

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

В. И. Шмойлов, Д. И. Савченко

*Южный научный центр Российской академии наук, Технологического института
Южного Федерального университета*

Поступила в редакцию 02.07.2012 г.

Аннотация: рассматривается иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Новый метод суммирования используется при определении значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей и рядов. Метод суммирования применим не только к обыкновенным непрерывным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов, например, к непрерывным дробям Хессенберга, что позволило построить оригинальный алгоритм нахождения нулей полиномов n -й степени. Предложенный r/φ -алгоритм используется также при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, расходящиеся непрерывные дроби, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

Abstract: the article covers a new, different form traditional, definition of convergent of continued fractions. A new method of summation is used for calculation of continued fractions and series, divergent according to classical interpretation. Authors developed an original algorithm of calculation of roots of n -degree polynomials. The suggested r/φ -algorithm is also used for solving infinite systems of linear algebraic equations.

Keywords: algebraic equations, divergent continued fractions, infinite systems of linear algebraic equations.

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывные дроби в большинстве случаев дают гораздо более общие представления трансцендентных функций, чем классические степенные ряды [1]. Непрерывные дроби, зачастую, могут быть с большим эффектом использованы для ускорения сходимости рядов. Более того, преобразуя расходящиеся ряды в соответствующие непрерывные дроби, нередко можно просуммировать, то есть найти значения, расходящихся рядов. Известно, что непрерывные дроби тесно связаны с аппроксимациями Паде, которые, как отмечается в [2], широко используются при решении задач статистической механики и физики твердого тела. Поэтому существенные результаты, полученные в теории непрерывных дробей, в частности, в вопросах сходимости, могут быть использованы и в аппроксимациях Паде.

Бесконечной непрерывной дробью, или цепной дробью, называют выражение вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\vdots + \frac{a_n}{b_n + \vdots}}}}$$

где a_i и b_i , $i = 1, 2, \dots$ — в общем случае независимые переменные.

Часто непрерывную дробь записывают в компактном виде в форме Гершеля:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots$$

Непрерывная дробь называется сходящейся, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел. Непрерывная дробь расходится, если последовательность ее подходящих дробей предела не имеет или предел равен бесконечности [3].

В статье будет рассмотрено несколько задач из разных разделов вычислительной математики, решенных при помощи так называемого r/φ — алгоритма, — нового метода суммирования расходящихся непрерывных дробей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В [4] предложено иное, нежели традиционное, толкование сходимости непрерывных дробей. Для установления значений непрерывных дробей будем использовать r/φ –алгоритм:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|} = r_0, \quad (1)$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \quad (2)$$

где P_i/Q_i — значения i -й подходящей дроби из совокупности, включающей n подходящих дробей, k_n — число отрицательных подходящих дробей из n подходящих дробей.

Этот способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет за последовательностью вещественных подходящих дробей усмотреть некое комплексное число, которое, собственно, и представлено этой непрерывной дробью. Признаком комплексности такой расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков ее подходящих дробей, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Другими словами, комплексная единица e^i устанавливается из “поведения” подходящих дробей непрерывной дроби. Параметры же комплексного числа $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, то есть его модуль r_0 и аргумент φ_0 могут быть определены, в частности, так называемым r/φ –алгоритмом, то есть формулами (1) и (2).

В случае непрерывных дробей, сходящихся в классическом смысле, аргумент φ_0 примет значения 0 или π . Если $\varphi_0 = 0$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля r_0 :

$$z = r_0 e^{i0} = r_0.$$

Если $\varphi_0 = \pi$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0.$$

Предложенный r/φ –алгоритм даёт возможность устанавливать значения расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей, а также решать множество других задач из различных разделов вычислительной математики.

2. ПРИМЕНЕНИЕ r/φ -АЛГОРИТМА ДЛЯ СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Из формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

можно записать дроби:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}, \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}, \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}} \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \frac{1}{e^{i\varphi}} \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем подходящие дроби непрерывной дроби (3):

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= 2 \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{P_n}{Q_n} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi}}} = \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin n \varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

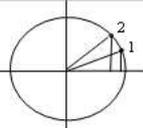
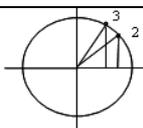
Здесь $\sin n\varphi \neq 0$.

При $n \rightarrow \infty$ можно прийти к непрерывной дроби

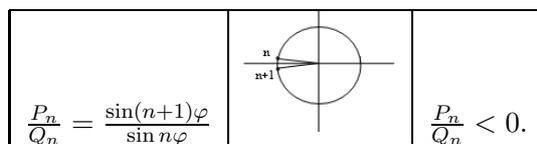
$$e^{i\varphi} \stackrel{*}{=} 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots}} \quad (5)$$

В выражении (5) над знаком равенства стоит “звездочка”, которая означает, что это равенство ни есть равенство в традиционном понимании. Смысл “равенства” (5) будет разъяснен ниже, после чего к “звездочке” прибегать не будем, чтобы не загромождать записи комплексных чисел непрерывными дробями с вещественными элементами.

Используя непрерывную дробь (5) мы можем восстановить комплексное число $e^{i\varphi}$, которое “представлено” этой бесконечной непрерывной дробью. Изобразим графически несколько значений первых подходящих дробей непрерывной дроби (5). Используя выражение (4) для подходящих дробей, можем записать

$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi},$		$\frac{P_1}{Q_1} > 0,$
$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi},$		$\frac{P_2}{Q_2} > 0,$

Очевидно, с ростом номера n угол $(n + 1)$ станет больше угла π :



Этот момент может быть зафиксирован, так как подходящая дробь P_n/Q_n примет отрицательное значение. Таким образом, перемещение радиуса – вектора от угла φ до угла $(n + 1)\varphi$, несколько превышающего значение π , дает возможность, пусть и приближенно, определить аргумент комплексного числа $e^{i\varphi}$, представленного непрерывной дробью (5). Продолжая наблюдение за значениями подходящих дробей (5), запишем формулу, по которой можно приближенно определить аргумент φ_0 комплексного числа $e^{i\varphi_0}$:

$$\varphi_0 = \frac{\pi k_n + \varphi'}{n}, \quad (6)$$

где k_n – количество подходящих дробей, имеющих отрицательное значение из общего числа n подходящих дробей разложения (5), φ' – некоторый угол, причем, $\varphi' < \varphi_0$.

