УДК 517

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, РЕАЛИЗУЕМОЙ В ВИДЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Е. В. Лылов, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.06.2013 г.

Аннотация: в статье рассматривается математическая модель, реализуемая в виде гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными. Установлены условия, достаточные для существования и непрерывности всех производных второго порядка у решения рассматриваемой математической модели.
Ключевые слова: математическая модель, непрерывность, достаточные условия.

Abstract: in this paper we consider a mathematical model, implemented in the form of hyperbolic equations with two independent variables. Established sufficient conditions for the existence and continuity of all derivatives of the second order for a solution to the mathematical model.
Keywords: mathematical model, continuity, sufficient conditions.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье устанавливаются условия, достаточные для существования и непрерывности всех производных второго порядка у вещественнозначного решения $u(x, y)$ рассматриваемой математической модели:

$$\begin{cases} u_{xy}(x,y) + a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) = F(x,y), \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y), 0 \leqslant y \leqslant y_0, \\ u|_{y=0} = \varphi_2(x), 0 \leqslant x \leqslant x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Основой для исследований, результаты которых приводятся в настоящей статье, послужила работа [1], в которой установлены некоторые условия регулярности решения модели (1). Там же была развита и техника доказательства, которая используется при получении основного результата работы.

Необходимость в поиске таких условий возникает при исследовании применения метода Римана для уравнений следующего вида:

$$z_{tt}(s,t) - z_{ss}(s,t) + \alpha(s,t)z_t(s,t) + \beta(s,t)z_s(s,t) + \gamma(s,t)z(s,t) = f(s,t), \text{ где } s,t \in \Re.$$

В работе [2] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1) a, b, c *и* F *обладают непрерывными производными как по* x, *так и по* y, *а* φ_1 *и* φ_2 *— дважды непрерывно дифференцируемы и* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. *Тогда у решения задачи* (1) *все частные производные второго порядка существуют и непрерывны в прямоугольнике* $\Pi = [0; x_0] \times [0; y_0]$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Оказывается, что при дополнительных предположениях о структуре коэффициентов a, b и c требования на их гладкость в утверждении теоремы 1 можно ослабить. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Если в математической модели (1) функция $a(x,y)$ имеет вид $\widetilde{a}(x+y)$ или $\widetilde{a}(x-y)$, функция $b(x,y)$ имеет вид $\widetilde{b}(x+y)$ или $\widetilde{b}(x-y)$, а функция $c(x,y)$ имеет вид $\widetilde{c}(x+y)$ или $\widetilde{c}(x-y)$, то для выполнения утверждения теоремы 1 достаточно потребовать от a, b, c только непрерывность при сохранении требований теоремы 1 к F, φ_1 и φ_2.*

Доказательство. Непрерывность u_{xy} следует из первого уравнения системы (1). Таким образом, остается доказать существование и равномерную непрерывность производных u_{xx} и u_{yy} решения модели (1).

Далее (см., например, [2, Лекция V]), вместо модели (1) можно рассмотреть систему:

$$\begin{cases} u(x,y)=\varphi_2(x)+\int\limits_0^y w(x,y')dy', \\ v(x,y)=\varphi_2'(x)+\int\limits_0^y \left[F(x,y')-(av+bw+cu)(x,y')\right]dy', \\ w(x,y)=\varphi_1'(y)+\int\limits_0^x \left[F(x',y)-(av+bw+cu)(x',y)\right]dx', \end{cases} \tag{2}$$

решение которой может быть получено методом последовательных приближений, т. е. $u=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, $v=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$, $w=\lim\limits_{n\to\infty}w_n$, где последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ определяются равенствами:

$$u_0(x,y)=\varphi_2(x), v_0(x,y)=\varphi_2'(x), w_0(x,y)=\varphi_1'(y)$$

$$\begin{cases} u_n(x,y)=\varphi_2(x)+\int\limits_0^y w_{n-1}(x,y')dy', \\ v_n(x,y)=\varphi_2'(x)+\int\limits_0^y \left[F(x,y')-(av_{n-1}+bw_{n-1}+cu_{n-1})(x,y')\right]dy', \\ w_n(x,y)=\varphi_1'(y)+\int\limits_0^x \left[F(x',y)-(av_{n-1}+bw_{n-1}+cu_{n-1})(x',y)\right]dx. \end{cases} \tag{3}$$

