УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ГЕРШЕЛЬ-БАЛКЛИ*

М. В. Турбин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.09.2013 г.

Аннотация: в работе доказывается существование слабого решения начально-краевой задачи с условием прилипания на границе для математической модели движения жидкости Гершель-Балкли.

Ключевые слова: начально-краевая задача, слабое решение, теорема существования, модель Гершель-Балкли.

Abstract: in this paper the existence of weak solution of the initial-boundary value problem with no-slip condition on the boundary for the Herschel-Bulkley mathematical fluid model is proved.

Keywords: initial-boundary value problem, weak solution, existence theorem, Herschel-Bulkley model.

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет активно изучаются математические модели неньютоновской гидродинамики, удовлетворяющие принципу объективности поведения материала [1]. Это один из основных принципов рациональной механики, который выражает тот факт, что свойства материала не зависят от выбора наблюдателя. Данные модели особенно сложны для изучения и на настоящее время практически не изучены (имеется только небольшое количество работ, посвящённых таким моделям, большая часть из которых посвящена исследованию стационарных моделей, что значительно упрощает задачу, однако, данные упрощения описывают только установившиеся течения и не дают ответа на исходные вопросы). В качестве примера работ, посвящённых изучению таких моделей, можно привести монографии [2] и [3]. При этом именно такие модели наиболее точно описывают поведение среды и именно их исследование является наиболее актуальным. Стоит отметить, что задачи исследования данных моделей имеют большое количество приложений в механике, медицине, полимерной промышленности и других.

Модель движения жидкости Гершель-Балкли [4] является как раз моделью, удовлетворяющей принципу объективности поведения материала. Она достаточно универсальна и часто используется для описания деформативных свойств жидкообразных материалов и паст (красок, глиняного теста, бетонной смеси), а также твердых материалов (бетона, металла) и многих других. Хорошим примером такой жидкости является краска — за счёт действия связующих веществ возникает порог для напряжения сдвига, и она способна образовывать неподвижные слои на вертикальных поверхностях. Любые другие жидкости будут стекать

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №12-01-31188 мол_а

вниз. Для подобных жидкостей возможно наблюдение и других эффектов, связанных с нелинейностью, либо с существованием порога текучести.

Для модели движения жидкости Гершель-Балкли имеется большое количество работ, посвященных исследованию различных стационарных задач (см., например, [5] и имеющуюся там библиографию). Однако, нестационарные задачи для данной модели не исследованы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$ — ограниченная область с локально-липшицевой границей. Как известно, движение несжимаемой жидкости в области Ω на промежутке времени $[0,T], T < \infty$ описывается следующей системой уравнений в форме Коши:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = Div\sigma + f, \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times [0;T]; \tag{1}$$

$$div\, v = 0 \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times [0;T]. \tag{2}$$

Здесь, $v(x,t)$ скорость жидкости точке x в момент времени t; $p = p(x,t)$ — давление в жидкости в точке x в момент времен t; $f = f(x,t)$ — плотность внешних сил; $\sigma = (\sigma_{ij}(x))$ — девиатор тензора напряжений. Через $Div\sigma$ обозначен вектор составленный из дивергенций столбцов матрицы σ.

Жидкость Гершель-Балкли описывается следующим определяющим соотношением:

$$\begin{cases} \sigma = \nu|\mathcal{E}(v)|^{p-2}\mathcal{E}(v) + \mu\frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} \text{ при } |\mathcal{E}(v)| \neq 0; \\ |\sigma| \leqslant \mu \text{ при } |\mathcal{E}(v)| = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $p \in \mathbb{R}, p \geqslant \frac{3n+4}{n+2}$, μ — некоторая положительная константа, описывающая порог текучести жидкости, а $\nu > 0$ — вязкость жидкости.

Для системы (1)-(3) рассматривается начально-краевая задача с начальным условием

$$v(x,0) = a(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

и граничным условием

$$v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{5}$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $C_0^\infty(\Omega)^n$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, содержащимся в Ω. Через V_p и H обозначим пополнение множества гладких соленоидальных функций $\mathcal{V} = \{u : u \in C_0^\infty(\Omega)^n, div\, u = 0\}$ по нормам $W_p^1(\Omega)^n$ и $L_2(\Omega)^n$ соответственно. $(V_p)^*$ — пространство сопряженное к V_p. Символ $\langle h, v\rangle$ обозначает действие функционала $h \in (V_p)^*$ на функцию $v \in V_p$. Мы будем рассматривать V_p с нормой $\|u\|_{V_p} = \left(\int\limits_\Omega |\mathcal{E}(u)(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$, эквивалентной норме, индуцированной нормой пространства $W_p^1(\Omega)^n$, в силу неравенства Корна.

