УДК 517.9

ОЦЕНКИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. З. Мешков, И. П. Половинкин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.06.2013 г.

Аннотация: получены оценки показательного типа (по порядкам многочленов) для сумм модулей коэффициентов однородных многочленов.
Ключевые слова: однородный многочлен; свойства аналитических функций.

Abstract: some estimates for the exponential type (in the terms of the orders of the polynomials) for the sums of the absolute values of the coefficients of any homogeneous polynomials were obtained in the paper.
Keywords: homogeneous polynomial, properties of analytic functions.

1. ОЦЕНКИ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Случай двух переменных выделен особо, поскольку оценки здесь получаются вполне элементарными методами и являются точными (с точностью до константы).

Пусть $P(x, y)$ — однородный многочлен двух переменных степени n:

$$P(x, y) = \sum_{k+m=n} a_{km} x^k y^m, \tag{1}$$

$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ — единичная окружность, параметризованная полярным углом $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{k+m=n} |a_{km}| \leqslant \frac{2 \cdot 2^n}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_S |P(x, y)|^2 \, d\varphi \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Случай многочлена

$$P = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^{n-k} x^k y^{n-k}$$

показывает, что неравенство 2 является точным по степени многочлена P (с точностью до константы).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Введем комплексные переменные $z = x + iy, \overline{z} = x - iy$. Тогда многочлен P можно записать в виде

$$P = \sum_{k+m=n} a_{km} \left(\frac{z + \overline{z}}{2} \right)^k \left(\frac{z - \overline{z}}{2} \right)^m,$$

Раскрывая в этом выражении степени по формуле бинома Ньютона, получим, что многочлен P представляется в виде линейной комбинации мономов $z^j,\ \overline{z}^l$, где $j+l=n$. Если $l \leqslant j$, то $z^j\overline{z}^l = z^{j-l}(z\overline{z})^l = z^{n-2l}(x^2+y^2)^l$. Аналогично, если $j \leqslant l$, то $z^j\overline{z}^l = \overline{z}^{n-2j}(z\overline{z})^j = \overline{z}^{n-2j}(x^2+y^2)^j$. С учетом этих равенств многочлен P представляется в виде

$$P = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-2k} z^{n-2k}(x^2+y^2)^k + b_{n-2k}\overline{z}^{n-2k}(x^2+y^2)^k. \tag{3}$$

На единичной окружности S, параметризованной с помощью формул $x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, многочлен P совпадает с тригонометрическим многочленом

$$P = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-2k} e^{i(n-2k)\varphi} + b_{n-2k} e^{-i(n-2k)\varphi}. \tag{4}$$

Отметим, что серия степеней экспонент этого тригонометрического многочлена для четных n состоит из четных чисел $n-2,\dots,2,0$, а для нечетного n — соответственно из нечетных чисел $n, n-2,\dots,3,1$. В силу равенства Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} |a_k|^2 + |b_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S |P|^2\, d\varphi. \tag{5}$$

Оценим теперь вклад членов суммы (3) в сумму

$$\sum_{k+m=n} |a_{km}|$$

коэффициентов многочлена $P(x,y)$ в форме (1). В силу известной формулы для суммы биномиальных коэффициентов вклад членов $a_{n-2k}z^{n-2k}(x^2+y^2)^k = a_{n-2k}(x+iy)^{n-2k}(x^2+y^2)^k$ равен $|a_{n-2k}|2^{n-k}$. Аналогично вклад членов $b_{n-2k}\overline{z}^{n-2k}(x^2+y^2)^k$ равен $|b_{n-2k}|2^{n-k}$. Поэтому, используя неравенство Коши-Буняковского, мы получим

$$\sum_{k+m=n} |a_{km}| \leqslant \sum_{k=0}^{[n/2]} |a_{n-2k}|2^{n-k} + |b_{n-2k}|2^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-2k}^2 + b_{n-2k}^2\right)^{1/2} 2^n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2[n/2]}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_S |P|^2\, d\varphi\right)^{1/2} \cdot 2^n \cdot 2,$$

что и доказывает теорему 1.

2. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В $\mathbb{R}^m,\ m>2$

Как обычно, через $\mathbb{R}^m$ будем обозначать евклидово m-мерное пространство: $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1,\dots,x_m)\},\ |x| = (x_1^2+\dots,x_m^2)^{1/2}$. Через S^{m-1} обозначим единичную сферу в $\mathbb{R}^m$, заданную уравнением $|y| = 1$, через ω_{m-1} — ее евклидову площадь, а через dS_y — элемент евклидовой площади этой сферы. В силу известной формулы Пуассона (см., напр., [1], с. 54 – 56, теорема 1.10) функция $u(x)$, гармоничная в шаре $|x| < 1$ и непрерывная в его замыкании, восстанавливается по ее граничным значениям следующим образом:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} u(y) \frac{1-|x|^2}{|x-y|^m} \, dS_y.$$

В этой формуле ядро Пуассона

$$P(x,y) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^m},$$

определенное как функция переменных $x = (x_1, \ldots, x_m)$, при $|x| < 1$, можно продолжить в комплексное пространство $\mathbb{C}^m$ и рассматривать как функцию $P(z,y)$ переменных $z = (z_1, \ldots, z_m)$.

Пусть D_ρ обозначает поликруг в $\mathbb{C}^m$: $D_\rho = \{z = (z_1, \ldots, z_m) : |z_k| \leqslant \rho, \ k = 1, 2, \ldots, m\}$. Вместо ядра Пуассона $P(x,y)$ рассмотрим функцию

$$P(z,y) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} z_k^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} (z_k - y_k)^2 \right)^{m/2}} \,. \tag{6}$$

Покажем, что $P(z,y)$ можно корректно определить в поликруге D_ρ, если взять ρ достаточно малым, например, $\rho \leqslant 1/(2\sqrt{m})$. Обозначим через W подкоренное выражение из знаменателя:

$$W = \sum_{k=1}^{m} (z_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{m} (z_k^2 - 2y_k z_k) + 1. \tag{7}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского при $m \geqslant 3$

$$|W - 1| = |\sum_{k=1}^{m} (z_k^2 - 2y_k z_k)| \leqslant \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{m}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Далее, в области с разрезом по отрицательной части вещественной оси ветвь функции $\sqrt{W}$, такую, что $\sqrt{1} = 1$. Поскольку значения выражения W из (7) лежат в круге $|W - 1| \leqslant \frac{1}{2}$, явно, что формула (6) дает аналитическое продолжение ядра Пуассона в поликруг D_ρ, $\rho \leqslant 1/(2\sqrt{m})$, причем для $P(z,y)$ выполняется оценка

$$|P(z,y)| \leqslant 2^{1+m/2}/\omega_{m-1}, \ z \in D_\rho, \ y \in S^{m-1}.$$

Далее пусть Q — гармонический многочлен. Тогда в поликруге D_ρ

$$Q(z) = \int\limits_{S^{m-1}} P(x,y) Q(y) \, dS_y.$$

В силу ограниченности $P(z,y)$, а также элементарных неравенств для L_1- и L_2-норм на (S^{m-1}, dS), получаем

$$|Q(z)| \leqslant C \left(\int\limits_{S^{m-1}} |Q(y)|^2 \, dS_y \right)^{1/2}, \ z \in D_\rho, \tag{8}$$

причем неравенство (8) с одной и той же постоянной справедливо для любого гармонического полинома Q. Неравенство (8) позволяет свести оценку коэффициентов многочлена к хорошо известным интегральным формулам Коши для поликруга D_ρ.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m$ — m-мерный мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. Тогда однородный многочлен P степени n в $\mathbb{C}^m$ можно записать в виде

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha z^\alpha. \tag{9}$$

Размерность пространства однородных многочленов степени n равна

$$C_{n+m-1}^{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

Отсюда нетрудно видеть, что количество коэффициентов в формуле (9) не превосходит Cn^{m-1}, где постоянная C не зависит от n.