Если $n \rightarrow \infty$, то формула (6) примет вид

$$\varphi_0 = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}.$$

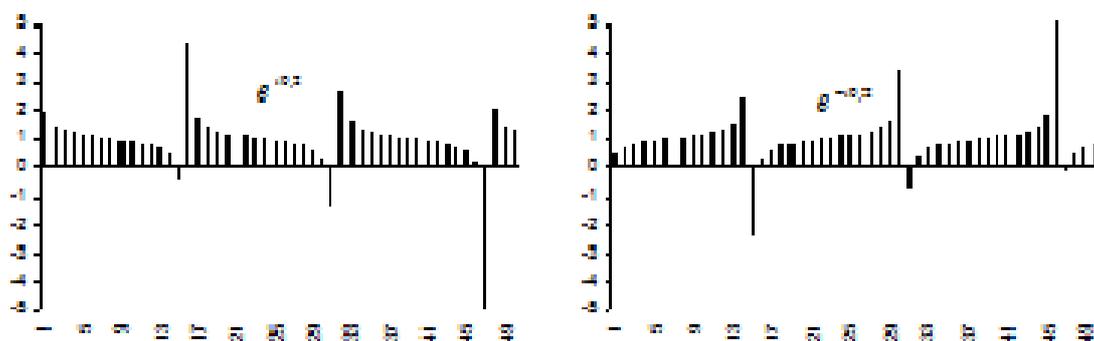


Рис. 1. Распределение значений подходящих непрерывных дробей (7) и (8)

Рассмотренная выше процедура позволяет установить однако не значение аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$, а модуль этого аргумента.

Знак аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$ определяется из динамики распределения значений подходящих дробей (5). Эти правила определения знака установлены на тестовых непрерывных дробях, имеющих комплексные значения [5].

На рис. 1 и 1а показано распределение значений подходящих дробей P_n/Q_n разложений (7) и (8) в зависимости от номера n .

$$2 \cos 0.2 - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \dots - \frac{1}{2 \cos 0.2} = \frac{\sin(n+1)0.2}{\sin n0.2}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2 \cos 0.2} - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \dots - \frac{1}{2 \cos 0.2} = \frac{\sin n0.2}{\sin(n+1)0.2}. \quad (8)$$

Таблица 1. $r_0 = 2,0$, $\varphi_0 = 1,318116071652$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
2	-3,0000000000	1,732050807568	0,267949192431	m	1,570796326794	0,252680255142	m
4	-0,7142857142	1,495348781221	0,504651218778	m	1,570796326794	0,252680255142	m
8	1,4369747899	1,901623404084	0,098376595915	m	1,178097245096	0,140018826556	m
16	-1,0326336812	1,893923277888	0,106076722111	m	1,374446785945	0,056330714292	m
32	0,9570674702	1,954777493792	0,045222506207		1,276272015520	0,041844056131	m
64	-3,3737052603	1,992211007792	0,007788992207		1,325359400733	0,007243329080	m
128	-0,9528199343	1,985483211714	0,014516788285		1,325359400733	0,007243329080	
256	1,0641835576	1,995010880870	0,004989119129		1,313087554430	0,005028517222	
512	-2,5412946875	1,998634135542	0,001365864457		1,319223477581	0,001107405928	
1024	-0,4041335913	1,996749737389	0,003250262610		1,319223477581	0,001107405928	
2048	2,1217417851	1,999829743244	0,000170256755		1,317689496793	0,000426574859	
4096	0,1547065652	1,998758806916	0,001241193083		1,317689496793	0,000426574859	
8192	5,7575173443	2,000006649905	0,000006649905		1,318072991990	0,000043079662	
16384	2,7721264678	1,999990952659	0,000009047340		1,318072991990	0,000043079662	
32768	0,8108450840	1,999946089818	0,000053910181		1,318072991990	0,000043079662	
65536	-5,3765210082	1,999995713264	0,000004286735		1,318120928890	0,000004857237	
131072	-2,1191941726	1,999993440699	0,000006559300		1,318120928890	0,000004857237	
262144	-0,0937280531	1,999976553821	0,000023446178		1,318120928890	0,000004857237	
524288	3,3611474401	1,99999895090	0,00000104909		1,318114936777	0,000001134874	
1048576	1,2752422354	1,999999061459	0,000000938540		1,318114936777	0,000001134874	
2097152	-1,5309777594	1,999999422170	0,000000577829		1,318116434806	0,000000363153	
4194304	0,4077117759	1,999999256397	0,000000743602		1,318115685791	0,000000385860	
8388608	20,7706409258	2,000000005109	0,000000005109		1,318116060298	0,000000011353	

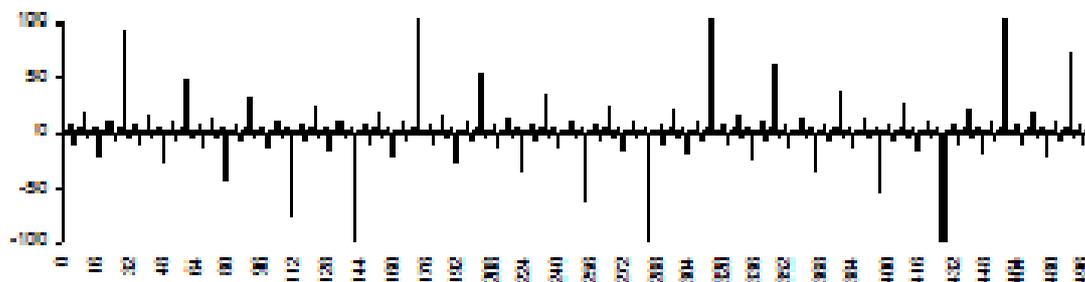


Рис. 2. Распределение значений подходящих дробей (9)

Из непрерывной дроби (5), представляющей комплексное число $e^{i\varphi}$, можно получить, помимо аргумента, модуль этого комплексного числа, равный единице.

