УДК 517.929.8

ОБ ОБРАТИМОСТИ РАЗНОСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ

В. И. Кузнецова[1], **В. Г. Курбатов**[2]

[1] *Воронежский государственный технический университет,*
[2] *Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации*

Поступила в редакцию 26.04.2013 г.

Аннотация: доказано, что обратимость инвариантного относительно сдвигов разностно-интегрального оператора в пространстве медленно меняющихся на бесконечности функций равносильна его обратимости в пространстве непрерывных ограниченных функций, а также равносильна равномерной обратимости преобразования Фурье ядра этого оператора.
Ключевые слова: медленно меняющиеся функции, разностно-интегральный оператор, обратимость, нижняя норма.

Abstract: it is established that the invertibility of a shift-invariant difference-integral operator in the space of slowly varying at infinity functions is equivalent to its invertibility in the space of bounded continuous functions, and is also equivalent to the uniform invertibility of the Fourier transform of the operator kernel.
Keywords: slowly varying functions, difference-integral operator, invertibility, lower norm.

Примером медленно меняющейся на $\mathbb{R}$ функции является функция, производная которой стремится к нулю на бесконечности. Более точно, функцию u, заданную на $\mathbb{R}^n$, называют медленно меняющейся, если разность $u(x)-u(y)$ стремится к нулю, когда x и y стремятся к бесконечности, а расстояние между ними остается ограниченным. Медленно меняющаяся функция, очевидно, не обязательно имеет предел на бесконечности. Пространство медленно меняющихся функций тесно связано с задачей о стабилизации решений дифференциальных уравнений на бесконечности [1], [2], [3], [4], [5]. Пространства медленно меняющихся функций и связанные с ними операторы изучались в работах [5], [6], [7]. В настоящей статье доказано (теорема 10), что условия обратимости разностно-интегрального оператора

$$\big(Tu\big)(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m u(x-h_m)+\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)u(x-\xi)\,d\xi$$

в пространстве медленно меняющихся функций совпадают с условиями его обратимости в пространстве непрерывных и ограниченных функций.

В § 1 напоминаются вспомогательные сведения, связанные с нижними нормами. В § 2 приводятся некоторые свойства медленно меняющихся функций. В § 3 доказывается основной результат — теорема 10.

1. НИЖНИЕ НОРМЫ

Пусть X — банахово пространство. Символом $\mathbf{B}(X)$ будем обозначать алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в X, а символом $\mathbf{1}$ — тождественный оператор.

Символом X' будем обозначать сопряженное к банахову пространству X, а символом A' — сопряженный к линейному оператору A. Результат применения функционала $\mu \in X'$ к вектору $u \in X$ будем обозначать символом $\langle u, \mu \rangle$.

Пусть $A \in \mathbf{B}(X)$. Положим

$$|A|_+ = |A : X \to X|_+ = \inf\{\, \|Ax\| : \|x\| = 1 \,\},$$
$$|A|_- = |A : X \to X|_- = \sup\{\, l \geqslant 0 : lB_X \subseteq AB_X \,\},$$

где $B_X = \{\, x \in X : \|x\| \leqslant 1 \,\}$ — единичный шар в X. Величины $|A|_+$ и $|A|_-$ будем называть [8] *нижними нормами* оператора A. Их также называют [9], [10], [11] *минимальным* (*инъективным*) *модулем* и *сюръективным модулем* оператора A, соответственно.

Очевидно, $|A|_+$ является наилучшей константой в оценке

$$\|Ax\| \geqslant |A|_+ \, \|x\|.$$

Иными словами,

$$|A|_+ = \sup\{\, l \geqslant 0 : \|Ax\| \geqslant l\|x\| \text{ для всех } x \in X \,\}.$$

Теорема 1 (см., например, [8, теорема 1.3.2])**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(a) $|A|_+ > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ *и* $\operatorname{Im} A$ *замкнут. Если* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ *и* $\operatorname{Im} A$ *замкнут, то*

$$|A|_+ = \frac{1}{\|(A_0)^{-1}\|},$$

где $A_0 : X \to \operatorname{Im} A$ *— сужение оператора* A.