При этом имеют оценки для всех $x\in[0,x_0]$ и $y\in[0,y_0]$:

$$\max\left\{\left|u_n-u_{n-1}\right|(x,y),\left|v_n-v_{n-1}\right|(x,y),\left|w_n-w_{n-1}\right|(x,y)\right\}\leqslant A\cdot K^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{4}$$

где A и K – числа такие, что $K \geqslant \||a(x,y)|+|b(x,y)|+|c(x,y)|\|$, $A \geqslant \max\left\{\|u_1-u_0\|(x,y),\|v_1-v_0\|(x,y),\|w_1-w_0\|(x,y)\right\}$ — также для всех $x\in[0,x_0]$ и $y\in[0,y_0]$.

В силу (3) $(v_0)_x$ существует и равномерно непрерывна на П. Далее, в силу (3):

$$(v_1)_x(x,y)=\varphi_2'(x)+\int\limits_0^y F_x(x,y')dy'-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y(av_0)(x,y')dy'\right)- \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y(bw_0)(x,y')dy'\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y(cu_0)(x,y')dy'\right), \tag{5}$$

причем в силу условий теоремы первые два слагаемых в правой части этого равенства есть функции равномерно непрерывные на П. Что же касается последних трех слагаемых в правой части (5), то, беря интегралы по частям и полагая $\widetilde{A}(s)=\int\limits_0^s a(\varsigma)d\varsigma$, $\widetilde{B}(s)=\int\limits_0^s b(\varsigma)d\varsigma$, $\widetilde{C}(s)=\int\limits_0^s c(\varsigma)d\varsigma$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y (av_0)(x,y')dy'\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y (bw_0)(x,y')dy'\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y (cu_0)(x,y')dy'\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_2'(x)\left[\pm\widetilde{A}(x\pm y)\mp\widetilde{A}(x)\right]\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\pm\varphi_1'(y)\widetilde{B}(x\pm y)\mp\varphi_1'(0)\widetilde{B}(x)\mp\int\limits_0^y\varphi_1''(y')\left[\widetilde{B}(x\pm y')-\widetilde{B}(x)\right]dy'\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_2(x)\left[\pm\widetilde{C}(x\pm y)\mp\widetilde{C}(x)\right]\right),$$

откуда и следует равномерная непрерывность этого слагаемого на П. Таким образом, $(v_1)_x$ существует и равномерно непрерывна на П.

Рассмотрим теперь последовательности $\{(v_n)_x\}$ и $\{(w_n)_y\}$ и подробно остановимся на свойствах первой из них. Предположим теперь существование и равномерную непрерывность на П функций $(v_{n-2})_x$, $(v_{n-1})_x$, $(w_{n-2})_y$ и $(w_{n-1})_y$, где $n\geqslant 2$. Из второго уравнения системы (3) получим:

$$(v_n)_x(x,y)=\varphi_2''+\int\limits_0^y F_x(x,y')dy'-I_1-I_2-I_3, \tag{6}$$

где $I_1=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y (av_{n-1})(x,y')dy'\right)$, $I_2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y (bw_{n-1})(x,y')dy'\right)$, $I_3=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y (cu_{n-1})(x,y')dy'\right)$. Первые два слагаемых в правой части уравнения для $(v_n)_x$ существуют и равномерно непрерывны на П в силу условий теоремы. Что же касается остальных слагаемых уравнения (6), распишем последние отдельно.

Воспользовавшись представлением для $v_n(x,y)$, получаем:

$$I_1=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int\limits_0^y\left(\widetilde{a}(x+t\pm y')v_{n-1}(x+t,y')-\widetilde{a}(x\pm y')v_{n-1}(x,y')dy'\right)\right)=$$

$$=\int\limits_0^y\widetilde{a}(x\pm y')\left(v_{n-1}\right)_x(x,y')dy'\pm$$

$$\pm v_{n-1}(x,y)\widetilde{a}(x\pm y)\mp v_{n-1}(x,0)\widetilde{a}(x)\mp\int\limits_0^y(v_{n-1})_{y'}(x,y')\widetilde{a}(x\pm y')dy'.$$