В табл. 1 приведены результаты суммирования расходящейся в классическом смысле непрерывной дроби (9)

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2} = 2e^{i \operatorname{arctg} \sqrt{15}} = 1 - \frac{4}{1} - \frac{4}{1} - \dots - \frac{4}{1} - \dots \quad (9)$$

На рис. 2 показаны значения подходящих дробей непрерывной дроби (9).

Таблица 2. $r_0 = 3,2171505117\dots$, $\varphi_0 = 1,3536398454\dots$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	-3,0000000	3,0000000000	0,2171505117	m	3,1415926535	1,7879528081	m
2	6,0000000	4,2426406871	1,0254901754	m	1,5707963267	0,2171564813	m
4	-3,0000000	3,0000000000	0,2171505117	m	1,5707963267	0,2171564813	m
8	-97,5000000	4,9614481602	1,7442976485	m	1,5707963267	0,2171564813	m
16	1,4880473	3,5474336503	0,3302831386	m	1,3744467859	0,0208069405	m
32	3,1985122	3,6050160485	0,3878655367	m	1,3744467859	0,0208069405	m
64	62,8693924	3,3885474566	0,1713969449		1,3744467859	0,0208069405	m
128	0,9165216	3,1810462758	0,0361042359		1,3499030933	0,0037367521	m
256	1,7095765	3,2148854739	0,0022650377		1,3621749396	0,0085350941	m
512	3,9037050	3,2112688498	0,0058816618		1,3499030933	0,0037367521	m
1024	-15,4772571	3,2219262392	0,0047757275		1,3560390164	0,0023991710	
2048	2,6358581	3,2194825453	0,0023320336		1,3529710549	0,0006687905	
4096	11,1007665	3,2127253440	0,0044251676		1,3529710549	0,0006687905	
8192	-0,6961262	3,2169015620	0,0002489496		1,3533545501	0,0002852953	
16384	-1,7591587	3,2167104407	0,0004400709		1,3533545501	0,0002852953	
32768	-6,4347291	3,2170964982	0,0000540134		1,3536421715	0,0000023260	
65536	5,5879135	3,2171496506	0,0000008610		1,3536421715	0,0000023260	
131072	-3,9038315	3,2171884212	0,0000379094		1,3536182030	0,0000216423	
262144	16,0431708	3,2171480639	0,0000024477		1,3535942346	0,0000456108	
524288	-0,0551483	3,2171287791	0,0000217325		1,3536421715	0,0000023260	
1048576	-0,2709104	3,2171427009	0,0000078107		1,3536361793	0,0000036660	
2097152	-0,7308612	3,2171496552	0,0000008564		1,3536361793	0,0000036660	
4194304	-1,8537413	3,2171502478	0,0000002638		1,3536391754	0,0000006699	
8388608	-7,2124648	3,2171495794	0,0000009323		1,3536399244	0,0000000790	

Выше было показано, что формулы (1) и (2) являются обоснованными при суммировании “расходящихся” периодических непрерывных дробей. В этом случае значение расходящейся непрерывной дроби определяется значением комплексного корня квадратного уравнения, который, собственно, и представляет “расходящаяся” периодическая цепная дробь. Оказалось, однако, что формулы (1) и (2) можно распространить, помимо периодических непрерывных дробей, на непрерывные дроби других классов, в частности, на практически важные предельно-периодические непрерывные дроби, которыми представляются элементарные и многие специальные функции.

В табл. 2 показаны результаты суммирования расходящейся непрерывной дроби

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{6}{2} - \frac{6}{5} - \dots - \frac{3n}{2} - \frac{3n}{2n+1} - \dots \quad (10)$$

Легко понять, почему непрерывная дробь (10) расходится. При отрицательном аргументе логарифмическая функция имеет комплексное значение: $\ln(-2) = 3,2171505117e^{i1,3536398454}$, которое, естественно, не может приближаться непрерывной дробью с вещественными элементами и, тем не менее, r/φ -алгоритм позволяет установить значение непрерывной дроби (10).

В первой колонке таблицы даны номера n подходящих дробей разложения (10). Номера подходящих дробей составляют степень 2. Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в соседней колонке 2. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$ с ростом n не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в колонке 3, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить, – значения асимптотически приближаются к величине 3,2171505117, то есть к модулю комплексного числа $\ln(-2)$. Даже беглого взгляда на колонки 6 и 7 достаточно, чтобы убедиться, что с ростом количества подходящих дробей разложения (10) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

Частным случаем обобщенных непрерывных дробей [6] являются непрерывные дроби Хессенберга. Непрерывными дробями Хессенберга были названы непрерывные дроби, задаваемые отношением определителей матриц Хессенберга, для которых характерна одна поддиагональ элементов. Дроби Хессенберга – своеобразные непрерывные дроби, звенья которых распространяются не только “вниз”, но и “вверх”. Кроме того, числители и знаменатели подходящих дробей удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям n -го порядка. Непрерывные дроби Хессенберга следует рассматривать как обобщение обыкновенных непрерывных дробей, для числителей и знаменателей подходящих дробей которых имеют место рекуррентные соотношения второго порядка. Непрерывные дроби Хессенберга впервые были рассмотрены немецким математиком Фюрстенау в 1874 [6].