(b) $|A|_- > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im} A = X$. *Если* $\operatorname{Im} A = X$, *то*

$$|A|_- = \frac{1}{\|\widetilde{A}^{-1}\|},$$

где $\widetilde{A} : X/\operatorname{Ker} A \to X$ *— фактор-оператор.*

(c) *Оператор* A *обратим тогда и только тогда, когда* $|A|_+ > 0$ *и* $|A|_- > 0$. *Если* A *обратим, то*

$$|A|_+ = |A|_- = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Предложение 2 ([10, B.3.8], см. также [12, лемма 4.13(b)] и [8, предложение 1.3.4])**.** *Для любого оператора* $A \in \mathbf{B}(X)$ *справедливы равенства*

$$|A'|_- = |A|_+, \qquad |A'|_+ = |A|_-.$$

2. МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ

Пусть n — натуральное число. Введем на $\mathbb{R}^n$ произвольную норму $|\cdot|$. Пусть $\mathbb{E}$ — банахово пространство с нормой $|\cdot|$. Обозначим через C банахово пространство всех непрерывных ограниченных функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$ с нормой $\|u\| = \sup_x |u(x)|$. Через C_0 обозначим замкнутое подпространство функций $u \in C$, стремящихся к нулю на бесконечности.

Функцию $u \in C$ называют *медленно меняющейся на бесконечности* [7] или *стационарной на бесконечности* [5], [6], если она удовлетворяет условию [7, гл. 3, § 6, п. 3]

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall M < \infty \quad \exists N < \infty \\ \forall x, y : |x| > N,\, |y| > N,\, |x-y| < M \\ |u(x) - u(y)| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через C_s множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций $u \in C$. Очевидно, $C_0 \subset C_s \subset C$.

Предложение 3 ([7, гл. 3, § 6, п. 3]). *Пусть $n = 1$. В этом случае функция $u \in C$ принадлежит C_s тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде $u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in C_0$, а функция u_1 дифференцируема, причем $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$.*

Предложение 4. *Функция $u \in C$ принадлежит C_s тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $M < \infty$ ее можно представить в виде $u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in C_0$, а $|u_1(x) - u_1(y)| < \varepsilon$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x - y| < M$.*

Доказательство. Пусть $u \in C_s$, т.е. условие (1) выполнено. Возьмем большое число K и рассмотрим скалярную функцию

$$\varkappa_K(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{K}, & \text{если } |x| \leqslant K, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant K. \end{cases}$$

Положим

$$u_0(x) = \varkappa_K(x) u(x), \qquad u_1(x) = \big(1 - \varkappa_K(x)\big) u(x).$$

Очевидно, $u_0 \in C_0$. Оценим $|u_1(x) - u_1(y)|$ в предположении, что $|x-y| < M$. При $|x| > N + M$ и, следовательно, $|y| > N$ имеем

$$\begin{gathered} |u_1(x) - u_1(y)| = \big|\big(1 - \varkappa_K(x)\big)u(x) - \big(1 - \varkappa_K(y)\big)u(y)\big| \leqslant \\ \leqslant |u(x) - u(y)| + \big|\varkappa_K(x)u(x) - \varkappa_K(y)u(y)\big| \leqslant \\ \leqslant |u(x) - u(y)| + \big|\varkappa_K(x)u(x) - \varkappa_K(y)u(x)\big| + \big|\varkappa_K(y)u(x) - \varkappa_K(y)u(y)\big| = \\ = |u(x) - u(y)| + |\varkappa_K(x) - \varkappa_K(y)| \cdot |u(x)| + |\varkappa_K(y)| \cdot |u(x) - u(y)| \leqslant \\ \leqslant |u(x) - u(y)| + \frac{M}{K}|u(x)| + |u(x) - u(y)| \leqslant 2\varepsilon + \frac{M}{K}\|u\|. \end{gathered}$$

Очевидно, эта величина мала при условии, что K достаточно велико. При $|x| \leqslant N + M$ и, следовательно, $|y| \leqslant N + 2M$ (в предположении, что $K > N + 2M$) имеем

$$\begin{gathered} |u_1(x) - u_1(y)| = \big|\big(1 - \varkappa_K(x)\big)u(x) - \big(1 - \varkappa_K(y)\big)u(y)\big| \leqslant \\ \leqslant \big|\big(1 - \varkappa_K(x)\big)u(x)\big| + \big|\big(1 - \varkappa_K(y)\big)u(y)\big| \leqslant \\ \leqslant 2\big(1 - \varkappa_K(N + 2M)\big)\|u\| = 2\Big(\frac{N + 2M}{K}\Big)\|u\|. \end{gathered}$$

Эта величина также мала при условии, что K достаточно велико.

