1)-(3) по первому малому параметру ν.

Теорема 6. Пусть:

1. Выполняются условия теоремы 1;
2. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(1 + \mu\lambda_i^{2m}\right) \lambda_i^{4(n+1,5)m} |\varphi_{ki}| < \infty,\ k = \overline{1,n}$;
3. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(1 + \mu\lambda_i^{2m}\right) \lambda_i^{6m} \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left| f\left(t, y, \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{N} a_j(t,\nu,\mu)\cdot b_j(y)\right)\right| |b_i(y)|\, dydt < \infty$;
4. $\int\limits_0^T \left\| \dfrac{\partial f(t,x,u)}{\partial u} \right\|_{L_p(D_l)} dt < \infty.$

Тогда имеет место следующее соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(t,x,\nu+h,\mu) - u(t,x,\nu,\mu)}{h} = \frac{\partial u(t,x,\nu,\mu)}{\partial \nu}.$$

Доказательство. Так как $\frac{\partial u(t,x,\nu,\mu)}{\partial\nu} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial a_i(t,\nu,\mu)}{\partial\nu} b_i(x)$, то формально дифференцируем ССНИУ (6) по параметру ν :

$$\frac{\partial a_i(t,\nu,\mu)}{\partial\nu} = W_i(t,\nu,\mu) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l P_i(t,s,\nu,\mu) \frac{\partial f(t,x,u)}{\partial u} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_j(t,\nu,\mu)}{\partial\nu} b_j(y) \right) \cdot b_i(y) dyds, \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} W_i(t,\nu,\mu) = (\theta_{1i}(\nu,\mu))'_\nu & \left[\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ki} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{j=k}^{n} (j-k) \theta_{1i}^{j-k-1}(\nu,\mu) \frac{t^{j-k}}{(j-k)!} - \right. \\ & \left. -t \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ki} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{j=k}^{n} \theta_{1i}^{j-k}(\nu,\mu) \frac{t^{j-k}}{(j-k)!} \right] \exp\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)t\} - \\ & - \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left[(\theta_{0i}(\nu,\mu))'_\nu \frac{(n)!(t-s)^{n-1}}{\theta_{0i}^{n+1}(\nu,\mu)} + (\theta_{1i}(\nu,\mu))'_\nu \frac{(n-1)!(t-s)^n}{\theta_{0i}^{n}(\nu,\mu)} \right] \times \\ & \times \exp\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\} f\left(s, y, \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j(s,\nu,\mu)\cdot b_j(y) \right) b_i(y) dyds. \end{aligned} \tag{36}$$

Далее, в силу условий теоремы из (36) получаем

$$\|W(t,\nu,\mu)\|_{B_p(T)} \leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\|W_i(t,\nu,\mu)\|_{C(D_T)} \leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}|\varphi_{ki}|\times$$
$$\times\sum_{j=k}^{n}\left((j-k)+T\lambda_i^{4m}\right)\frac{T^{j-k}}{(j-k)!}\lambda_i^{4(j-k+0,5)m}\times$$
$$\times\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)+\sqrt{2}(n-1)!T^n\Delta l^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^{2m}\left(n+\lambda_i^{4m}T\right)\left(1+\mu\lambda_i^{2m}\right)<\infty. \quad (37)$$

Тогда из (37) следует

$$\left\|\frac{\partial a(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right\|_{B_p(T)} \leqslant \|W(t,\nu,\mu)\|_{B_p(T)} + \bar{M}_2^2\int_0^t\left\|\frac{\partial f(s,y,u)}{\partial u}\right\|_{L_p(D_l)}\left\|\frac{\partial a(s,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right\|_{B_p(T)}ds. \quad (38)$$

Применяя к (38) неравенства Гронуолла-Беллмана, с учетом (37) получаем, что $\frac{\partial a(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}\in B_p(T)$.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\frac{\partial a_i^0(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}=W_i(t,\nu,\mu),$$

$$\frac{\partial a_i^{k+1}(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}=W_i(t,\nu,\mu)+$$
$$+\int_0^t\int_0^l P_i(t,s,\nu,\mu)\frac{\partial f(t,y,u)}{\partial u}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial a_j^k(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}b_j(y)\right)b_i(y)dyds, k=0,1,2,\ldots.$$

Тогда из справедливости оценок

$$\left\|\frac{\partial a^1(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}-\frac{\partial a^0(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right\|_{B_p(T)} \leqslant M_2^2\|W(t,\nu,\mu)\|_{B_p(T)}\int_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_p(D_l)}ds,$$

$$\left\|\frac{\partial a^{k+1}(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}-\frac{\partial a^k(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right\|_{B_p(T)} \leqslant M_2^{2k+2}\|W(t,\nu,\mu)\|_{B_p(T)}\frac{\left[\int_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_p(D_l)}ds\right]^{k+1}}{(k+1)!}$$

следует существование решения счетной системы (35) в пространстве $B_p(T)$. Теперь предположим, что система (35) имеет два решения $\frac{\partial a(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}$ и $\frac{\partial\vartheta(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial a(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}-\frac{\partial\vartheta(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right\|_{B_p(T)} \leqslant \bar{M}_2^2\int_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_p(D_l)}\left\|\frac{\partial a(s,\nu,\mu)}{\partial\nu}-\frac{\partial\vartheta(s,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right\|_{B_p(T)}ds. \quad (39)$$

Применение к (39) неравенства Грогуолла-Беллмана дает единственность этого решения.

Рассмотрим следующее соотношение

$$\frac{a_i(t,\nu+h,\mu)-a_i(t,\nu,\mu)}{h}=\frac{w_i(t,\nu+h,\mu)-w_i(t,\nu,\mu)}{h}+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l \frac{P_i(t,s,\nu+h,\mu)-P_i(t,s,\nu,\mu)}{h} f\left(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N a_j(s,\nu,\mu)\cdot b_j(y)\right) b_i(y)dyds+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l P_i(t,s,\nu,\mu)\frac{1}{h}\left[f\left(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N a_j(s,\nu+h,\mu)\cdot b_j(y)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N a_j(s,\nu,\mu)\cdot b_j(y)\right)\right] b_i(y)dyds. \quad (40)$$

Переходя в предел при $h\to 0$ в (40), получаем (35). Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{u(t,x,\nu+h,\mu)-u(t,x,\nu,\mu)}{h}-\frac{\partial u(t,x,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \bar{M}_2\lim_{h\to 0}\left\|\frac{a(t,\nu+h,\mu)-a(t,\nu,\mu)}{h}-\frac{\partial a(t,\nu,\mu)}{\partial\nu}\right\|_{B_p(T)}=0.$$

Теорема доказана.

Аналогично изучается дифференцируемость обобщенного решения смешанной задачи (1)-(3) по второму малому параметру μ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986. — 336 с.

[2] Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006. — 248 с.

[3] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

[4] Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравн. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 72–81.

[5] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник. Нелинейные уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.

[6] Похожаев С.И. Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения // Труды МИ РАН. — 2003. — Т. 243. — С. 257–288.

[7] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

[8] Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. — М.: МГУ, 1992. — 111 с.

[9] Юлдашев Т. К., Дыйканов Г. А. О смешанной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2010. — № 2. — С. 164–169.

[10] Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 112–123.

Юлдашев Т. К., к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия
E-mail: tursunbay@rambler.ru
Тел.: 8 923 372 51 79

Yuldashev T. K., Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Associate professor of Higher Mathematics Department Siberian State Aerospace University Russia, Krasnoyarsk
E-mail: tursunbay@rambler.ru
Tel.: 8 923 372 51 79