При $n \rightarrow \infty$ периодические непрерывные дроби Хессенберга могут представлять элементарные и специальные функции. Например,

$$\frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & x/5! & \dots \\ -1 & x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & \dots \\ 0 & -1 & x/1! & x/2! & x/3! & \dots \\ 0 & 0 & -1 & x/1! & x/2! & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x/1! & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & \dots \\ -1 & x/1! & x/2! & x/3! & \dots \\ 0 & -1 & x/1! & x/2! & \dots \\ 0 & 0 & -1 & x/1! & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}. \quad (11)$$

Непрерывная дробь (11) определяет логарифмическую функцию на всей плоскости комплексного переменного без вырезов по отрицательной оси. Если значение логарифмической функции комплексное, то непрерывная дробь (11) суммируется при помощи r/φ -алгоритма.

При вычислении (11) при помощи r/φ -алгоритма используется последовательность значений подходящих дробей:

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}}{|x/1!|}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! \\ -1 & x/1! & x/2! \\ 0 & -1 & x/1! \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}}, \dots$$

При $x = -1/3$ непрерывная дробь Хессенберга (11) будет представлять $1/\ln(-2)$. В табл. 3 приведены результаты вычисления $1/\ln(-2)$ при помощи непрерывной дроби (11).

Таблица 3. $r_0 = 0.310834073\dots$, $\varphi_0 = -1.3536398454\dots$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
20	0.85127256	0.99198117	0.68114710	m	-1.41371669	0.06007684	m
21	0.02044264	0.82455439	0.51372032	m	-1.34639685	0.00724299	m
42	-0.02832422	0.50977666	0.19894259	m	-1.42119667	0.06755683	m
84	-0.14445825	0.40513373	0.09429965	m	-1.38379676	0.03015691	m
168	-0.75441728	0.35654051	0.04570644	m	-1.36509680	0.01145696	m
336	0.32678464	0.33285231	0.02201823	m	-1.35574682	0.00210698	m
672	2.01078357	0.32176153	0.01092745	m	-1.35574682	0.00210698	m
1344	-0.03019484	0.31569144	0.00485737	m	-1.35574682	0.00210698	m
2688	-0.14954713	0.31342156	0.00258748	m	-1.35457808	0.00093823	m
5376	-0.81466750	0.31217034	0.00133626	m	-1.35399370	0.00035386	m
10752	0.30407891	0.31149855	0.00066447	m	-1.35370152	0.00006167	
21504	1.28357034	0.31116989	0.00033582	m	-1.35370152	0.00006167	
43008	-0.09454281	0.31099243	0.00015836	m	-1.35370152	0.00006167	
86016	-0.38364272	0.31091665	0.00008257	m	-1.35366499	0.00002515	
172032	0.81555456	0.31087600	0.00004193	m	-1.35364673	0.00000689	
344064	-0.22761506	0.31085447	0.00002039	m	-1.35364673	0.00000689	
688128	-10.07498787	0.31084454	0.00001047	m	-1.35364217	0.00000232	
1376256	0.08515530	0.31083902	0.00000495	m	-1.35363988	0.00000004	
2752512	0.10347124	0.31083657	0.00000249	m	-1.35363988	0.00000004	
5505024	0.14104327	0.31083533	0.00000126	m	-1.35363988	0.00000004	
11010048	0.22449739	0.31083471	0.00000064	m	-1.35363988	0.00000004	

Способ суммирования при помощи r/φ -алгоритма оказался применим не только к обыкновенным непрерывным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов. Это указывало на некоторую универсальность найденного метода суммирования. В частности, r/φ -алгоритм дал возможность предложить практически удобный способ определения всех нулей полинома [7]. Но главное, этот алгоритм позволил рассматривать выражения для нулей полиномов через непрерывные дроби Хессенберга и Никипорца, как аналитические формулы для определения корней многочлена через его коэффициенты.

3. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ r/φ -АЛГОРИТМА

Имеется алгебраическое уравнение степени n :

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \quad (12)$$

Запишем следующую производящую функцию:

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots \quad (13)$$

Коэффициенты α_i в (12) и (13) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (13) могут быть найдены из линейного рекуррентного уравнения

$$c_m = -(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}), \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -\alpha_1.$$

Для определения корней уравнения (12) Эйткин предложил формулы [8]:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1}}{c_m} = x_1, \quad (14)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} : \frac{c_{m+1}}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \quad (15)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} \right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3 \quad (16)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+i} & c_{m+i+1} & \dots & c_{m+2i-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+i-2} & c_{m+i-1} & \dots & c_{m+2i-4} \end{vmatrix}} \right) = x_i. \quad (17)$$

Очевидно, что используя формулы Эйткина можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (12). Способ нахождения старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения (12), описываемый формулой (14), как известно, принадлежит Д. Бернулли. Применим r/φ -алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей к определению комплексных корней алгебраического уравнения (12).

Запишем формулы Эйткена (14) - (17) в развернутом виде. В результате преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Тейлица.

Формулу (14) можно представить отношением определителей:

$$x_1 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & -1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} \quad (18)$$

Последующие корни уравнения (12) запишутся следующим образом.

$$x_2 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} \quad (19)$$

$$x_3 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} \quad (20)$$

$$x_i = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} \quad (21)$$

Отношения определителей (18) – (21), выражающие корни алгебраического уравнения (12) через его коэффициенты, будем называть *функциями* $X_i^{(n)}$. Для функций $X_i^{(n)}$ введём обозначение

$$X_i^{(n)} = X_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Здесь следует подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвёртой функции $X_i^{(n)}$ записываются аналогично их записи для алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4.

Определение математических конструкций (18) – (21), как непрерывных дробей особой структуры, позволяет естественно ввести такое фундаментальное понятие, как подходящая дробь, что значительно упрощает описание способа решения алгебраических уравнений с использованием функций $X_i^{(n)}$ и r/φ -алгоритма.

Для комплексных корней уравнения (12), определяемых также формулами (18) – (21), необходимо дополнительно использовать r/φ -алгоритм. Модуль r_i и модуль аргумента φ_i искомого комплексного числа $x_i = r_i e^{i\varphi_i}$ определяются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_i^m |\bar{x}_i^{(m)}|} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (23)$$

где $|\bar{x}_i^{(m)}$ – m -я подходящая дробь выражения (21), $k_i^{(m)}$ число отрицательных подходящих дробей для i -го корня из m подходящих дробей.