Докажем обратное. Пусть для любых $\varepsilon > 0$ и $M < \infty$ функцию $u \in C$ можно представить в виде $u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in C_0$, а $|u_1(x) - u_1(y)| < \varepsilon$ при любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x - y| < M$. Возьмем N настолько большое, чтобы $|u_0(x)| < \varepsilon$ при $|x| > N$. Тогда для произвольных x и y таких, что $|x| > N$, $|y| > N$ и $|x - y| < M$, имеем

$$|u(x) - u(y)| < |u_0(x)| + |u_0(y)| + |u_1(x) - u_1(y)| < 3\varepsilon. \quad \square$$

Следствие 5. *Множество C_s образует замкнутое подпространство банахова пространства C.*

Доказательство. Пусть функция $v \in C$ принадлежит замыканию C_s. Это значит, что для каждого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $u \in C_s$, что

$$\|v - u\| < \varepsilon_1.$$

Представим функцию u виде $u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in C_0$, а u_1 удовлетворяет условиям предложения 4. Это позволяет представить функцию v в виде $v = u_0 + v_1$, где $v_1 = u_1 + (v - u)$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x - y| < M$, имеем

$$|v_1(x) - v_1(y)| \leqslant |u_1(x) - u_1(y)| + \big|\big(v - u\big)(x) - \big(v - u\big)(y)\big| \leqslant \varepsilon + \varepsilon_1.$$

Отсюда видно, что $v \in C_s$. $\square$

Лемма 1. *Пусть множество $B \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет меру 1. Пусть каждое из подмножеств K_1, K_2, ..., K_r, ... $\subseteq B$ имеет меру, большую или равную некоторого числа $\eta_1 > 0$. Тогда существует число $\eta_2 \in (0, \eta_1)$, обладающее свойством: среди множеств K_1, K_2, ... найдется такое, мера пересечения которого с бесконечным числом множеств последовательности K_1, K_2, ... больше или равна η_2.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число r, для которого $\eta_1 - \frac{1}{r} > 0$. Положим

$$\eta_2 = \frac{2}{r-1}\Big(\eta_1 - \frac{1}{r}\Big).$$

Предположим противное: пусть для любого множества K_i число множеств K_j, для которых $\mu(K_i \cap K_j) \geqslant \eta_2$, конечно (здесь и ниже символ μ означает меру).

Выбросим из последовательности K_1, K_2, ... множества K_j, $j > 1$, для которых $\mu(K_1 \cap K_j) \geqslant \eta_2$ (по предположению число таких множеств конечно). Члены полученной подпоследовательности обозначим прежними символами K_1, K_2, ... Теперь для всех $j > 1$ имеем $\mu(K_1 \cap K_j) < \eta_2$.

Затем выбросим из (вновь полученной) последовательности $K_1, K_2, \dots$ множества K_j, $j > 2$, для которых $\mu(K_2 \cap K_j) \geqslant \eta_2$. Члены полученной подпоследовательности вновь обозначим прежними символами K_1, K_2, ... Теперь для всех $j > 2$ имеем $\mu(K_2 \cap K_j) < \eta_2$.

Повторим эту процедуру r раз. В результате получим множества K_1, K_2, ..., $K_r \subseteq B$, обладающие свойствами: (a) $\mu(K_i) \geqslant \eta_1$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$ и (b) $\mu(K_i \cap K_j) < \eta_2$ для любых $i, j = 1, 2, \dots, r$. Для этих множеств имеем

$$\begin{aligned}\mu\big(K_1 \cup (K_2 \setminus K_1) \cup (K_3 \setminus K_2 \setminus K_1) \cup \dots \cup (K_r \setminus K_{r-1} \setminus \dots \setminus K_1)\big) > \\ > \eta_1 + (\eta_1 - \eta_2) + (\eta_1 - 2\eta_2) + \dots + (\eta_1 - (r-1)\eta_2) = \\ = r\eta_1 - \frac{r(r-1)}{2}\eta_2 = r\Big(\eta_1 - \frac{r-1}{2}\eta_2\Big).\end{aligned}$$

