УДК 517.9

ОБ ОСОБЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Л. В. Стенюхин

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 02.04.2013 г.

Аннотация: в работе установлены достаточные условия существования особых решений задачи капиллярности в случае круговой симметрии.
Ключевые слова: задача капиллярности, бифуркация, кольцеобразное решение.

Abstract: in this paper we establish sufficient conditions for the existence of special solutions of the capillarity in the case of circular symmetry.
Keywords: capillarity problem, bifurcation, annular solution.

ВВЕДЕНИЕ

В нелинейной постановке хорошо изучены равновесные устойчивые и неустойчивые формы малых капель в поле силы тяжести. Если размер капли достаточно большой и изнутри на неё воздействует потенциал, то нарушается сходимость приближённых решений. При этом полученные решения начинают противоречить физическим экспериментам.

Предположим, что на каплю действует потенциал посредством очень медленного добавления жидкости через маленькое отверстие в плоскости под каплей или увеличивается температура вещества. В настоящей работе получены теоретические условия при которых начинается перестройка (бифуркация) капли.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим связную каплю жидкости заданного объёма V, лежащую на горизонтальной плоскости Π в поле силы тяжести, направленном вертикально вниз. Предположим, что материал жидкости однороден, так что угол контакта жидкости с плоскостью γ постоянен, $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$. Как показал H. C. Wente [1], при этих условиях равновесная поверхность будет поверхностью вращения с осью перпендикулярной плоскости Π. В точках верхней части свободной поверхности P капли высота $u(x,y)$ поверхности P над Π удовлетворяет уравнению

$$div\ Tu = \chi u + \lambda, \tag{1.1}$$

где

$$Tu = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u,\ \nabla u = (u_x, u_y), \tag{1.2}$$

$\chi = \frac{\rho g}{\sigma}$, ρ – плотность, σ – поверхностное натяжение, λ – константа (множитель Лагранжа). Для нижней части свободной поверхности знак $div\ Tu$ надо заменить на обратный. Граничное условие задачи с постоянным углом контакта γ имеет вид

$$\overline{n}\ Tu = \cos\gamma, \tag{1.3}$$

$\overline{n}$ – единичная нормаль.

Замена $u = -v - (1/\chi)\lambda$ переводит уравнение (1.1) в уравнение

$$div\ Tv = \chi v, \tag{1.4}$$

которое является уравнением свободной поверхности в капиллярной трубке. Каждому уравнению (1.1) с высотой капли в центре u_0 соответствует решение уравнения (1.4) с высотой подъёма жидкости в центре $v_0 = -(u_0 + \lambda/\chi)$. В [2] показано, что симметричные решения уравнения (1.4) однозначно определяются высотой подъёма жидкости в центре. Поэтому, каждой симметрично лежащей капле отвечает единственная капиллярная поверхность, которая (локально) геометрически конгруэнтна границе капли. Обратно, каждой симметричной капиллярной поверхности соответствует лежащая капля, определённая с точностью до аддитивной константы.

Множество всех симметричных капиллярных поверхностей является однопараметрическим семейством с параметром центральной высоты u_0 поверхности. Из принципа соответствия вытекает, что множество всех симметрично лежащих капель может быть описано с помощью однопараметрического семейства кривых.

С учётом вышеизложенного, уравнение (1.1) можно записать в безразмерной форме

$$div\ Tu = Bu, \tag{1.5}$$

B – число Бонда, $B = \frac{\rho g a^2}{\sigma}$, характеризующее размер конфигурации. Граничное условие (1.3) остаётся.

2. ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

В [2] показано, что для симметрично лежащей капли, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ и малого числа Бонда B, уравнение (1.5) можно записать так

$$div\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = Bu - 2\sin\gamma_0. \tag{2.1}$$

Решение ищется на круге Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$ и капля постоянного объёма V_0. Если капля подвергается воздействию внешнего потенциала φ, то

$$V_0 = \frac{\pi(2 + \cos\gamma_0)(1 - \cos\gamma_0)^2}{3\sin^3\gamma_0}, \tag{2.2}$$

$$\cos\gamma_0 = \cos\gamma + \frac{\varphi}{\sigma}. \tag{2.3}$$

Потенциал φ может быть, например, температурой вещества капли или давлением, воздействующем изнутри капли, либо температурой и давлением одновременно. Действие потенциала приводит к изменению формы капли, в частности, к изменению угла контакта с плоскостью П, (2.3). При этом γ_0 является единственным решением уравнения (2.2). Дальнейшее воздействие потенциала φ приведёт к возрастанию числа Бонда B и к перестройке (бифуркации) самой капли.

Для описания дальнейших состояний капли положим в уравнении (2.1) $B = 0$.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях и $B = 0$, существует точное решение уравнения (2.1)*

$$u_0 = \frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - r^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}. \tag{2.4}$$

Решение (2.4) проверяется непосредственной проверкой. Это решение послужит отправной точкой для отыскания дальнейших состояний капли, подверженной воздействию потенциала φ.

3. КОЛЬЦЕОБРАЗНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для ненулевых чисел B положим, что решение уравнения (2.1) примет вид

$$u = \frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}, \tag{3.1}$$

r_0 – радиус кольца по центру, $|r - r_0| \leqslant 1$.

Непосредственным вычислением получим, что функция (3.1) является точным решением уравнения

$$div\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{r_0\sin\gamma_0}{r} - 2\sin\gamma_0 \tag{3.2}$$

с нулевым граничным условием.

Найдём условия, при которых задача (3.2) эквивалентна задаче (2.1). Для этого

$$Bu = \frac{r_0\sin\gamma_0}{r}, \tag{3.3}$$

то есть

$$\frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0} = \frac{r_0\sin\gamma_0}{Br}. \tag{3.4}$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\left(1 + \frac{\sin^2\gamma_0}{B^2r^2}\right)r_0^2 - 2\left(r - \frac{\cos\gamma_0}{Br}\right)r_0 + r^2 - 1 = 0. \tag{3.5}$$

Разрешим уравнение (3.5) относительно r_0, как гарант кольцеобразного состояния.

$$D_1 = \left(\frac{\cos\gamma_0}{B} - 1\right)^2 + \frac{1 - r^2}{B^2r^2}. \tag{3.6}$$

В решениее (2.4) безразмерного уравнения (2.1) полярная координата r меняется в пределах $0 \leqslant r \leqslant 1$, значит с увеличением потенциала φ, у деформированной капли значение $r = 1$ тоже существует. Равенство нулю выражения (3.6) для $r = 1$ порождает условие

$$B = \cos\gamma_0. \tag{3.7}$$

Таким образом, получается следующая

Теорема 2. *Если выполнено условие (3.7), то существует точное аналитическое решение задачи (2.1) типа (3.1) с граничным условием (1.3).*

Известно, что под воздействием потенциала для поддержания равновесия должен возрастать угол контакта γ. Тогда $\cos\gamma_0$ убывает. В тоже время, число Бонда "спокойных" капель очень мало. В случае возрастания числа Бонда и уменьшения $\cos\gamma_0$ возможно выполнение условия (3.7) и наступление кольцеобразного состояния типа (3.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] H.C. Wente. The symmetry of sessile and pendent drops. Pasific J. Math. 88 (1980), 387 - 397.

[2] Р. Финн. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория/ Под. ред. А.Т. Фоменко. М.: Мир, 1989. 310с.

Стенюхин Л. В., доцент кафедры высшей математики, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: stenyuhin@mail.ru
Тел.: 8(473)2715362

Stenyukhin L.V., Associate Professor of Higher Mathematics, PhD Physics and Mathematics, Associate Professor, Voronezh State Architectural and Construction University
E-mail: stenyuhin@mail.ru
Tel.: 8(473)2715362