Например, подходящие дроби $\bar{x}_2^{(m)}$ определяются следующим образом:

$$\bar{x}_2^{(1)} = \frac{|-a_2|}{1} : \frac{|-a_1|}{1}, \bar{x}_2^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 \\ -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}}{|-a_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{vmatrix}}{|-a_1|},$$

$$\bar{x}_2^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -1 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 \\ -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & -1 & -a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -1 & -a_1 \end{vmatrix}}$$

Вычисление подходящих дробей непосредственно по формулам (18) – (21) весьма затруднительно при больших размерностях определителей, входящих в эту формулу. Однако легко заметить, что определители, имеющиеся в формуле (21), не есть определители общего вида. В эти формулы входят определители от матриц Тейлора, в которых элементы, расположенные на диагоналях, параллельных главной, – одинаковые.

Для вычисления (18)–(21) можно использовать рекуррентную схему, получившую название “алгоритм частных и разностей” или QD-алгоритм Рундсхаузера [9].

Для примера рассмотрим решение уравнения

$$x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{5}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{11}x + \frac{1}{12} = 0 \quad (24)$$

с использованием r/φ -алгоритма, в данном случае определенном формулами (22) и (23).

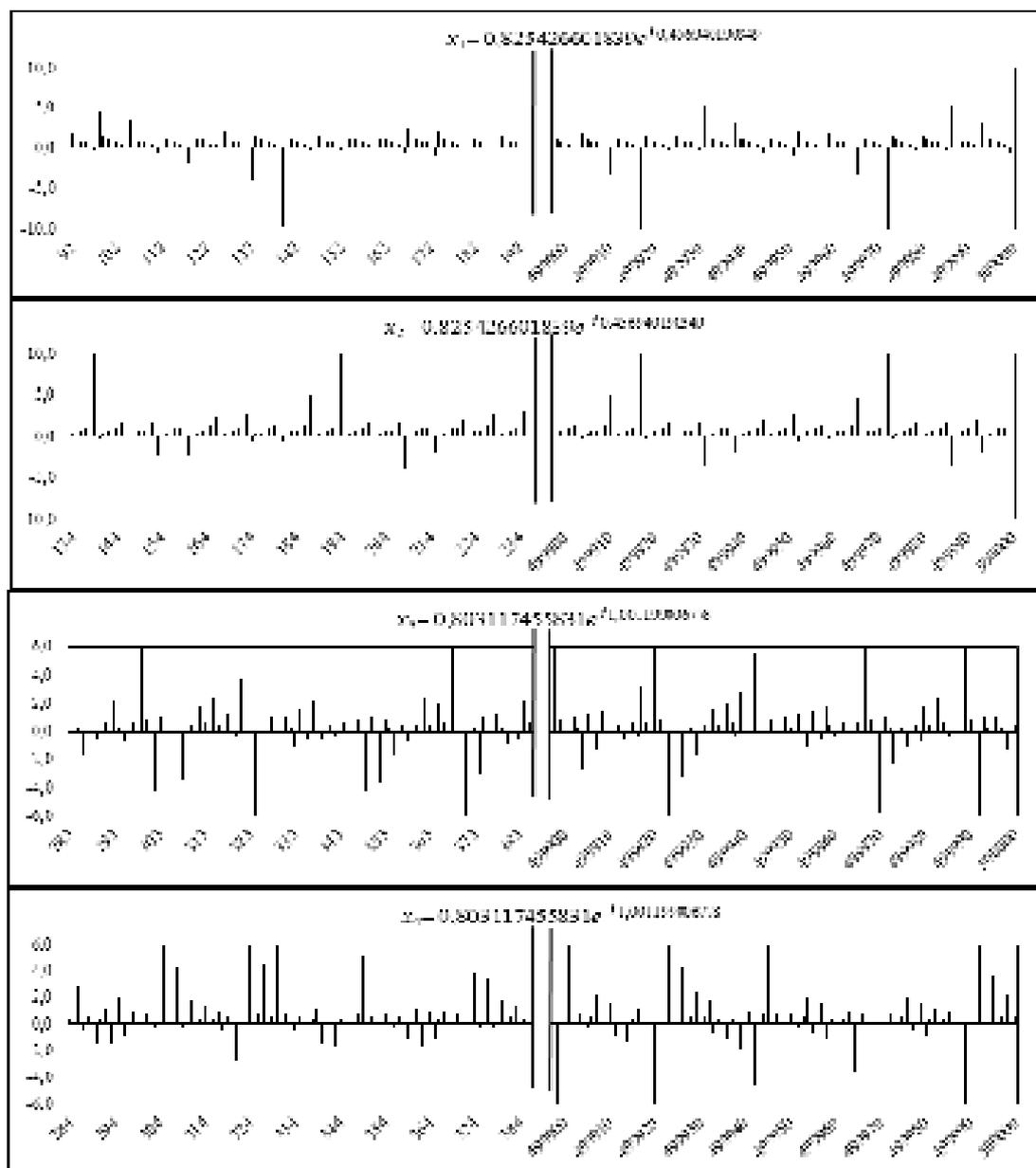


Рис. 3. Распределение подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (24)

На рис. 3 показаны графики распределения подходящих непрерывных дробей, которые представляют первые две пары комплексно-сопряженных корней алгебраического уравнения (24).

В табл. 3 и 4 приведены результаты вычисления первой пары комплексно-сопряженных корней уравнения (24) при помощи r/φ -алгоритма, то есть формул (22) и (23).