Поскольку $\mu(B) = 1$, а непересекающиеся множества K_1, $K_2 \setminus K_1$, $K_3 \setminus K_2 \setminus K_1$, $\dots$, $K_r \setminus K_{r-1} \setminus \dots \setminus K_1$ содержатся в B, отсюда следует, что

$$r\Big(\eta_1 - \frac{r-1}{2}\eta_2\Big) < 1.$$

Или

$$\eta_1 - \frac{r-1}{2}\eta_2 < \frac{1}{r}.$$

Или

$$\frac{r-1}{2}\eta_2 > \eta_1 - \frac{1}{r}.$$

Или

$$\eta_2 > \frac{2}{r-1}\Big(\eta_1 - \frac{1}{r}\Big),$$

что противоречит определению η_2. □

В следующем предложении устанавливается эквивалентность определения (1) медленно меняющейся функции и определения из [5], [6].

Предложение 6. *Множество C_s состоит из функций $u \in C$, для которых функция $S_h u - u$ принадлежит C_0 при всех $h \in \mathbb{R}^n$. Здесь S_h — оператор сдвига, задаваемый формулой*

$$\big(S_h u\big)(x) = u(x-h).$$

Доказательство. Пусть $u \in C_s$. В соответствии с предложением 4 представим функцию u в виде $u = u_0 + u_1$. Имеем $S_h u_0 - u_0 \in C_0$, поскольку $u_0 \in C_0$, а S_h переводит C_0 в себя. Иными словами,

$$\lim_{x\to\infty}\big|\big(S_h u_0\big)(x) - u_0(x)\big| = 0. \tag{2}$$

В то же время, в силу предложения 4

$$\big|\big(S_h u_1\big)(x) - u_1(x)\big| = |u_1(x-h) - u_1(x)| < \varepsilon$$

при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $|h| < M$. Следовательно, (символ $\overline{\lim}$ означает верхний предел)

$$\varlimsup_{x\to\infty}\big|\big(S_h u_1\big)(x) - u_1(x)\big| \leqslant \varepsilon, \qquad |h| < M.$$

Отсюда и из (2) имеем

$$\varlimsup_{x\to\infty}\big|\big(S_h u\big)(x) - u(x)\big| \leqslant \varepsilon, \qquad |h| < M.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\big|\big(S_h u\big)(x) - u(x)\big| = 0, \qquad |h| < M.$$

Иными словами,

$$S_h u - u \in C_0, \qquad |h| < M.$$

Остается напомнить, что в качестве M можно взять любое число.

Докажем обратное. Пусть функция $S_h u - u$ принадлежит C_0 при всех $h \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что $u \in C_s$. Предположим противное: пусть

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M < \infty \quad \forall\, N < \infty$$
$$\exists\, x, y : |x| > N,\ |y| > N,\ |x - y| < M$$
$$|u(x) - u(y)| \geqslant \varepsilon.$$

Или

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M < \infty \quad \forall\, N < \infty$$
$$\exists\, x, h : |x| > N,\ |h| < M$$
$$|u(x - h) - u(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем последовательности $x_m \to \infty$ и h_m, $|h_m| < M$, для которых

$$|u(x_m - h_m) - u(x_m)| \geqslant \varepsilon.$$

Заметим, что из неравенства треугольника

$$|u(x_m - h_m) - u(x_m)| \leqslant$$
$$\leqslant |u(x_m - h_m) - u(x_m - \tau)| + |u(x_m - \tau) - u(x_m)|$$

видно, что для произвольного $\tau \in \mathbb{R}^n$ выполняется по крайней мере одно из двух неравенств

$$\begin{gathered} |u(x_m - h_m) - u(x_m - \tau)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ |u(x_m - \tau) - u(x_m)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Зафиксируем число R, значительно большее M. Обозначим через $B = \{\, z \in \mathbb{R}^n : |z| \leqslant R \,\}$ замкнутый шар радиуса R с центром в нуле. Обозначим через B_m^- множество векторов $\tau \in B$, для которых $|u(x_m - h_m) - u(x_m - \tau)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, а через B_m^+ — множество векторов $\tau \in B$, для которых $|u(x_m - \tau) - u(x_m)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Согласно (3)

$$B_m^- \cup B_m^+ \supseteq B.$$

Следовательно, для каждого m выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$\mu(B_m^-) \geqslant \frac{1}{2}\mu(B), \qquad \mu(B_m^+) \geqslant \frac{1}{2}\mu(B).$$