Аналогично получаем представления для I_2 и I_3:

$$I_2=\int\limits_0^y\widetilde{b}(x\pm y')\left(w_{n-1}\right)_x(x,y')dy'\pm w_{n-1}(x,y)\widetilde{b}(x\pm y)\mp w_{n-1}(x,0)\widetilde{b}(x)\mp$$

$$\mp \int\limits_0^y (w_{n-1})_{y'}(x,y')\widetilde{b}(x \pm y')dy'.$$

$$I_3 = \int\limits_0^y \widetilde{c}(x \pm y')\left(v_{n-2}\right)_x(x,y')dy' \pm u_{n-1}(x,y)\widetilde{c}(x \pm y) \mp u_{n-1}(x,0)\widetilde{c}(x) \mp$$
$$\mp \int\limits_0^y w_{n-2}(x,y')\widetilde{c}(x \pm y')dy'.$$

Воспользовавшись полученными выражениями, получаем следующую оценку:

$$\left|\left((v_{n+1})_x - (v_n)_x\right)(x,y)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^y \left\{\left|\widetilde{a}(x \pm y')\right| \cdot \left|\left((v_n)_x - (v_{n-1})_x\right)(x,y')\right| + \left|\widetilde{b}(x \pm y')\right| \cdot \left|\left((w_n)_y - (w_{n-1})_y\right)(x,y')\right|\right\}dy' +$$
$$+ \left[\left\|\left(|\widetilde{a}| + \left|\widetilde{b}\right|\right) \cdot \left(|\widetilde{a}| + \left|\widetilde{b}\right| + 2\left|\widetilde{c}\right|\right)\right\| + 2\left\|\widetilde{c}\right\| + K\left(\|\widetilde{a}\| + \left\|\widetilde{b}\right\| + \|\widetilde{c}\|\right)\right] \times$$
$$\times AK^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1} - x^{n-1}}{(n-1)!},$$

где $\|\cdot\|$ означает максимум на $\Pi = [0, x_0] \times [0, y_0]$.

Теперь введем в рассмотрение число

$$\widehat{K} \geqslant \max\left\{K; \left\|\left(|\widetilde{a}| + \left|\widetilde{b}\right|\right)\left(|\widetilde{a}| + \left|\widetilde{b}\right| + |\widetilde{c}|\right)\right\| + K\left(\|\widetilde{a}\| + \left\|\widetilde{b}\right\| + \|\widetilde{c}\|\right); 2\|\widetilde{c}\|; \|\widetilde{a}\|; \left\|\widetilde{b}\right\|\right\}$$

и допустим, что при некотором $n \geqslant 2$ выполнено:

$$\left|\left((v_n)_x - (v_{n-1})_x\right)(x,y)\right| \leqslant \widehat{A}\left(\beta_n \widehat{K}^{n-1}(x+y)^{n-1} + \alpha_n \widehat{K}^{n-2}(x+y)^{n-2}\right),$$

$$\left|\left((w_n)_y - (w_{n-1})_y\right)(x,y)\right| \leqslant \widehat{A}\left(\beta_n \widehat{K}^{n-1}(x+y)^{n-1} + \alpha_n \widehat{K}^{n-2}(x+y)^{n-2}\right),$$

где $\widehat{A} \geqslant A$, а коэффициенты $\alpha_n \geqslant 0$ и $\beta_n \geqslant 0$ подлежат определению. Если $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n}{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}$ и $\beta_{n+1} = \frac{2\beta_n}{n}$, тогда получаем, что

$$\left|\left((v_{n+1})_x - (v_n)_x\right)(x,y)\right| \leqslant \widehat{A}\left(\beta_{n+1}\widehat{K}^n(x+y)^n + \alpha_{n+1}\widehat{K}^{n-1}(x+y)^{n-1}\right), \qquad (7)$$

$$\left|\left((w_{n+1})_y - (w_n)_y\right)(x,y)\right| \leqslant \widehat{A}\left(\beta_{n+!}\widehat{K}^n(x+y)^n + \alpha_{n+1}\widehat{K}^{n-1}(x+y)^{n-1}\right), \qquad (8)$$

Последние два соотношения выполняются, если $\alpha_n = \frac{2^{n-1}-1}{(n-2)!}$ и $\beta_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$. Таким образом, если выполнены последние соотношения для α_n и β_n, то имеет место индуктивный переход по n, и значит, неравенства (7)–(8) будут выполняться при всех $n \geqslant 2$, если оно выполняется при $n = 2$. Но при $n = 2$ неравенства (7)–(8) принимают вид:

$$\left|\left((v_2)_x - (v_1)_x\right)(x,y)\right| \leqslant \widehat{A}\left(\widehat{K}(x+y) + 1\right), \quad \left|\left((w_2)_y - (w_1)_y\right)(x,y)\right| \leqslant \widehat{A}\left(\widehat{K}(x+y) + 1\right),$$

а эти неравенства выполняются при достаточно большом $\widehat{A}$, так как правая часть его больше и равна $\widehat{A}$, а левая – ограничена на П.

