

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ\*

В. И. Костылев

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 07.06.2013 г.

**Аннотация:** энергетическое (радиометрическое) различение случайных векторов предполагает принятие решения относительно гипотезы о нахождении вектора внутри гипершара. Вероятности принятия решений количественно характеризуют эффективность радиометра. Для гауссовых, максвелловских и релеевских векторов получены формулы для расчёта таких вероятностей.

**Ключевые слова:** вероятность, случайный вектор, распределение Релея, распределение Максвелла, распределение Гаусса.

**Abstract:** the recognition of random vectors with the help of a radiometer means the decision about hypothesis that vector is inside the hypersphere. Probabilities of decision is the measure of the radiometer's efficiency. For the cases of Maxwell, Rayleigh, and Gaussian distributions equations for calculation of such probabilities are obtained.

**Keywords:** probability, random vector, Maxwell distribution, Rayleigh distribution, Gaussian distribution.

### ВВЕДЕНИЕ

Случайные векторы в радиотехнике получаются в результате временной дискретизации случайных информационных процессов и шумов. В радиотехнической литературе [1–3] описаны несколько десятков моделей вероятностных распределений. В настоящей работе рассмотрение ограничено тремя из них, а именно, распределением Гаусса с нулевым математическим ожиданием, распределением Релея и распределением Максвелла.

Принцип работы радиометра [4, 5] основан на проверке факта нахождения обрабатываемого случайного вектора внутри (или вне) некоторого шара. Вероятности такого нахождения количественно характеризуют эффективность радиометра. Цель статьи — получить формулы для расчёта таких вероятностей.

### 1. ПРОСТРАНСТВО НАБЛЮДЕНИЙ

Совокупность всех реализаций  $r(t)$  случайного процесса  $R(t)$  образует пространство наблюдений.

В современной радиоаппаратуре непрерывная реализация  $r(t)$  подвергается временной дискретизации, поэтому результат наблюдения есть конечномерный вектор  $\mathbf{r}$  с компонентами  $r_i = r(t_0 + i\Delta t)$ , где  $t_0$  — детерминированная константа, определяемая выбором начала

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ), грант № 13-01-00773.

© Костылев В. И., 2013

отсчёта времени, а  $\Delta t$  — интервал дискретизации времени. Пусть  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^n$ , где  $\mathbf{R}^n$  — некоторое подмножество  $n$ -мерного евклидова пространства. Вектор  $\mathbf{r}$  называют выборкой, параметр  $n$  — размером выборки, компоненты  $\{r_i\}$  вектора  $\mathbf{r}$  — выборочными значениями или элементами выборки, а подмножество  $\mathbf{R}^n$  — выборочным пространством. Если выборочные значения представляют собой совокупность независимых случайных величин, то выборку  $\mathbf{r}$  называют независимой (или случайной [6]). Если все элементы независимой выборки подчиняются одному и тому же распределению, то выборка называется однородной.

В случае широко распространённого закона Релея одномерная плотность вероятности имеет, например, такой вид:

$$p_R(r|b) = \Omega(r) \frac{r}{b} \exp\left(-\frac{r^2}{2b}\right), \quad (1)$$

где  $b$  — параметр распределения Релея,

$$\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

функция единичного скачка.

На рис. 1 показаны рассчитанные по формуле (1) графики плотностей вероятности Релея. При этом сплошной линией показана плотность вероятности для случая  $b = 1$ , а пунктирной — для случая  $b = 8$ .