Без ограничения общности можно считать, что либо $\mu(B_m^-) \geqslant \frac{1}{2}\mu(B)$ для всех m, либо $\mu(B_m^+) \geqslant \frac{1}{2}\mu(B)$ для всех m. В первом случае обозначим через B_m последовательность множеств $h_m - B_m^-$, а во втором — последовательность множеств B_m^+. Очевидно, множества B_m компактны.

Положим

$$K_m = B_m \cap B.$$

Из того, что R значительно больше M, следует, что

$$\mu(K_m) \geqslant \eta_1\, \mu(B),$$

где $\eta_1 > 0$ — некоторое число, не зависящее от m. Выполняя, если надо, в пространстве C преобразование $\big(H_\alpha u\big)(x) = u(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, без ограничения общности можно считать, что

$$\mu(B) = 1.$$

Воспользуемся леммой 1. От последовательности K_1, K_2, ... перейдем к подпоследовательности K_1^*, K_2^*, ..., обладающей свойством $\mu(K_1^* \cap K_j^*) \geqslant \eta_2$ для некоторого $\eta_2 > 0$. Рассмотрим новую последовательность $K_2' = K_1^* \cap K_2^*$, $K_3' = K_1^* \cap K_3^*$, ... (нумерация начинается с 2!). По построению $K_i' \subseteq K_1^*$ и $\mu(K_i') \geqslant \eta_2$. Вновь воспользуемся леммой 1. От последовательности K_2', K_3', ... перейдем к подпоследовательности $K_2'^*$, $K_3'^*$, ..., обладающей свойством $\mu(K_2'^* \cap K_j'^*) \geqslant \eta_3$ для некоторого $\eta_3 > 0$. Рассмотрим новую последовательность $K_3'' = K_2'^* \cap K_3'^*$, $K_4'' = K_2'^* \cap K_4'^*$, ... По построению $K_i'' \subseteq K_2'^*$ и $\mu(K_i'') \geqslant \eta_3$. И т.д. Очевидно, члены всех этих последовательностей являются непустыми компактными множествами. Поэтому пересечение убывающей последовательности

$$K_1^* \supseteq K_2'^* \supseteq K_3''^* \supseteq \dots$$

не пусто. Пусть вектор g принадлежит этому пересечению. В силу построения, g содержится в бесконечном числе исходных множеств K_m. Обозначим соответствующую последовательность индексов m_i.

Рассмотрим случай, когда $B_m = h_m - B_m^-$. Для каждого m_i представим вектор $g \in K_{m_i} = B_{m_i} \cap B = (h_{m_i} - B_{m_i}^-) \cap B$ в виде $g = h_{m_i} - \tau_{m_i}$, где $\tau_{m_i} \in B_{m_i}^-$, и следовательно, $|\tau_{m_i}| \leqslant R$. В силу (3)

$$|u(x_{m_i} - h_{m_i}) - u(x_{m_i} - \tau_{m_i})| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Или, в другой записи,

$$\big|\big(S_g u\big)(x_{m_i} - \tau_{m_i}) - u(x_{m_i} - \tau_{m_i})\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последовательность x_{m_i} стремится к бесконечности, а последовательность τ_{m_i} ограничена. Поэтому в силу последнего неравенства функция $S_g u - u$ не может принадлежать C_0. Получилось противоречие.

Случай, когда $B_m = B_m^+$, разбирается аналогично. □

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через $\vartheta_j : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ непрерывную функцию, равную 1 при $|x| \leqslant j$ и равную 0 при $|x| \geqslant j + 1$. Очевидно, $\vartheta_j u$ сходится к u по норме, если $u \in C_0$, и $\|\vartheta_j u\|$ сходится к $\|u\|$, если $u \in C$.