Числовой ряд, составленный из правых частей неравенства (7)–(8), сходится, что в силу признака Вейерштрасса, влечет равномерную на П сходимость рядов $(v_0)_x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((v_n)_x - (v_{n-1})_x)$, $(w_0)_y + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big((w_n)_y - (w_{n-1})_y\Big)$, то есть последовательностей $\{(v_n)_x\}$ и $\Big\{(w_n)_y\Big\}$. Но тогда, ввиду сходимости v_n к v функция v дифференцируема по x и $v_x = \lim\limits_{n\to\infty}(v_n)_x$, причем последний предел есть функция непрерывная на П. Аналогично показывается непрерывная на П дифференцируемость w по y. Теорема доказана.

Метод, на который мы опирались в доказательстве теоремы 2, переносится без изменений на случаи, сформулированные в теоремах 3 и 4.

Теорема 3. *Если в задаче* (1) *функция* $a(x,y)$ *и* $b(x,y)$ *обладают непрерывными производными как по* x*, так и по* y*, функция* $c(x,y)$ *имеет вид* $\widetilde{c}(x+y)$ *или* $\widetilde{c}(x-y)$*, а* φ_1 *и* φ_2 *- дважды непрерывно дифференцируемы и* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$*. Если* F *имеет вид* $f_1(x,y)f_2(x+y) + f_3(x,y)f_4(x-y)$*, где* f_1 *и* f_3 *обладают непрерывными производными как как по* x*, так и по* y*, а* f_2 *и* f_4 *непрерывны, то утверждение теоремы 1 выполнено.*

Доказательство. Существование $(v_n(x,y))_x$ вытекает из рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства теоремы 2. Слагаемое $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y F(x,y')dy'\right)$ представляется также, как $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y (cu_{n-1})(x,y')dy'\right)$ по определению производной и после интегрирования по частям получим требуемое.

Доказательство сходимости $\{(v_n)_x\}$, очевидно, не изменится, так как F не содержится в выражении $(v_{n+1})_x - (v_n)_x$.

Теорема 4. *Пусть* Q *— класс функций, представимых в виде конечной суммы функций вида* $f(\alpha(x)+\beta(y))g(x,y)$*, где* F *— функция, непрерывная на* $[0;x_0]\times[0;y_0]$ *и обе частные производные первого порядка которой равномерно непрерывны на* $[0;x_0]\times[0;y_0]$*,* α *и* β *строго монотонны и непрерывно дифференцируемы на* $[0;x_0]$ *и* $[0;y_0]$*, а* f *непрерывна на множестве значений функции* $\alpha(x)+\beta(y)$*. Тогда если* $a,b,c,F \in Q$*,* φ_1 *и* φ_2 *— дважды непрерывно дифференцируемы и* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$*, то утверждение теоремы 1 выполнено.*

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 2 лишь большей громоздкостью, поэтому мы его не приводим. Отметим лишь незначительное техническое изменение: вместо первообразных $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}$ (из теоремы 2) надо ввести в рассмотрение функцию $\int\limits_0^y f(\alpha(x)+\beta(\eta))\beta'(\eta)d\eta$, которая равна, очевидно, $\Phi(\alpha(x)+\beta(y))$ (здесь Φ — первообразная функции f), и значит, дифференцируема по x

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаршин С.В.* Свойства гиперболических уравнений на сетях. Дисс...физ.-мат. наук. – Воронеж, 2005. – С. 36-205.

2. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. - М.-Л.: Гос. Изд-во технико-теоретич. Лит., 1950. - С. 45-114.

Лылов Е. В., аспирант математического факультета ВГУ
E-mail: zhenya86@mail.ru
Тел.: 8-929-009-13-29

Lylov E. V., Voronezh State University, Department of Mathematics, Post-graduate student
E-mail: zhenya86@mail.ru
Tel.: 8-929-009-13-29

Шабров С. А., к.ф.-м.н., доцент, математический факультет ВГУ
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: 8(473)220–86–90

Shabrov S. A., Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: 8(473)220–86–90