Таблица 4. $x_1 = 0,825426601839e^{i0,456940190349}$

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
128	0,856370612311	0,845105032261	-0,019678430422	0,424539547782	0,032400642567
256	16,143892048442	0,825785447265	-0,000358845426	0,456958931431	-0,000018741082
512	1,123631143666	0,826954794360	-0,001528192521	0,455195135081	0,001745055268
1024	0,455119840748	0,825433239778	-0,000006637939	0,454571284281	0,002368906068
2048	0,553668217148	0,825564163972	-0,000137562133	0,455908182739	0,001032007610
4096	0,706616451970	0,825567329958	-0,000140728119	0,456531067263	0,000409123086
8192	1,028537277040	0,825510151203	-0,000083549364	0,456832014064	0,000108176285
16384	0,233171968534	0,825377907111	0,000048694728	0,456787147631	0,000153042718
32768	0,118598000966	0,825381628314	0,000044973525	0,456861042625	0,000079147724
65536	-0,275773576857	0,825409693152	0,000016908687	0,456945839553	-0,000005649204
131072	14,164753886741	0,825427091119	-0,000000489280	0,456940179442	0,000000010907
262144	1,116765194917	0,825429065048	-0,000002463209	0,456937352336	0,000002838013

Таблица 5. $x_2 = 0,825426601839e^{-i0,456940190349}$

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
256	-14,664188997090	0,844450967957	-0,019024366118	-0,459745266379	0,002805076030
512	0,357854174564	0,824184302406	0,001242299433	-0,455903947091	-0,001036243258
1024	1,026366880816	0,824775244209	0,000651357630	-0,454843380823	-0,002096809526
2048	0,927818504413	0,825070650084	0,000355951755	-0,456064103237	-0,000876087112
4096	0,774870269591	0,825231107454	0,000195494385	-0,456613012482	-0,000327177867
8192	0,452949444521	0,825354859349	0,000071742490	-0,456873878894	-0,000066311455
16384	1,248314753027	0,825406109723	0,000020492116	-0,456807792778	-0,000132397571
32768	1,362888720595	0,825420019766	0,000006582073	-0,456871418230	-0,000068772119
65536	1,757260298418	0,825428416468	-0,000001814629	-0,456903036878	-0,000037153471
131072	-12,683267165180	0,825443398339	-0,000016796500	-0,456942790823	0,000002600474
262144	0,364721526644	0,825424773835	0,000001828004	-0,456938656910	-0,000001533439

В табл. 5 приведены результаты вычисления корней уравнения (24) r/φ -алгоритмом.

Следует отметить, что точность вычислений комплексно-сопряженных корней при использовании r/φ -алгоритма растет не монотонно, а асимптотически.

Также при помощи r/φ -алгоритма был установлен вещественный корень уравнения (24) $x_{11} = -0,784972055437 \dots$

Ниже приведены результаты тестирования r/φ -алгоритма. Рассматривались уравнения со

Таблица 6.

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	0,825429065048	-0,000002463209	0,456937352336	0,000002838013
x_2	0,825424773835	0,000001828004	-0,456938656910	-0,000001533439
x_3	0,803119357446	-0,000001901615	1,001196552841	0,000002453937
x_4	0,803117384671	0,000000071160	-1,001188379054	-0,000010627724
x_5	0,793441786197	-0,000004233106	1,538831941630	0,000008021859
x_6	0,793435450039	0,000002103052	-1,538837826625	-0,000002136864
x_7	0,788344701400	0,000002516973	2,074006033078	0,000002785567
x_8	0,788348270999	-0,000001052626	-2,074013993125	0,000005174480
x_9	0,785766735307	0,000001486384	2,608035936604	0,000000984810
x_{10}	0,785770848718	-0,000002627027	-2,608046034429	0,000009113015

случайными коэффициентами a_1, a_2, \dots, a_{10} :

$$x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \dots + a_9x + a_{10} = 0, \quad (25)$$

где $a_1, a_3, \dots, a_{10} \in [-1000000, 1000000]$.

Для вычисления подходящих дробей использовался “QD-алгоритм Рутисхаузера с отрицательными индексами”. Требовалось установить на десяти тысячах уравнений 10-й степени (25), достигается ли заданная точность в определении действительных и комплексных корней при помощи r/φ -алгоритма, то есть формул (22) и (23). На основе проведенных расчетов можно считать экспериментально подтвержденной работоспособность r/φ -алгоритма при нахождении нулей полинома. Для 10000 алгебраических уравнений десятой степени со случайными коэффициентами все корни, найденные при помощи r/φ -алгоритма, имеют относительную погрешность не более, чем 0,001. Не было найдено ни одного уравнения, для которого корни не сходились бы к точным решениям с установленной погрешностью. Необходимое число подходящих дробей для достижения заданной точности зависит от конкретного уравнения.

При экспериментальной проверке r/φ -алгоритма решались алгебраические уравнения до 32-й степени. Следует отметить, что в статье не рассматривается сравнительная эффективность предлагаемого алгоритма с существующими способами решения алгебраических уравнений.

4. ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Известно, что при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений встречаются принципиальные трудности. В [10] авторы пишут: “Уже в самых простых случаях, даже при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, часто бывает, что, казалось бы, разумная разностная схема имеет решение, не сходящееся при измельчении сетки к истинному решению дифференциального уравнения”.

Разработанный способ суммирования расходящихся в традиционном смысле непрерывных дробей помог понять природу трудностей, возникающих при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Поясним примером. Как известно, удобный метод решения разностной краевой задачи, представляющий один из вариантов исключения неизвест-

ных и носящий название “прогонки”, фактически эквивалентен записи решения обыкновенной непрерывной дробию. То есть, для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений решения могут представляться как сходящимися непрерывными дробями, так и расходящимися. Что принимать в случае расходящихся непрерывных дробей за решения СЛАУ? Значения “расходящихся” непрерывных дробей могут быть установлены при помощи r/φ -алгоритма.

В самом деле, довольно часто возникает следующая ситуация: решения системы существуют, но при измельчении шага сетки значения решений системы изменяются, причем, скачкообразно, то есть с ростом размерности СЛАУ не можем найти пределы, к которым бы эти решения стремились. В этом случае говорят, что система является “расходящейся” и решения не могут быть записаны. Возникает вопрос: что это означает для рассматриваемой СЛАУ? Ответ состоит в следующем: если решаемая система “расходится”, то возможно существование комплексных решений данной СЛАУ, которые традиционными методами решения не могут быть установлены.