Предложение 7. *Для любого функционала $\mu \in C_0'$ предел*

$$\lim_{j \to \infty} \langle \vartheta_j u, \mu \rangle$$

существует равномерно по $u \in C$ в том смысле, что найдется такой функционал $\bar{\mu} \in C'$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \quad \forall j > J \quad \forall u \in C$$
$$\big|\langle \vartheta_j u, \mu \rangle - \langle u, \bar{\mu} \rangle\big| \leqslant \varepsilon \|u\|.$$

Тем самым формула $\langle u, \bar{\mu} \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle \vartheta_j u, \mu \rangle$ задает продолжение функционалов $\mu \in C_0'$ до функционалов $\bar{\mu} \in C'$.

Доказательство. Достаточно доказать следующий вариант критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \quad \forall i, j > J \quad \forall u \in C$$
$$\bigl|\langle \vartheta_i u, \mu\rangle - \langle \vartheta_j u, \mu\rangle\bigr| \leqslant \varepsilon \|u\|.$$

Или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \quad \forall i, j > J \quad \forall u \in C$$
$$\bigl|\langle (\vartheta_i - \vartheta_j) u, \mu\rangle\bigr| \leqslant \varepsilon \|u\|.$$

Предположим противное:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall J \quad \exists j > i > J \quad \exists u_{ij} \in C,\ \|u_{ij}\| = 1$$
$$\bigl|\langle (\vartheta_i - \vartheta_j) u_{ij}, \mu\rangle\bigr| > \varepsilon.$$

Заметим, что функции $v_{ij}(x) = (\vartheta_i(x) - \vartheta_j(x))u_{ij}(x)$ могут быть отличны от нуля только при $i < |x| < j+1$. Кроме того, $\|v_{ij}\| \leqslant \|u_{ij}\| = 1$. Таким образом, можно построить последовательности i_k, j_k, v_k так, чтобы $i_k < j_k < i_{k+1}$, а функции v_k, $\|v_k\| \leqslant 1$, могли быть отличны от нуля только при $i_k < |x| < j_k + 1$ и (считая без ограничения общности, что $\langle v_k, \mu\rangle$ неотрицательно)

$$\langle v_k, \mu\rangle > \varepsilon.$$

Для любого натурального N имеем: функция $\sum_{k=1}^N v_k$ принадлежит C_0, $\bigl\|\sum_{k=1}^N v_k\bigr\| \leqslant 1$ (поскольку носители функций v_k не пересекаются) и

$$\Bigl\langle \sum_{k=1}^N v_k, \mu \Bigr\rangle > N\varepsilon,$$

что противоречит ограниченности функционала μ.

Поскольку $\lim_{j\to\infty} \vartheta_j u = u$ для $u \in C_0$, функционал $\langle u, \mu\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle \vartheta_j u, \mu\rangle$ действительно является продолжением функционала μ. □

3. РАЗНОСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Разностно-интегральным называют оператор вида

$$\bigl(Tu\bigr)(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u(x - h_m) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi) u(x-\xi)\, d\xi, \tag{4}$$

где $h_m \in \mathbb{R}^n$, $a_m \in \mathbf{B}(\mathbb{E})$, $\sum_{m=1}^{\infty} \|a_m\| < \infty$, $g \in L_1\bigl(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}(\mathbb{E})\bigr)$.

Предложение 8. *Оператор* (4) *переводит пространства* C, C_s *и* C_0 *в себя и ограничен. При этом*

$$\|T\| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \|a_m\| + \|g\|_{L_1}.$$

Доказательство. Случаи пространств C и C_0 разобраны, например, в [8, теорема 4.4.4]. Обсудим случай пространства C_s. Заметим, что оператор T коммутирует с оператором сдвига S_h:

$$S_hT = TS_h.$$

Возьмем произвольную функцию $u \in C_s$. Очевидно, $Tu \in C$. С помощью предложения 6 проверим, что $Tu \in C_s$. Имеем

$$S_h(Tu) - (Tu) = TS_hu - Tu = T(S_hu - u) \in C_0,$$

поскольку $S_hu - u \in C_0$, а пространство C_0 переводится оператором T в себя. □