Будем предполагать, что $a \in H, f \in L_{p'}(0,T;(V_p)^*)$. Здесь и далее $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Определение 1. Пара функций (v,σ), $v \in W_p = \{u : u \in L_p(0,T,V_p),\, v' \in L_{p'}(0,T,(V_p)^*)\}$, $\sigma \in L_{p'}(0,T,L_{p'}(\Omega)^{n^2})$ называется слабым решением начально-краевой задачи (1)-(5), если она для всех $\varphi \in V_p$ и почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle v'(t),\varphi\rangle - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\Omega}\sigma(t):\nabla\varphi dx = \langle f(t),\varphi\rangle,$$

удовлетворяет реологическому соотношению (3) почти всюду на Q_T и удовлетворяет начальному условию: $v(0) = a$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 2. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи* (1)-(5).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Для доказательства теоремы 2 используется аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики (см. [2],[3],[6],[7]), а именно рассматривается аппроксимационная задача и доказывается существование решения этой задачи. Потом показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

3.1. Аппроксимационная задача. Операторная трактовка и свойства операторов

Для произвольного $\delta > 0$ рассмотрим аппроксимационную задачу: для $f \in L_{p'}(0,T;(V_p)^*)$ и $a \in H$ найти такое $v^\delta \in W_p$, что $\forall\varphi \in V_p$ выполнено равенство:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_\delta}{\partial t}\varphi\,dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{(v_\delta)_i(v_\delta)_j}{1+\delta|v_\delta|^2}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_{\Omega}|\mathcal{E}(v_\delta)|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta):\mathcal{E}(\varphi)\,dx +$$
$$+\mu\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)\mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\delta+|\mathcal{E}(v_\delta)|}\,dx = \langle f,\varphi\rangle, \quad (6)$$

при почти всех $t \in (0;T)$ и начальное условие:

$$v_\delta(0) = a. \quad (7)$$

Введем операторы действующие из V_p в $(V_p)^*$:

$$\langle B_\delta(v),\varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\delta+|\mathcal{E}(v)|}\mathcal{E}_{ij}(\varphi)dx, \quad \langle A_p(v),\varphi\rangle = \int\limits_{\Omega}|\mathcal{E}(v)|^{p-2}\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(\varphi)dx.$$

И оператор K :

$$\langle K(v),\varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{v_iv_j}{1+\delta|v|^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V_p. \quad (8)$$

Тогда задача (6)-(7) эквивалента следующей операторной задаче:

Для $f \in L_{p'}(0,T;(V_p)^*)$ и $a \in H$ найти функцию $v_\delta \in W_p$, удовлетворяющую операторному уравнению:

$$v'_\delta - K(v_\delta) + \nu A_p(v_\delta) + \mu B_\delta(v_\delta) = f, \tag{9}$$

и начальному условию (7).

Рассмотрим следующие операторы, действующие из W_p в $L_{p'}(0,T;(V_p)^*) \times H$:

$$L(u) = (u' + A_p(u) + B_\delta(u), u(0)) \quad \text{и} \quad G(u) = (K(u), 0).$$

Тогда существование слабого решения аппроксимационной задачи (6),(7) эквивалентно существованию решения операторного уравнения:

$$L(v_\delta) + G(v_\delta) = (f, a). \tag{10}$$

Чтобы не нагромождать обозначений через C мы будем обозначать различные константы, не зависящие от функции или параметра аппроксимации δ.

Для введенных операторов имеют место следующие свойства:

Лемма 1. *1. Оператор $A_p : L_p(0,T;V_p) \to L_{p'}(0,T;(V_p)^*)$ — непрерывный, равномерно монотонный, коэрцитивный и обладает (S) свойством. Обратный к нему оператор $A_p^{-1} : L_{p'}(0,T;(V_p)^*) \to L_p(0,T;V_p)$ — непрерывен, строго монотонен и ограничен.*

2. Оператор $B_\delta : L_p(0,T;V_p) \to L_{p'}(0,T;(V^p)^*)$ непрерывный, строго монотонный и имеет место неравенство: $\|B_\delta(v)\|_{L_{p'}(0,T;(V^p)^*)} \leqslant C$.