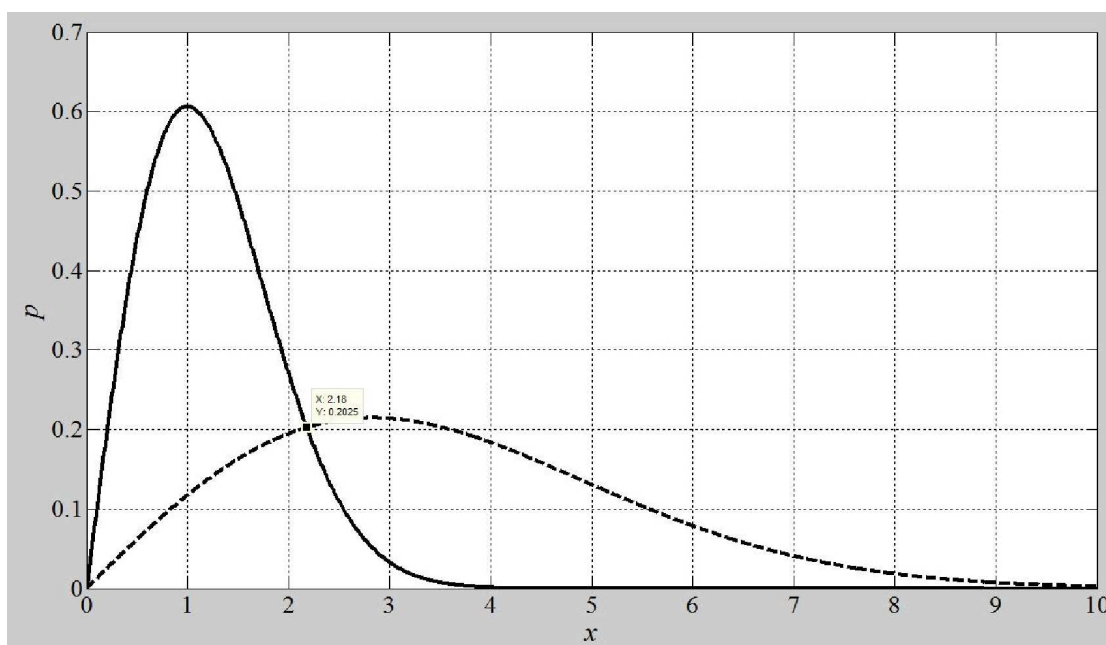


Рис. 1. Плотности вероятности Релея

Одномерная плотность вероятности распределения Максвелла есть [3]

$$p_M(r|c) = \Omega(r) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r^2}{c^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2c}\right)\right], \quad (3)$$

где  $c$  — параметр распределения Максвелла. Функция единичного скачка  $\Omega(x)$  определена формулой (2).

На рис. 2 приведены рассчитанные по формуле (3) графики плотностей вероятности Максвелла. При этом сплошной линией показана плотность вероятности для случая  $c = 1$ , а пунктирной — для случая  $c = 8$ .

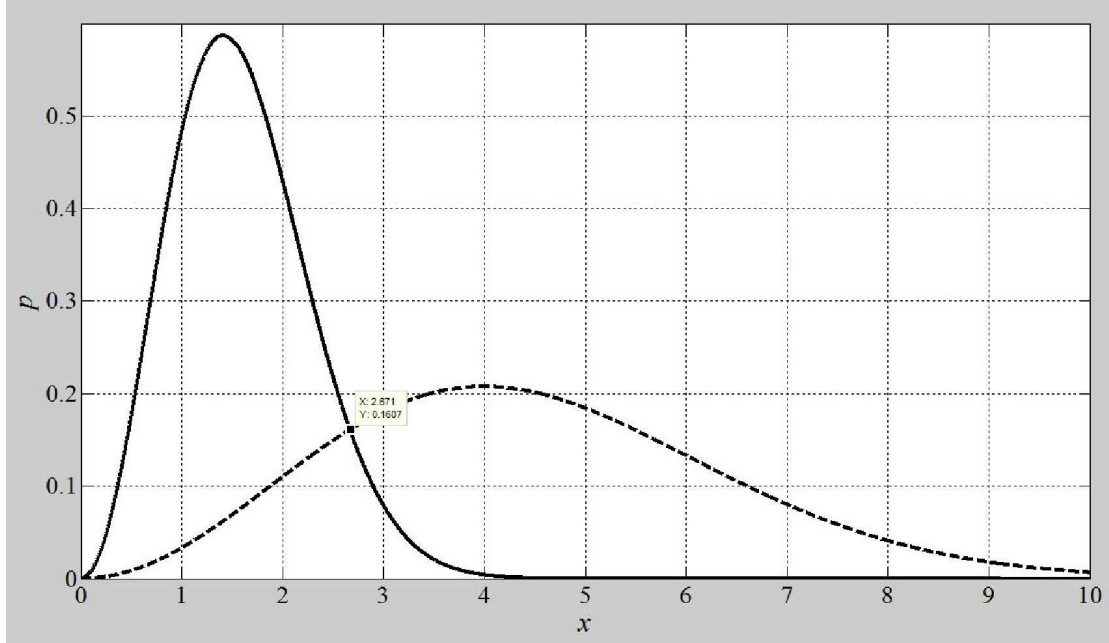


Рис. 2. Плотности вероятности Максвелла

Если математическое ожидание равно нулю, то одномерная плотность вероятности распределения Гаусса есть

$$p_G(r|D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{r^2}{2D}\right), \quad (4)$$

где  $D$  — параметр распределения Гаусса, совпадающий с дисперсией.