Предложение 9. *Для любой $u \in C$ последовательность $T(\vartheta_j u)$ сходится к Tu равномерно на ограниченных подмножествах $W \subset \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\big|\big(Tu\big)(x) - \big(T(\vartheta_j u)\big)(x)\big| = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} a_m u(x-h_m) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)u(x-\xi)\,d\xi - \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} a_m \vartheta_j(x-h_m)u(x-h_m) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\vartheta_j(x-\xi)u(x-\xi)\,d\xi = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} a_m\big[1-\vartheta_j(x-h_m)\big]u(x-h_m) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\big[1-\vartheta_j(x-\xi)\big]u(x-\xi)\,d\xi = \\
&= \sum_{m=1}^{N} a_m\big[1-\vartheta_j(x-h_m)\big]u(x-h_m) + \int\limits_{|\xi|\leqslant N} g(\xi)\big[1-\vartheta_j(x-\xi)\big]u(x-\xi)\,d\xi + \\
&+ \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m\big[1-\vartheta_j(x-h_m)\big]u(x-h_m) + \int\limits_{|\xi|\geqslant N} g(\xi)\big[1-\vartheta_j(x-\xi)\big]u(x-\xi)\,d\xi.
\end{aligned}$$

Третье и четвертое слагаемые можно сделать как угодно малыми за счет выбора N, а для первых двух слагаемых равномерная сходимость к нулю на ограниченных подмножествах $W \subset \mathbb{R}^n$ очевидна. □

Теорема 10. *Следующие условия равносильны.*

(a) *Разностно-интегральный оператор $T : C \to C$ обратим.*

(b) *Разностно-интегральный оператор $T : C_0 \to C_0$ обратим.*

(c) *Разностно-интегральный оператор $T : C_s \to C_s$ обратим.*

(d) $0 \notin \bigcup\Big\{\sigma(a) : a \in \overline{\cup\{\sum_{h\in\mathbb{R}^n} a_m e^{-i\langle h_m,\xi\rangle} + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,dx : \xi \in \mathbb{R}^n\}}\Big\}$, *где черта означает замыкание, а* $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n$.

При выполнении этих условий обратный оператор также является разностно-интегральным.

Доказательство. Эквивалентность (a), (b) и (d) доказана в [8, теорема 4.5.5 и следствие 4.5.2].

Пусть выполнено (a). Тогда [8, теорема 4.5.5(f)] обратный оператор $T^{-1} : C \to C$ также является разностно-интегральным. В силу предложения 8 T^{-1} переводит подпространство $C_s \subset C$ в себя. Следовательно, выполнено (c).

Пусть выполнено (c). Тогда в силу теоремы 1 $|T : C_s \to C_s|_+ > 0$. Отсюда очевидно, что и $|T : C_0 \to C_0|_+ > 0$. Далее, в силу теоремы 1 $|T : C_s \to C_s|_- > 0$, откуда в силу предложения 2 $|T' : C_s' \to C_s'|_+ > 0$. Возьмем произвольный функционал $\mu \in C_0'$. Покажем, что

$$\|T'\mu\|_{C_0'} \geqslant |T' : C_s' \to C_s'|_+ \cdot \|\mu\|.$$

Отсюда будет следовать, что $|T' : C_0' \to C_0'|_+ > 0$. В силу теоремы 1 последнее неравенство будет означать, что оператор $T : C_0 \to C_0$ обратим и тем самым выполнено (a).

Рассмотрим продолжение (существующее в силу предложения 7)

$$\langle u, \bar{\mu} \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \vartheta_j u, \mu \rangle, \qquad u \in C_s.$$

функционала $\mu \in C_0'$ до функционала $\bar{\mu} \in C_s'$. Очевидно, $\|\bar{\mu}\| = \|\mu\|$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу определения нормы существует функция $u \in C_s$, $\|u\| = 1$, для которой

$$\bigl|\langle u, T'\bar{\mu} \rangle\bigr| \geqslant \|T'\bar{\mu}\| - \varepsilon \geqslant |T' : C_s' \to C_s'|_+ \cdot \|\bar{\mu}\| - \varepsilon = |T' : C_s' \to C_s'|_+ \cdot \|\mu\| - \varepsilon.$$

С другой стороны, в силу определения $\bar{\mu}$ имеем

$$\bigl|\langle u, T'\bar{\mu} \rangle\bigr| = \bigl|\langle Tu, \bar{\mu} \rangle\bigr| = \lim_{j\to\infty} \langle \vartheta_j Tu, \mu \rangle.$$