3. Оператор $K : W_p \to L_{p'}(0,T;(V^p)^*)$ вполне непрерывный и для него имеет место неравенство: $\|K(v)\|_{W_p} \leqslant C\|v\|^2_{L_p(0,T;L_4(\Omega)^n)}$.

4. Оператор $L : W_p \to L_{p'}(0,T;(V_p)^*) \times H$ — непрерывен, обратим и обратный к нему оператор $L^{-1} : L_{p'}(0,T;(V_p)^*) \times H \to W_p$ непрерывен.

5. Оператор $G : W_p \to L_{p'}(0,T;(V_p)^*) \times H$ — вполне непрерывен.

Доказательство. Доказательство первого из утверждений данной леммы полностью аналогично доказательству подобных утверждений для оператора p-Лаплас (см., например [8]). Доказательство второго и последнего утверждений является чисто техническим и не приводится из-за своей величины. Доказательство третьего пункта данной леммы полностью аналогично доказательству леммы для конвективного члена в монографии [6]. Доказательство четвертого утверждения леммы основано на теореме 1.3 ([9], с. 198), свойствах оператора A_p и коэрцитивных оценках. $\square$

3.2. Априорные оценки решений

Рассмотрим следующее семейство операторных уравнений (здесь $\lambda \in [0,1]$):

$$v'_\delta + \nu A_p(v_\delta) + \mu B_\delta(v_\delta) - \lambda K(v_\delta) = \lambda f, \tag{11}$$

решение которых удовлетворяет начальному условию

$$v_\delta(0) = \lambda a. \tag{12}$$

Теорема 3. *Если v_δ — решение семейства операторных уравнений* (11), *удовлетворяющее начальному условию* (12), *то оно удовлетворяет следующей оценке*

$$\|v_\delta'\|_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*))} + \|v_\delta\|^2_{C([0,T],H)} + \|v_\delta\|^p_{L_p(0,T;V_p)} \leqslant C, \tag{13}$$

где константа C зависит только от ν, μ, f, a и не зависит от v_δ и δ.

Доказательство. Найдем сначала оценку на вторые два слагаемых последнего неравенства. Для этого применим обе части первого уравнения к v_δ. В силу определений операторов имеем

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v_\delta}{\partial t} v_\delta \, dx - \lambda \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{(v_\delta)_i (v_\delta)_j}{1+\delta|v_\delta|^2} \frac{\partial (v_\delta)_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_\delta)|^{p-2} \mathcal{E}(v_\delta) : \mathcal{E}(v_\delta) \, dx +$$
$$+ \mu \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)}{\delta + |\mathcal{E}(v_\delta)|} \, dx = \lambda \langle f, v_\delta \rangle. \tag{14}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в данное равенство. Для первого слагаемого получим $\int\limits_\Omega \frac{\partial v_\delta}{\partial t} v_\delta \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega v_\delta v_\delta \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\delta\|^2_H$. Для второго слагаемого аналогично монографии [6] имеем $\sum\limits_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{(v_\delta)_i (v_\delta)_j}{1+\delta|v_\delta|^2} \frac{\partial (v_\delta)_j}{\partial x_i} \, dx = 0$ в силу соленоидальности функции v_δ. Для следующего слагаемого получим $\nu \int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_\delta)|^{p-2} \mathcal{E}(v_\delta) : \mathcal{E}(v_\delta) \, dx = \nu \|v_\delta\|^p_{V_p}$. Четвертое слагаемое неотрицательно как интеграл от неотрицательной функции.

Правую часть равенства (14) можно оценить сверху следующим образом:

$$\lambda \langle f, v_\delta \rangle \leqslant \lambda \|f\|_{(V_p)^*} \|v_\delta\|_{V_p} \leqslant \|f\|_{(V_p)^*} \|v_\delta\|_{V_p} \leqslant \frac{\|f\|^{p'}_{(V_p)^*}}{\nu p'} + \frac{\nu \|v_\delta\|^p_{V_p}}{p}.$$

Тогда из равенства (14) следует следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\delta\|^2_H + \frac{\nu(p-1)}{p}\|v_\delta\|^p_{V_p} \leqslant \frac{\|f\|^{p'}_{(V_p)^*}}{\nu p'}. \tag{15}$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до $\tau \in [0, T]$. Получим:

$$\frac{1}{2}\|v_\delta(\tau)\|^2_H + \int\limits_0^\tau \frac{\nu(p-1)}{p}\|v_\delta(s)\|^p_{V_p} ds \leqslant \frac{\|f\|^{p'}_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*)}}{\nu p'} + \|a\|^2_H.$$