Процесс нахождения решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) при помощи r/φ -алгоритма состоит из двух этапов.

Рассмотрим БСЛАУ

$$AX = B, \tag{26}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \end{pmatrix}, X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots], B = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots]^T,$$

где A – матрица коэффициентов, X – вектор искомых решений, B – правая часть системы линейных алгебраических уравнений.

Для того чтобы узнать, “расходится” данная система или нет, решаем одним из классических методов подсистемы смежных порядков, например 1, 2, 3, ... и строим последовательности, состоящие из их решений $\{\bar{x}_i\}$, т.е. последовательности вида

$$\{\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_1^{(3)}, \dots, \bar{x}_1^{(m)}\}, \{\bar{x}_2^{(2)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_2^{(4)}, \dots, \bar{x}_2^{(m)}\}, \dots, \{\bar{x}_n^{(n)}, \bar{x}_n^{(n+1)}, \bar{x}_n^{(n+2)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}. \tag{27}$$

Если каждая последовательность стремится к некоторому “своему” пределу с ростом размерности m системы, то последовательность корней $\{\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, \bar{x}_3^{(m)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}$, $m \rightarrow \infty$, будет являться, с некоторой степенью точности, искомым решением рассматриваемой БСЛАУ. В случае, если пределы последовательностей (27) отсутствуют, требуется использовать уже упомянутый выше r/φ -алгоритм, что составляет следующий этап решения расходящихся БСЛАУ. Следует отметить, что при решении “расходящейся” СЛАУ $m \gg n$, что обусловлено r/φ -алгоритмом, требующим для определения комплексного числа большого количества вещественных “отсчетов”. Предложенный в [11] алгоритм позволяет использовать полученные в общем случае “по Гауссу” вещественные решения расширяющейся системы (26) для получения множества комплексных решений исходной системы, если они имеются.

При решении расходящихся БСЛАУ модуль r_i комплексного корня x_i находится по формуле

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_i^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, i = 1, 2, \dots, n; \tag{28}$$

где $\bar{x}_i^{(m)}$ — значение вещественной неизвестной, полученное “стандартным” алгоритмом решения СЛАУ размерности m .

Модуль аргумента φ_i комплексного корня x_i БСЛАУ определяется следующим образом:

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_i^{(m)}}{m}, \quad (29)$$

где $k_i^{(p)}$ — количество отрицательных значений \bar{x}_i , полученных “стандартным” алгоритмом решения СЛАУ из общего количества m значений \bar{x}_i , найденных из “расширяющейся” системы.

Несмотря на кажущуюся сложность, данный способ решения БСЛАУ достаточно экономичен, а главное – метод позволяет решать расходящиеся в традиционном смысле БСЛАУ, что не обеспечивают известные алгоритмы решения БСЛАУ.

В качестве примера рассмотрим решение при помощи r/φ -алгоритма расходящейся бесконечной системы (30).

Таблица 7.

Размерность системы, m	Значение $\bar{x}_1^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(m)}$
1	1,000000000000E+00	—	—
2	2,500000000000E-01	5,000000000000E-01	0,000000000000E+00
3	1,176470588235E-01	3,086789594993E-01	0,000000000000E+00
4	-2,000000000000E-01	2,769413275131E-01	7,853981633974E-01
7	5,511811023622E-02	2,222264956834E-01	4,487989505128E-01
8	-4,250000000000E+00	3,213623350779E-01	7,853981633974E-01
15	-4,316594612571E-01	2,586318164389E-01	8,377580409573E-01
16	3,566826367091E-01	2,638802890571E-01	7,853981633974E-01
31	2,368807660622E-01	2,338062307929E-01	7,093918895203E-01
32	1,059969835469E-01	2,280970928948E-01	6,872233929728E-01
63	3,535238227882E-01	2,262750841807E-01	7,479982508547E-01
64	1,745241108523E-01	2,253588030476E-01	7,363107781851E-01
127	-3,252270368534E-01	2,200670942025E-01	7,421085008480E-01
128	3,769412205239E-01	2,209942810126E-01	7,363107781851E-01
255	2,545459857837E-01	2,245282017180E-01	7,022383578612E-01
256	1,213393341306E-01	2,239890962004E-01	6,994952392759E-01
511	4,544313219042E-01	2,191004764571E-01	7,070120453284E-01
512	2,021042090470E-01	2,190659250807E-01	7,056311624274E-01
1023	-1,468533026117E-02	2,191323997622E-01	7,063209289596E-01
1024	8,316406972992E-01	2,194179980411E-01	7,056311624274E-01
2047	7,182382967496E-01	2,184842239440E-01	7,029064168755E-01
2048	2,349945882313E-01	2,184919957063E-01	7,025632008516E-01
4095	8,970276633117E-02	2,184996917478E-01	7,027347669568E-01
4096	-5,225224025607E-01	2,185462070065E-01	7,033301912456E-01

Решить систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (30)$$

В табл. 6 приведены результаты определения x_i системы (30) с использованием r/φ -алгоритма, то есть формул (28) и (29). В первой колонке таблицы указана размерность m решаемых систем. Во второй колонке помещены значения $x_1^{(m)}$, полученные по методу прогонки. Как видно из таблиц, значения $x_1^{(m)}$, полученные “по прогонке” для расходящейся системы, не стремятся к какому-либо пределу. В то же время в колонках 3 и 4 таблицы 6 с ростом размерности m системы (30) устанавливаются значения, соответственно, модуля и аргумента комплексного решения $x_1^{(m)}$ системы (30).

Аналогично находятся значения x_i ($i = 2, 3, \dots$) системы (30).

Таблица 8.