Отсюда при всех достаточно больших j имеем

$$\bigl|\langle \vartheta_j Tu, \mu \rangle\bigr| \geqslant \bigl|\langle u, T'\bar{\mu} \rangle\bigr| - \varepsilon.$$

Далее, в силу предложения 9 для любого j последовательность $\vartheta_j T(\vartheta_k u)$ сходится по норме при $k \to \infty$ к $\vartheta_j Tu$. Поэтому при достаточно больших k

$$\bigl|\langle \vartheta_j T(\vartheta_k u), \mu \rangle\bigr| \geqslant \bigl|\langle \vartheta_j Tu, \mu \rangle\bigr| - \varepsilon.$$

При этом $\|\vartheta_k u\| \leqslant \|u\| = 1$. Поэтому

$$\frac{\bigl|\langle \vartheta_j T(\vartheta_k u), \mu \rangle\bigr|}{\|\vartheta_k u\|} \geqslant \bigl|\langle \vartheta_j Tu, \mu \rangle\bigr| - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\sup_{v\in C_0} \frac{\bigl|\langle \vartheta_j Tv, \mu \rangle\bigr|}{\|v\|} \geqslant \bigl|\langle \vartheta_j Tu, \mu \rangle\bigr| - \varepsilon.$$

Наконец, в силу предложения 7 при достаточно больших j имеем

$$\sup_{v\in C_0} \frac{\bigl|\langle Tv, \mu \rangle\bigr|}{\|v\|} \geqslant \sup_{v\in C_0} \frac{\bigl|\langle \vartheta_j Tv, \mu \rangle\bigr|}{\|v\|} - \varepsilon.$$

Объединяя вместе все оценки и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\|T'\mu\|_{C_0'} = \sup_{v\in C_0} \frac{\bigl|\langle v, T'\mu \rangle\bigr|}{\|v\|} = \sup_{v\in C_0} \frac{\bigl|\langle Tv, \mu \rangle\bigr|}{\|v\|} \geqslant |T' : C_s' \to C_s'|_+ \cdot \|\mu\|. \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Репников В.Д. О равномерной стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений / В.Д. Репников // ДАН СССР. — 1964. — Т. 157, № 3. — С. 532–535.

[2] Жиков В.В. О стабилизации решений параболических уравнений / В.В. Жиков // Матем. сб. — 1977. — Т. 104, № 4. — С. 597–616.

[3] Денисов В.Н. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений / В.Н. Денисов, В.В. Жиков // Матем. заметки. — 1985. — Т. 37, № 6. — С. 834–850.

[4] Денисов В.Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени / В.Н. Денисов // Успехи матем. наук. — 2005. — Т. 60, № 4. — С. 145–212.

[5] Баскаков А.Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А.Г. Баскаков, Н.С. Калужина // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 643–661.

[6] Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // Успехи матем. наук. — 2013. — Т. 68, № 1(409). — С. 77–128.

[7] Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука. — 1970. — 536 с.

[8] Kurbatov V.G. Functional Differential Operators and Equations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers. — 1999. — 454 p.

[9] Gindler H.A. The minimum modulus of a linear operator and its use in spectral theory / H.A. Gindler, A.E. Taylor // Studia Math. — 1962/63. — Vol. 22. — P. 15–41.

[10] A. Pietsch. Operator Ideals. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. — Berlin. — 1978. — 471 p.

[11] Weis L.W. On the computation of some quantities in the theory of Fredholm operators / L.W. Weis // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1984. — Vol. 33, no. 5 (suppl.). — P. 109–133.

[12] Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

Кузнецова В. И., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Воронежского государственного технического университета
E-mail: kv57@bk.ru
Тел.: (473)254–54–75

Kuznetsova V. I., Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, associate professor of the Department of Applied Mathematics, Voronezh State Technical University
E-mail: kv57@bk.ru
Tel.: (473)254–54–75

Курбатов В. Г., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
E-mail: kv51@inbox.ru
Тел.: (4742)27–39–48

Kurbatov V. G., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Department of Mathematics, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
E-mail: kv51@inbox.ru
Tel.: (4742)27–39–48