Отсюда следуют две оценки:

$$\frac{1}{2}\|v_\delta\|^2_{C([0,T],H)} = \frac{1}{2}\max_{\tau\in[0,T]} \|v_\delta(\tau)\|^2_H \leqslant \frac{\|f\|^{p'}_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*)}}{\nu p'} + \|a\|^2_H; \tag{16}$$

$$\frac{\nu(p-1)}{p}\|v_\delta\|^p_{L_p(0,T;V_p)} = \int\limits_0^T \frac{\nu(p-1)}{p}\|v_\delta(s)\|^p_{V_p} ds \leqslant \frac{\|f\|^{p'}_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*)}}{\nu p'} + \|a\|^2_H. \tag{17}$$

Переходим ко второй части доказательства — получению оценки на v'_δ. Для этого перепишем (11) в виде:

$$v'_\delta = \lambda f - \nu A_p(v_\delta) - \mu B_\delta(v_\delta) + \lambda K(v_\delta).$$

Отсюда получим, что

$$\|v'_\delta\|_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*))} \leqslant \|f\|_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*))} + \nu \|A_p(v_\delta)\|_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*))} + \mu \|B_\delta(v_\delta)\|_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*))} + \\ + \|K(v_\delta)\|_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*))} \leqslant \|f\|_{L_{p'}(0,T;(V_p)^*))} + \nu C_1 \|v_\delta\|_{L_p(0,T;V_p))} + \mu C_2 + \|v_\delta\|^2_{L_p(0,T;V_p)}.$$

Так как в силу первой части доказательства у нас оценены сверху все слагаемые в правой части последнего неравенства, мы и получим требуемую оценку (13). □

3.3. Разрешимость аппроксимационного уравнения

Вместе с (10) будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений:

$$L(v_\delta) + \lambda G(v_\delta) = \lambda(f, a), \quad \lambda \in [0; 1]. \tag{18}$$

В силу четвертого пункта леммы 1 имеем, что оператор L непрерывно обратим как оператор из W_p в $L_{p'}(0,T;(V_p)^*) \times H$. Следовательно, уравнение (18) можно переписать в виде:

$$v_\delta = F(\lambda, v_\delta), \quad \text{где } F(\lambda, v_\delta) = L^{-1}(\lambda(f,a) - \lambda G(v_\delta)).$$

Оператор G — вполне непрерывный оператор как сумма вполне непрерывного (в силу последнего пункта леммы 1) оператора и постоянного отображения. Оператор L^{-1} — непрерывен. Таким образом, отображение F, стоящее в правой части последнего уравнения вполне непрерывно по совокупности переменных.

Тогда для него определена степень Лере-Шаудера $\deg_{LS}(I - F, B_R(0), 0)$, где $R = C + 1$, где C — константа из априорной оценки (13). В силу свойства гомотопической эквивалентности степени Лере-Шаудера, имеем, что $\deg_{LS}(I - F, B_R(0), 0) = \deg_{LS}(I, B_R(0), 0)$. Поскольку $\deg_{LS}(I, B_R(0), 0) = 1$, то и $\deg_{LS}(I - F, B_R(0), 0) = 1$. Следовательно, уравнение (10) имеет хотя бы одно решение, поэтому и аппроксимационная задача (6),(7) имеет хотя бы одно решение.

3.4. Предельный переход

В прошлом пункте мы доказали, что задача

$$v'_\delta + \nu A_p(v_\delta) + \mu B_\delta(v_\delta) - K(v_\delta) = f, \tag{19}$$
$$v_\delta(0) = a. \tag{20}$$

для каждого $\delta > 0$ и при любых $a \in H$ и $f \in L_{p'}(0,T;(V_p)^*)$ имеет хотя бы одно решение $v_\delta \in W_p$.

В силу априорной оценки (13) и вложения:

$$L_p(0,T;V_p) \cap L_\infty(0,T;H) \subset L_{p\frac{n+2}{n}}(Q_T)^n$$

имеют место следующие сходимости:

$$v_\delta \rightharpoonup v_* \quad \text{слабо в } L_p(0,T;V_p); \tag{21}$$

$$v'_\delta \rightharpoonup v'_* \quad \text{слабо в } L_{p'}(0,T;(V_p)^*); \tag{22}$$

$$\nu|\mathcal{E}(v_\delta)|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta) + \mu\frac{\mathcal{E}(v_\delta)}{\delta+|\mathcal{E}(v_\delta)|} \rightharpoonup S \quad \text{слабо в } L_{p'}(0,T;L_{p'}(\Omega)^n); \tag{23}$$

$$\frac{(v_\delta)_i(v_\delta)_j}{1+\delta|v_\delta|^2} \rightharpoonup H_{ij} \quad \text{слабо в } L_{p\frac{n+2}{n}}(Q_T). \tag{24}$$