На рис. 3 показаны рассчитанные по формуле (4) графики плотностей вероятности Гаусса. При этом сплошной линией показана плотность вероятности для случая  $D = 1$ , а пунктирной — для случая  $D = 9$ .

Пусть выборочное пространство  $\mathbf{R}^n$  разбито на два подпространства  $\mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{R}_1$ , которые разделяет некоторая гиперсфера  $\varphi$ . При этом подпространство  $\mathbf{R}_0$  представляет собой гипершар  $\mathbf{O}$ .

Условие нахождения вектора  $\mathbf{r}$  внутри гипершара  $\mathbf{O}$  таково:

$$\sum_{m=1}^n r_m^2 < \mathfrak{R}^2, \quad (5)$$

где  $\mathfrak{R}$  — радиус гиперсферы.

Вероятность выполнения условия (5) обозначим  $p_0$ .

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА

Если компоненты вектора  $\mathbf{r}$  имеют распределение (4), то можно показать, что в левой части (5) стоит сумма независимых случайных величин, имеющих одинаковые плотности

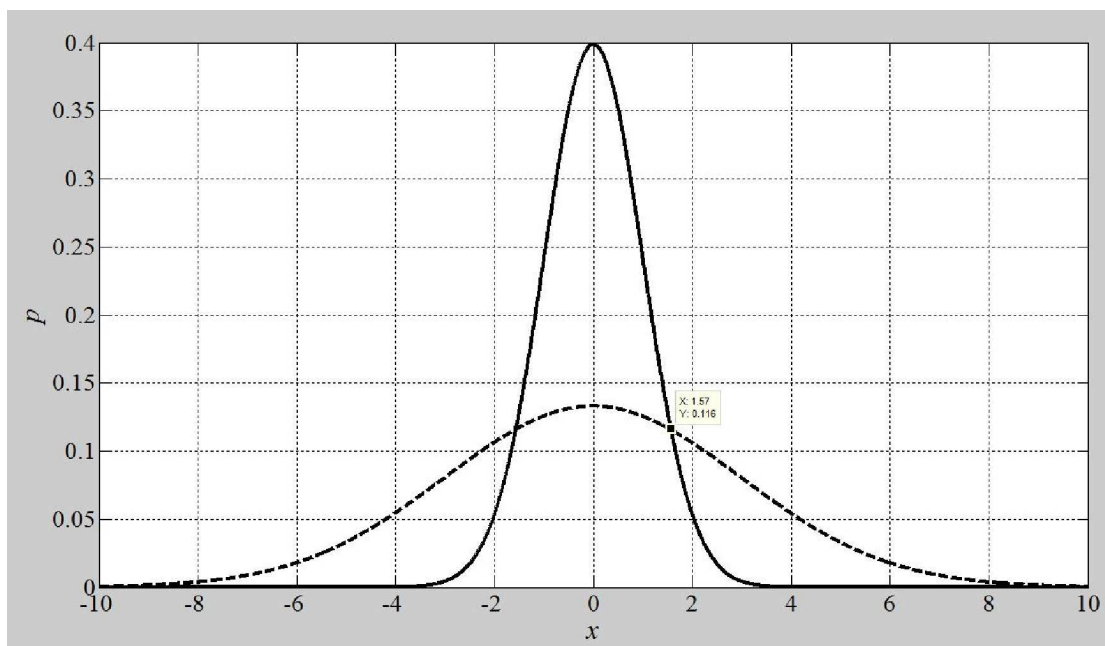


Рис. 3. Плотности вероятности Гаусса

вероятности

$$f(y|D) = \Omega(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi Dy}} \exp\left(-\frac{y}{2D}\right). \quad (6)$$

Плотности вероятности (6) соответствует характеристическая функция

$$\Phi(j\nu|D) = \frac{1}{\sqrt{1 - j\nu 2D}}. \quad (7)$$

Характеристическая функция  $\Phi_{\Sigma}(j\nu|D)$  суммы независимых случайных величин есть произведение характеристических функций слагаемых, поэтому

$$\Phi_{\Sigma}(j\nu|D) = \frac{1}{(1 - j\nu 2D)^{n/2}}. \quad (8)$$

Характеристической функции (8) соответствует плотность вероятности гамма-распределения:

$$p_{\Sigma}(z|D) = \frac{\Omega(z) z^{\frac{n}{2}-1}}{(2D)^{\frac{n}{2}} \Gamma(n/2)} \exp\left(-\frac{z}{2D}\right), \quad (9)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция [7].