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части	Абсолютная погрешность
1	1,001299469052E+00 i1,762678328659E-03	1	1,299469051622E-03 i1,762678328659E-03
2	1,001615385287E+00 i1,823158910945E-03	1	1,615385286690E-03 i1,823158910945E-03
4	1,001420584071E+00 i1,786263723479E-03	1	1,420584071188E-03 i1,786263723479E-03
8	1,000966887833E+00 i1,224856975491E-03	1	9,668878325528E-04 i1,224856975491E-03
16	1,001094874798E+00 i1,078635879098E-03	1	1,094874797582E-03 i1,078635879098E-03
32	1,001217090677E+00 i1,378751449401E-03	1	1,217090677040E-03 i1,378751449401E-03
64	1,000939873348E+00 i9,321736272402E-04	1	9,398733476283E-04 i9,321736272402E-04
128	1,001321599553E+00 i3,972567037168E-04	1	1,321599553336E-03 i3,972567037168E-04
256	1,000792866804E+00 i1,707477617846E-03	1	7,928668038036E-04 i1,707477617846E-03
512	1,001030405321E+00 i1,250966938645E-03	1	1,030405321258E-03 i1,250966938645E-03
1024	1,000587637913E+00 i2,199988158475E-03	1	5,876379127570E-04 i2,199988158475E-03
2048	1,000849453587E+00 i4,776958470371E-03	1	8,494535870614E-04 i4,776958470371E-03

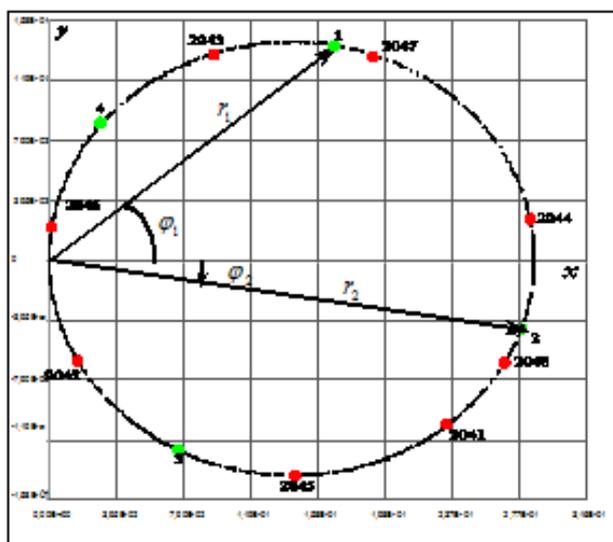


Рис. 4. Расположение x_i БСЛАУ (30) на комплексной плоскости

На рис. 4 показано размещение в комплексной плоскости значений неизвестных x_i ($i = 1, 2, \dots, 2048$) бесконечной системы (30).

В табл. 7 приведены результаты проверки решения расходящейся бесконечной системы (30), полученного при помощи r/φ -алгоритма. В первой колонке табл. 7 указаны номера строк системы (30), по которым проводилась проверка. Во второй колонке приведены значения проверяемых строк системы (30) после подстановки найденных комплексных x_i из решаемой системы (30) размерностью 4096. В третьей колонке даны значения правой части системы (30), в четвертой – абсолютные погрешности, допущенные при решении системы (30) с использованием r/φ -алгоритма.

Из табл.7 можно заключить, что погрешности, допущенные при решении системы (30) с использованием r/φ -алгоритма, весьма невелики ($\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4}$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случае алгебраических уравнений комплексные корни “извлекаются” из бесконечных конструкций (21), то есть с использованием подходящих непрерывных дробей, которыми представляются корни полинома n -й степени. Для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений аналогом конструкции (21) являются формулы Крамера, записываемые отношением двух бесконечных определителей. Комплексные корни бесконечных СЛАУ “извлекаются” из бесконечно “расширяющихся” формул Крамера. Для определения i -го комплексного корня бесконечных СЛАУ при помощи r/φ -алгоритма нужно получить множество значений этого корня из серии СЛАУ различной размерности. Если матрица СЛАУ имеет действительные элементы, то значения $x_i^{(m)}$ получаемые из “расширяющихся” формул Крамера, будут, естественно, также действительными. По этим действительным “отсчетам” или, в иной терминологии, по значениям подходящих дробей, при помощи r/φ -алгоритма устанавливаются, если они имеются, “истинные” комплексные значения неизвестных x_i бесконечных СЛАУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lorentzen L., Waadeland H. Continued fraction with application. – Amsterdam – London – New-York – Tokyo, 1992. – 606p.
- [2] Бейкер Дж., Грейвис–Морис П. Аппроксимация Паде. Перев. с англ. – М.: Мир, 1986.- 502с.
- [3] Джоунс У. , Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414с.
- [4] Шмойлов В. И. Периодические непрерывные дроби. – Львов: Академический экспресс, 1998. – 219с.
- [5] Шмойлов В. И. Непрерывные дроби в 3-х т. Т.2. Расходящиеся непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 2004. – 558с.
- [6] Шмойлов В. И. Непрерывные дроби в 3-х т. Т.3. Из истории непрерывных дробей. – Львов: Меркатор, 2004. – 520с.
- [7] Шмойлов В. И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями. – Львов: Меркатор, 2003. – 599с.
- [8] Aitken A. On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. – Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Ser. A., 46(1925/26), 289-305
- [9] Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93с.
- [10] Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440с.
- [11] Шмойлов В. И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. - Таганрог, Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205с.

Шмойлов В. И., научный сотрудник Южного научного центра Российской академии наук
E-mail: Smoylov40@at.infotectt.ru
Тел.: (863-4)36-83-37

Shmoylov V. I., research worker of the Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences
E-mail: Smoylov40@at.infotectt.ru
Tel.: (863-4)36-83-37

Савченко Д. И., аспирант Технологического института Южного Федерального университета
E-mail: Lux2057@rambler.ru
Тел.: 8-952-562-74-87

Savchenko D. I., a graduate at the Technological Institute of Southern Federal University
E-mail: Lux2057@rambler.ru
Tel.: 8-952-562-74-87