Устремляя в (19) параметр δ к нулю, и вспоминая определения операторов из (19) получаем, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему интегральному равенству:

$$\langle v'_*(t),\varphi\rangle - \int\limits_\Omega H_{ij}(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \int\limits_\Omega S(t):\nabla\varphi dx = \langle f(t),\varphi\rangle.$$

Далее, из оценки (13) также имеем, что $v_\delta \in C([0,T],H)$. В частности, вспоминая, что в силу (20) каждое $v_\delta(0)=a$ отсюда получаем, что $v_*(0)=a$.

Аналогично монографии [6] можно показать, что $H_{ij}=(v_*)_i(v_*)_j$.

Таким образом, для завершения доказательства нам остается показать, что S удовлетворяет соотношению

$$\begin{cases} S=\nu|\mathcal{E}(v_*)|^{p-2}\mathcal{E}(v_*) + \mu\frac{\mathcal{E}(v_*)}{|\mathcal{E}(v_*)|} \text{ при } |\mathcal{E}(v_*)|\neq 0; \\ |S|\leqslant\mu \text{ при } |\mathcal{E}(v_*)|=0. \end{cases} \tag{25}$$

На самом деле, применив (19) к разности $v_\delta - v_*$, получим

$$\langle v'_\delta(t),(v_\delta(t)-v_*(t))\rangle - \sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega \frac{(v_\delta)_i(t)(v_\delta)_j(t)}{1+\delta|v_\delta(t)|^2}\frac{\partial((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))}{\partial x_i}dx+$$

$$+\nu\int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v_\delta(t))|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta(t)):\mathcal{E}(v_\delta(t)-v_*(t))\,dx+$$

$$+\mu\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta(t))\mathcal{E}_{ij}((v_\delta(t)-v_*(t)))}{\delta+|\mathcal{E}(v_\delta(t))|}\,dx = \langle f(t),(v_\delta(t)-v_*(t))\rangle.$$

Заметим, что

$$\langle v'_\delta(t),(v_\delta(t)-v_*(t))\rangle = \langle (v_\delta-v_*)'(t),(v_\delta-v_*)(t)\rangle + \langle v'_*(t),(v_\delta-v_*)(t)\rangle =$$
$$= \frac{d}{dt}\|v_\delta - v_*(t)\|_H^2 + \langle v'_*(t),(v_\delta-v_*)(t)\rangle.$$

Проинтегрировав полученное равенство от 0 до $t\in[0,T]$, получим, что

$$\int\limits_0^t \langle v'_\delta(s),(v_\delta(s)-v_*(s))\rangle ds = \|v_\delta(t)-v_*(t)\|_H^2 - \|v_\delta(0)-v_*(0)\|_H^2+$$

$$+\int\limits_0^t\langle v'_*(s),(v_\delta-v_*)(s)\rangle ds = \|v_\delta(t)-v_*(t)\|_H^2 + \int\limits_0^t\langle v'_*(s),(v_\delta-v_*)(s)\rangle ds \to 0$$

при $\delta \to 0$. Здесь первое слагаемое сходится к нулю при почти всех $t \in (0,T)$ в силу сильной сходимости последовательности v_δ к v_* в $L_p(0,T;H)$, а второе слагаемое стремится к нулю в силу слабой сходимости v_δ к v_* в $L_p(0,T;V_p)$.

Переходим к следующему слагаемому

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{(v_\delta)_i(t)(v_\delta)_j(t)}{1+\delta|v_\delta(t)|^2}\frac{\partial((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))}{\partial x_i}dx =\\
=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(v_\delta)_i(t)}{\partial x_i}\frac{(v_\delta)_j(t)}{1+\delta|v_\delta(t)|^2}((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))dx+\\
+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(v_\delta)_i(t)\frac{\partial(v_\delta)_j(t)}{\partial x_i}\frac{1}{1+\delta|v_\delta(t)|^2}((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))dx+\\
+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(v_\delta)_i(t)(v_\delta)_j(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{1+\delta|v_\delta(t)|^2}\right)((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))dx =\\
=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(v_\delta)_i(t)\frac{\partial(v_\delta)_j(t)}{\partial x_i}\frac{1}{1+\delta|v_\delta(t)|^2}((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))dx+\\
+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(v_\delta)_i(t)(v_\delta)_j(t)\frac{2\delta\sum\limits_{k=1}^{n}(v_\delta)_k(t)\frac{(v_\delta)_k(t)}{\partial x_i}}{\left(1+\delta|v_\delta(t)|^2\right)^2}((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))dx.
\end{aligned}
$$