С учётом (9) нетрудно найти выражение для вероятности  $p_0$  нахождения случайного вектора с независимыми компонентами, имеющими распределение Гаусса и нулевые математические ожидания, внутри шара радиуса  $\mathfrak{R}$ :

$$p_I = P\left(\frac{n}{2}, \frac{\mathfrak{R}^2}{2D}\right), \quad (10)$$

где

$$P(x, y) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^y z^{x-1} \exp(-z) dz \quad (11)$$

ро-функция [7, 8], представляющая собой не что иное, как нормированную неполную гамма-функцию. В программной среде MATLAB ро-функция запрограммирована в файле `gammainc.m`.

### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЛЕЯ

Если компоненты вектора  $\mathbf{r}$  имеют распределение Релея (1), то в левой части (5) стоит сумма квадратов независимых релеевых случайных величин. При этом каждое из слагаемых имеет экспоненциальное распределение вероятности с плотностью вероятности

$$p(y|b) = \frac{\Omega(y)}{2b} \exp\left(-\frac{y}{2b}\right). \quad (12)$$

Плотности вероятности (12) соответствует характеристическая функция

$$\Phi(j\nu|b) = \frac{1}{1 - j\nu 2b}. \quad (13)$$

Характеристическая функция  $\Phi_{\Sigma}(j\nu|b)$  суммы независимых случайных величин есть произведение характеристических функций слагаемых, поэтому

$$\Phi_{\Sigma}(j\nu|b) = \frac{1}{(1 - j\nu 2b)^n}. \quad (14)$$

Характеристической функции (14) соответствует плотность вероятности гамма-распределения:

$$p_{\Sigma}(z|b) = \frac{\Omega(z) z^{n-1}}{(2b)^n \Gamma(n)} \exp\left(-\frac{z}{2b}\right), \quad (15)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция [7].

С учётом (15) нетрудно найти выражение для вероятности  $p_0$  нахождения случайного вектора с независимыми компонентами, имеющими распределение Релея, внутри шара радиуса  $\mathfrak{R}$ :

$$p_0 = P\left(n, \frac{\mathfrak{R}^2}{2b}\right), \quad (16)$$

где  $P(x, y)$  — ро-функция (см. (11)).

### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

В случае распределения Максвелла (см. (3)) можно показать, что в левой части (5) стоит сумма независимых случайных величин, имеющих одинаковые плотности вероятности

$$f(y|c) = \Omega(y) \sqrt{\frac{y}{2\pi}} \frac{1}{c^{3/2}} \exp\left(-\frac{y}{2c}\right). \quad (17)$$

Плотности вероятности (17) соответствует характеристическая функция

$$\Phi(j\nu|c) = \frac{1}{(1 - j\nu 2c)^{3/2}}. \quad (18)$$

Характеристическая функция  $\Phi_{\Sigma}(j\nu|c)$  суммы независимых случайных величин есть произведение характеристических функций слагаемых, поэтому

$$\Phi_{\Sigma}(j\nu|c_{\Sigma}) = \frac{1}{(1 - j\nu 2c)^{3n/2}}. \quad (19)$$

Характеристической функции (19) соответствует плотность вероятности гамма-распределения:

$$p_{\Sigma}(z|c) = \frac{\Omega(z) z^{\frac{3n}{2}-1}}{(2c)^{\frac{3n}{2}} \Gamma(3n/2)} \exp\left(-\frac{z}{2c}\right), \quad (20)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция [7]. Однако параметры гамма-распределения в случае распределения Максвелла несколько иные, чем в формулах (9) или (15).

С учётом (20) нетрудно найти выражение для вероятности  $p_0$ :

$$p_0 = P\left(\frac{3n}{2}, \frac{\mathfrak{R}^2}{2c}\right), \quad (21)$$

где  $P(x, y)$  — ро-функция (см. (11)).

## 5. ОБЩАЯ ФОРМУЛА

Нетрудно заметить сходство формул (10), (16) и (21). Можно записать общую формулу для расчёта вероятности нахождения случайного вектора с одним из рассмотренных трёх распределений внутри сферы радиуса  $\mathfrak{R}$ :

$$p_0 = P(m, h). \quad (22)$$

Здесь  $m = kn/2$  и  $h = \mathfrak{R}^2/(2a)$ ; значения параметров  $k$  и  $a$  приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения параметров

Распределение	$k$	$a$
Гаусса	1	$D$
Релея	2	$b$
Максвелла	3	$c$

На рис. 4 приведена вероятность нахождения случайного вектора внутри шара в зависимости от обобщённого параметра  $h$  для различных значений обобщённого параметра  $m$ . Сплошная линия соответствует случаю  $m = 8$ , пунктирная —  $m = 16$ , точечная —  $m = 32$  и штрих-пунктирная —  $m = 64$ .