Введем обозначение $\alpha + e = (\alpha_1 + 1, \cdot, \alpha_m + 1)$. В силу интегральной формулы Коши для коэффициентов Тейлора аналитической функции $P(z)$

$$a_\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^m \int\limits_{|z_1|=\rho} \int\limits_{|z_2|=\rho} \cdots \int\limits_{|z_m|=\rho} \frac{P(z)}{z^{\alpha+e}}\, dz_1 dz_2 \ldots dz_m.$$

Отсюда, вводя обозначение $H = \max\limits_{z \in D_\rho} |P(z)|$, для коэффициентов a_α получаем оценку

$$|a_\alpha| \leqslant H\rho^{-n}$$

Отсюда для суммы всех коэффициентов многочлена P получаем оценку

$$\sum_{|\alpha|=n} |a_\alpha| \leqslant CHn^{m-1}\rho^{-n},$$

где постоянная C зависит только от m и не зависит от n. Для специального случая гармонического многочлена

$$Q(x) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha,$$

используя неравенство (8), имеем

$$\sum_{|\alpha|=n} |a_\alpha| \leqslant Cn^{m-1} \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \left(\int\limits_{S^{m-1}} |Q(y)|^2\, dS_y\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Наконец мы можем перейти к оценке коэффициентов любого однородного многочлена $P(x)$ степени n. Из результатов монографии [1] (с. 159, теорема 2.1) вытекает, что многочлен $P(x)$ представим в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} Q_{n-2k}(x)|x|^{2k},$$

где $Q_{n-2k}(x)$ — однородный гармонический многочлен степени $n-2k$. В силу того, что сумма коэффициентов многочлена $|x|^{2k}$ равна m^k, а также в силу (10) получим, что сумма коэффициентов многочлена $Q_{n-2k}(x)|x|^{2k}$ можно оценить сверху выражением

$$C(n-2k)^{m-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n-2k} m^k \left(\int\limits_{S^{m-1}} |Q_{n-2k}(y)|^2\, dS_y\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant Cn^{m-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n} (\rho^2 m)^k \left(\int\limits_{S^{m-1}} |Q_{n-2k}(y)|^2\, dS_y\right)^{1/2}$$

Для дальнейшего положим $q=\rho^2 m$ и отметим, что $q\leqslant 1/2$. В силу попарной ортогональности на единичной сфере сферических гармоник $Q_{n-2k}(x)$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=n}|a_\alpha| \leqslant C\sum_{k=0}^{[n/2]} n^{m-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n} q^k \left(\int\limits_{S^{m-1}} |Q_{n-2k}(y)|^2\, dS_y\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant Cn^{m-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} q^2k\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]}\int\limits_{S^{m-1}} |Q_{n-2k}(y)|^2\, dS_y\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant Cn^{m-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n} \left(\int\limits_{S^{m-1}} |P(y)|^2\, dS_y\right)^{1/2}. \qquad (11)$$

Далее пусть число $\lambda > 1/\rho$. С учетом того, что последовательность чисел $n^{m-1}\,(\lambda\rho)^{-n}$ ограничена, соотношение (11) можно переписать в более простом виде

$$\sum_{|\alpha|=n}|a_\alpha| \leqslant C\lambda^n \left(\int\limits_{S^{m-1}} |P(y)|^2\, dS_y\right)^{1/2}, \qquad (12)$$

где постоянная C не зависит от многочлена P и его степени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. - М.: Мир, 1974. – 332 с.

Мешков Виктор Захарович, Доктор физико-математических наук, профессор. ГОУ ВПО Воронежский государственный университет. Факультет прикладной математики, информатики и механики. Кафедра математического и прикладного анализа
Тел.: 8–(473)220–83–48

Meshkov V. Z., Doctor of physico-mathematical sciences, professor.
Tel.: 8–(473)220–83–48

Половинкин Игорь Петрович, Кандидат физико-математических наук, доцент. ГОУ ВПО Воронежский государственный университет. Факультет прикладной математики, информатики и механики. Кафедра математического и прикладного анализа
E-mail: polovinkin@yandex.ru
Тел.: 8–(473)220–83–48

Polovinkin I. P., Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor
E-mail: polovinkin@yandex.ru
Tel.: 8–(473)220–83–48