Оценим теперь каждый из полученных интегралов по отдельности. Для первого, воспользовавшись тем, что $\frac{1}{1+\delta|v_\delta(t)|^2} \leqslant 1$, имеем:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(v_\delta)_i(t)\frac{\partial(v_\delta)_j(t)}{\partial x_i}\frac{1}{1+\delta|v_\delta(t)|^2}((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))dx \leqslant\\
\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\|(v_\delta)_i(t)\|_{L_{p\frac{n+2}{n}}(\Omega)}\left\|\frac{\partial(v_\delta)_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)}\|(v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant\\
\leqslant C\,\|(v_\delta)(t)\|_{L_{p\frac{n+2}{n}}(\Omega)^n}\,\|\nabla v_\delta(t)\|_{L_p(\Omega)^{n^2}}\,\|v_\delta(t)-v_*(t)\|_{L_q(\Omega)^n}\,.
\end{aligned}
$$

Здесь рассмотрен более сложный случай $n=3$ и $p<3$. В этом случае $q<\frac{np}{n-p}$. Для $n=2$ и в остальных случаях для $n=3$ в силу теоремы Релиха-Кондрашова о компактном вложении можно взять $q=\infty$.

Для второго слагаемого, аналогично получим:

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(v_\delta)_i(t)(v_\delta)_j(t)\frac{2\delta\sum\limits_{k=1}^{n}(v_\delta)_k(t)\frac{(v_\delta)_k(t)}{\partial x_i}}{\left(1+\delta|v_\delta(t)|^2\right)^2}((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))dx \leqslant
$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |(v_\delta)_i(t)| \frac{2\delta|(v_\delta)_j(t)||(v_\delta)_k(t)|}{\left(1+\delta|v_\delta(t)|^2\right)^2} \left|\frac{(v_\delta)_k(t)}{\partial x_i}\right| |(v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t)|dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} \|(v_\delta)_i(t)\|_{L_{p\frac{n+2}{n}}(\Omega)} \left\|\frac{\partial(v_\delta)_k(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)} \|(v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C\,\|(v_\delta)(t)\|_{L_{p\frac{n+2}{n}}(\Omega)^n} \|\nabla v_\delta(t)\|_{L_p(\Omega)^{n^2}} \|v_\delta(t)-v_*(t)\|_{L_q(\Omega)^n}.$$

Следовательно, имеет место следующая оценка сверху:

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{(v_\delta)_i(t)(v_\delta)_j(t)}{1+\delta|v_\delta(t)|^2} \frac{\partial((v_\delta)_j(t)-(v_*)_j(t))}{\partial x_i} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\,\|(v_\delta)(t)\|_{L_{p\frac{n+2}{n}}(\Omega)^n} \|\nabla v_\delta(t)\|_{L_p(\Omega)^{n^2}} \|v_\delta(t)-v_*(t)\|_{L_q(\Omega)^n}.$$

Проинтегрировав эту оценку от 0 до $t \in [0,T]$, имеем

$$\int\limits_0^t \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{(v_\delta)_i(s)(v_\delta)_j(s)}{1+\delta|v_\delta(s)|^2} \frac{\partial((v_\delta)_j(s)-(v_*)_j(s))}{\partial x_i} dx\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^t \|(v_\delta)(s)\|_{L_{p\frac{n+2}{n}}(\Omega)^n} \|\nabla v_\delta(s)\|_{L_p(\Omega)^{n^2}} \|v_\delta(s)-v_*(s)\|_{L_q(\Omega)^n} ds \leqslant$$

$$\leqslant C\,\|(v_\delta)(s)\|_{L_{p\frac{n+2}{n}}(Q_T)^n} \|v_\delta(s)\|_{L_p(0,T;L_p(\Omega)^n)} \|v_\delta(s)-v_*(s)\|_{L_p(0,T;L_q(\Omega)^n)} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Далее, $\int\limits_0^t \langle f(t), v_\delta(t)-v_*(t)\rangle \to 0$ при $\delta \to 0$ в силу слабой сходимости (21).