Как следует из хода кривых, чтобы повысить вероятность нахождения случайного вектора внутри шара нужно либо увеличивать параметр  $h$ , либо уменьшать параметр  $m$ . При заданном радиусе шара для каждого из трёх распределений указанная вероятность увеличивается с уменьшением параметра распределения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов В. И. Статистическая радиотехника // В.И. Тихонов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
- [2] Горяинов В. Т. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи: Учебн. пособие для вузов // В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов. — 2-е изд. — М.: Советское радио, 1980. — 544 с.
- [3] Тихонов В.И. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т. 1. Случайные величины и процессы // В.И. Тихонов, Б.И. Шахтарин, В.В. Сизых. — М.: Радио и связь, 2003. — 400 с.

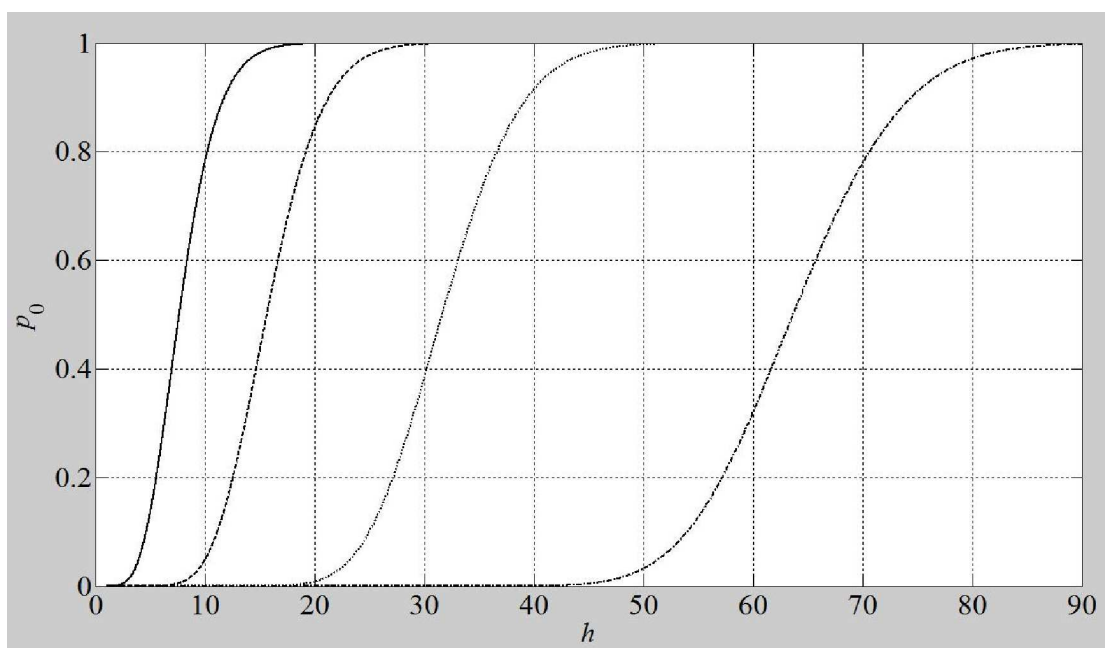


Рис. 4. Вероятность нахождения случайного вектора внутри шара

[4] Torrieri D. The Radiometer and Its Practical Implementation // The 2010 Military Communications Conference, pp. 28-34.

[5] Sonnenschein A., Fishman P. M. Radiometric detection of spread spectrum-signals in noise of uncertain power // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 28, pp. 654-660, July 1992.

[6] Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники // Б.Р. Левин. — М. Радио и связь, 1989. — 656 с.

[7] Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Applied Math. Series #55, Dover Publications, 1965, sec. 6.5.

[8] Cody, J., An Overview of Software Development for Special Functions, Lecture Notes in Mathematics. — Berlin: Springer Verlag, 1976.

*Костылев В. И., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования Воронежского государственного университета  
E-mail: Kostylev@phys.vsu.ru  
Тел.: +74732525052*

*Kostylev V. I., Department of Technical Cybernetics and Automatic Control of the Voronezh State University, Head  
E-mail: Kostylev@phys.vsu.ru  
Tel.: +74732525052*