Таким образом

$$\nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |\mathcal{E}(v_\delta(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta(s)) : \mathcal{E}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dx +$$

$$+\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s))\mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s)-v_*(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_\delta(s))|}\,dxds \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0. \quad (26)$$

Для первого члена в (26) имеем

$$\nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |\mathcal{E}(v_\delta(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta(s)) : \mathcal{E}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dx =$$

$$= \nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \left(|\mathcal{E}(v_\delta(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta(s)) - |\mathcal{E}(v_*(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_*(s))\right) : \mathcal{E}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dx +$$

$$+\nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |\mathcal{E}(v_*(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_*(s)) : \mathcal{E}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dx.$$

Отметим, что в силу слабой сходимости (21), второе слагаемое в правой части последнего равенства стремится к нулю.

Для второго члена в (26) получим

$$\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s))\mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s)-v_*(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_\delta(s))|}\,dxds =$$

$$= \mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_\delta(s))|} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_*(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_*(s))|} \right) \mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dxds+$$

$$+ \mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_*(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_*(s))|} \mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dxds. \quad (27)$$

Введем теперь следующие обозначения ($Q_t = \Omega \times (0;t)$):

$$A_1 = \{(x,t) \in Q_t,\, |\mathcal{E}(v_*)(x,t)| = 0\}, \quad A_2 = \{(x,t) \in Q_t,\, |\mathcal{E}(v_*)(x,t)| \neq 0\}.$$

Тогда последовательность $\frac{\mathcal{E}(v_*)}{\delta+|\mathcal{E}(v_*)|}$ сходится при $\delta \to 0$ почти всюду в A_2 к $\frac{\mathcal{E}(v_*)}{|\mathcal{E}(v_*)|}$. Далее, поскольку эта последовательность слабо сходится в $L_p(A_2)^{n^2}$, то она сходится к этому пределу сильно в $L_2(A_2)^{n^2}$ ([10], предложение 2.8).

Тогда для второго слагаемого в правой части (27) в силу сходимости (21):

$$\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_*(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_*(s))|} \mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dxds =$$

$$= \mu \int_{A_2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_*(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_*(s))|} \mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dxds \quad \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Таким образом на основе вышесказанного, получили, что при $\delta \to 0$ имеет место сходимость

$$\nu \int_0^t \int_\Omega \left(|\mathcal{E}(v_\delta(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta(s)) - |\mathcal{E}(v_*(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_*(s)) \right) : \mathcal{E}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dx+$$

$$+\mu \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_\delta(s))|} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_*(s))}{\delta+|\mathcal{E}(v_*(s))|} \right) \mathcal{E}_{ij}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dxds \to 0.$$

Тогда в силу положительной определенности каждого из этих слагаемых получим, что при $\delta \to 0$ имеет место

$$\nu \int_0^t \int_\Omega \left(|\mathcal{E}(v_\delta(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta(s)) - |\mathcal{E}(v_*(s))|^{p-2}\mathcal{E}(v_*(s)) \right) : \mathcal{E}(v_\delta(s)-v_*(s))\,dx \to 0.$$

В силу леммы 1, приведенной выше, оператор A_p удовлетворяет условию (S). Следовательно, $v_\delta \to v_*$ сильно в $L_p(0,t;V_p)$ при $\delta \to 0$ для любого $t \in [0,T]$. Следовательно, в силу произвольности выбора $t \in [0;T]$, $v_\delta \to v_*$ сильно в $L_p(0,T;V_p)$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, в силу полученной сильной сходимости имеем, что при условии $|\mathcal{E}(v_*)| > 0$ предельная функция S удовлетворяет первому из соотношений (25). Остается установить, что предельная функция S удовлетворяет второму из соотношений (25), то есть, что $|S| \leqslant \mu$ при $|\mathcal{E}(v_*)| = 0$. Для этого рассмотрим множество $A = \{(x,t) \in Q_T,\, |\mathcal{E}(v_*)(x,t)| = 0\} \cap \{(x,t) \in Q_T,\, |S(x,t)| > \mu\}$ и предположим противное, что $mes\ A = m > 0$.

Определим: $\tau = \frac{S}{|S|}\mathbf{1}_A \in L_\infty(Q_T)$, где $\mathbf{1}_A$ — характеристическая функция множества A; $I = \int\limits_{Q_T} S : \tau\, dxdt$; $I^\delta = \int\limits_{Q_T} S^\delta : \tau\, dxdt$, где для краткости ввели следующее обозначение

$$S^\delta = \nu|\mathcal{E}(v_\delta)|^{p-2}\mathcal{E}(v_\delta) + \mu\frac{\mathcal{E}(v_\delta)}{\delta + |\mathcal{E}(v_\delta)|}.$$

Обозначим $a = I - m\mu$. Поскольку $a > 0$ и $I^\delta \to I$, то существует такое δ_0, что $\forall\delta < \delta_0$ выполнено, что $I_\delta > \frac{a}{2} + m\mu$. Обозначим $\delta_1 = \min(\frac{1}{2}, \frac{a}{4\nu mes\ Q_T})$ и разобьем I^δ на две части $I^\delta = I_1^\delta + I_2^\delta = \int\limits_{A_1^\delta} S^\delta : \tau\, dxdt + \int\limits_{A_2^\delta} S^\delta : \tau\, dxdt$, где $A_1^\delta = \{(x,t) \in Q_T,\, |\mathcal{E}(v_\delta)(x,t)| \leqslant \delta_1\}$, $A_2^\delta = \{(x,t) \in Q_T,\, |\mathcal{E}(v_\delta)(x,t)| > \delta_1\}$.

Тогда для первого из этих интегралов имеем

$$I_1^\delta = \int\limits_{A_1^\delta} S^\delta : \tau\, dxdt \leqslant \int\limits_{A_1^\delta \cap A} (\nu|\mathcal{E}(v_\delta)| + \mu)\, dxdt \leqslant \nu\delta_1 mes\, Q_T + \mu mes\ A \leqslant \frac{a}{4} + \mu m.$$

А для второго получим

$$I_2^\delta = \int\limits_{A_2^\delta} S^\delta : \tau\, dxdt \leqslant \|S^\delta\|_{L_{p'}(0,T;L_{p'}(\Omega)^n)}(mes\, A_2^\delta \cap A)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(mes\, A_2^\delta \cap A)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $|\mathcal{E}(v_\delta)|$ сходится к нулю почти всюду на A, то $|\mathcal{E}(v_\delta)|$ сходится к нулю и по мере. Таким образом, для достаточно малого δ, получим, что $I_2^\delta \leqslant \frac{a}{8}$.

Итак, $\frac{a}{2} + \mu m < I^\delta = I_1^\delta + I_2^\delta \leqslant \frac{a}{4} + \mu m + \frac{a}{8} < \mu m + \frac{a}{2}$. Таким образом, получили противоречие. Следовательно, $|S| \leqslant \mu$ при $|\mathcal{E}(v_*)| = 0$. Доказательство завершено.

Таким образом, начально-краевая задача (1)-(5) имеет хотя бы одно слабое решение. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. — М.: Мир, 1975. — 592с.

[2] Zvyagin V.G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V.G. Zvyagin, D.A. Vorotnikov. — De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications (12), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2008. — 230 p.

[3] Звягин В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. — М.: КРАСАНД (УРСС), 2012. — 416с.

[4] Herschel W.H. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollosungen / W.H. Herschel, R. Bulkley // Kolloid Zeitschrift. — 1926. — Vol. 39. — P. 291–300.

[5] Malek J. Herschel-Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows / J. Malek, M. Ruzicka, V. V. Shelukhin // Mathematical Models & Methods in Applied Sciences. — 2005. — Vol. 15. — P. 1845–1861.

[6] Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. - Москва: УРСС, 2004. — 112с.

[7] Звягин В.Г. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта / В.Г. Звягин, М.В. Турбин // Современная математика. Фундаментальные направления : гидродинамика. — М., 2009. — Т. 31 (2009). — С. 3–144.

[8] Dinca G. Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian / G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin // Portugaliae Mathematica. Nova Serie. — 2001. — Vol. 58. — Issue 3. — P. 339–378.

[9] Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336с.

[10] Moreira Diego R. On the behavior of weak convergence under nonlinearities and applications / Diego R. Moreira, Eduardo V. Teixeira // Proceedings of the American Mathematical Society — 2000. — Vol. 133, Number 6. — P. 1647–1656.

Турбин М.В., доцент кафедры алгебры и топологических методов анализа математического факультета. Воронежский государственный университет
E-mail: mrmike@math.vsu.ru
Тел.: 8(950)–755–86–04

Turbin M.V., associate professor of chair of algebra and topological methods of analysis of mathematical faculty. Voronezh State University
E-mail: mrmike@math.vsu.ru
Tel.: 8(950)–755–86–04