УДК 517.9

МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСКЛАДЫ БИФУРЦИРУЮЩИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ГЛАДКОГО ФУНКЦИОНАЛА ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ МИНИМУМА С ОМБИЛИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов, Н. С. Уварова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.05.2013 г.

Аннотация: в данной статье приведена теорема, обобщающая сравнительно недавние результаты Ю. И. Сапронова, М. А. Хуссаина, А. В. Белоглазова и И. В. Колесниковой по ветвлению критических точек гладкого функционала в угловой точке минимума с омбилической особенностью. Сформулированы правила допустимости максимального расклада бифурцирующих экстремалей гладкого функционала в угловой точке минимума с омбилической особенностью. Представлен полный список максимальных раскладов (посредством кодирующих матриц)и приведены графические иллюстрации соответствующих линий уровня ключевой функции.

Ключевые слова: гладкий функционал, бифурцирующая экстремаль, конечномерная редукция, угловая точка минимума, омбилическая особенность, максимальный расклад экстремалей, кодирующая матрица bif-расклада.

Abstract: in this article, we present the theorem which generalizes the relatively recent Y.I. Sapronova's, M.A. Hussain's, A.V. Beloglazova's and I.V. Kolesnikova's results on branching of the critical points of a smooth functional in the corner minimum point with a umbilical feature. The rules of admissibility of maximum spectrum of the smooth functional bifurcating extremals in the corner minimum point with umbilical singularity are formulated (in the article). There is a full list of maximum spectrum (by coding matrix) and graphic illustrations of the key function corresponding level curves.

Keywords: smooth functional, bifurcating extremal, finite dimensional reduction, angular minimum point, umbilical feature, the maximum balance of extremals, coding matrix bif-spectrum.

1. ОБ ЭКСТРЕМАЛЯХ, БИФУРЦИРУЮЩИХ ИЗ УГЛОВЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

К анализу гладких функционалов вблизи угловых особых точек края банахова многообразия приходится обращаться как в пределах «чистой» теории особенностей гладких функционалов, так и в прикладных задачах теории управления, теории фазовых переходов, теории бифуркаций периодических волн и т.д. Эти задачи допускают единообразную постановку в форме абстрактной вариационной задачи с полуограничениями

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad g_k(x) \geqslant 0, \quad x \in M, \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

в которой $V(x),\ g_k(x)$ — гладкие функционалы на гладких банаховых многообразиях. Такие задачи приводят к необходимости бифуркационного анализа экстремалей вблизи угловой точки края банахова многообразия. Важнейшим инструментом анализа экстремалей вблизи угловой точки является вариационный метод конечномерной редукции, позволяющий сводить анализ ветвления экстремалей к анализу ветвления критических точек функции $W(\xi) = \inf\limits_{g_k(x)=\xi_k} V(x)$, в угловом секторе конечномерного пространства $\mathbb{R}^m$ (см. [1]).

Общая схема анализа краевых и угловых особенностей гладких функций и их разверток была создана усилиями В.И. Арнольда, С.Т.С. Уолла, Д. Сирсмы, Д. Пита, Т. Постона и др. [2] – [4]. В.И. Арнольдом был сформулирован принцип отождествления краевых особенностей с особенностями, инвариантными относительно действия элементарной инволюции (инволюция элементарна, если коразмерность ее зеркала равна единице). Этот принцип позволил перенести понятие краевой особенности на комплексный случай и развить соответствующую теорию. Затем Д. Сирсмой была развита теория угловых особенностей [4], как обобщение теории краевых особенностей. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах В.А. Васильева, А.А. Давыдова, В.И. Матова и др. [2]

Перенос теории угловых особенностей на класс фредгольмовых функционалов был осуществлен Ю.И. Сапроновым посредством вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта [1]. Сравнительно недавно Ю.И. Сапроновым, А.В. Гнездиловым, О.Ю. Даниловой, О.В. Швыревой, М.А. Хуссаином, А.В. Белоглазовым и И.В. Колесниковой был проанализирован ряд важных бифуркационных задач в угловых особых точках, связанных с приложениями к задачам механики сплошных сред и математической физики [1], [5] – [7]. Выяснилось, что ряд внешне различных краевых задач приводит в конечном итоге к одной и той же задаче — изучению ветвления критических точках параметрического семейства многочленов от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в положительном октанте координатного пространства $\mathbb{R}^n$. Список примеров такого типа исследований постоянно растет.

2. КОНЕЧНОМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ ДЛЯ РАЗВЕРТКИ УГЛОВОЙ ОСОБЕННОСТИ

Пусть $f : E \longrightarrow F$ — гладкое фредгольмово отображение банаховых пространств [8], [9]. Если для заданного уравнения $f(x) = 0$ найдется такой гладкий функционал V на E, что $f = \mathrm{grad}_H V$ или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h\rangle_H, \quad \forall\ x, \quad h \in E,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в некотором заранее выбранном гильбертовом пространстве H, содержащем E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства, то отображение f называется потенциальным, а функционал V называется потенциалом отображения f. При этом предполагается, что E непрерывно вложено в F (см. [1]).

Если V — потенциал f, то уравнение $f(x) = 0$ можно переписать в виде

$$\mathrm{grad}_H V(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}$$

(в виде уравнениея Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала V). Решения последнего уравнения называются экстремалями функционала V. Таким образом, если a — экстремаль V, то

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h\rangle_H = 0, \quad \forall\ h \in E\backslash\{0\}.$$

Плотность E в H обеспечивает равносильность последнего равенства уравнению $f(x) = 0$. Построение решений этого уравнения можно заменить построением экстремалей (критических точек) функционала V (вариационный метод). Функционал V называется фредгольмовым, если его градиент — фредгольмово отображение нулевого индекса. Критическая точка a функционала V называется невырожденной (морсовской), если

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)h \neq 0 \quad , \quad \forall\, h \in E\backslash\{0\}.$$

Пусть гладкое семейство гладких функционалов $V(x, \lambda)$ задано при ограничениях на основной аргумент в виде неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих m-гранный угол: $\mathcal{C} = \{x \in E|\ g_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ (случай одного неравенства дает краевую особенность).

Точка $a \in \mathcal{C}$ называется условно критической для $V(x, \lambda)$, если $\mathrm{grad}_H V(a, \lambda)$ ортогонален грани угла $\mathcal{C}$, содержащей a. Все критические точки a делятся на угловые, краевые и внутренние. Множество всех точек, принадлежащих минимальной грани (грани максимальной коразмерности), называется вершинной гранью угла или, более кратко, вершиной угла.

Вообще говоря, анализ поведения функционала $V(x, \lambda)$ вблизи особой точки на вершине угла можно провести, используя редуцирующий переход к функции на $\mathbb{R}^n$, заданной формулой $W(\xi) := \inf\limits_{x: g(x)=\xi} V(x)$ — по одной из схем конечномерной редукции (см. [1]). Здесь $g(x) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^\top$, $\{g_k\}$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя ограничители $\{g_1, \ldots, g_m\}$, определяющих угол.

Функционалы $g_i(x)$ подчинены, как правило, дополнительным «техническим» условиям: предполагается, что $\mathrm{grad}_H\, g_i(x) \in F \quad \forall x \in E$, и в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует (вблизи порождающей особой точки) единственная (морсовская) условная экстремаль $x = \varphi(\xi)$. Подмногообразие $\mathcal{N}$, состоящее из точек $\varphi(\xi)$, называется редуцирующим. Ключевая функция представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

Таким образом, исследование V в угле $\mathcal{C}$ сводится к исследованию функции W в координатном угле $\{\xi_1 \geqslant 0, \ldots, \xi_m \geqslant 0\}$. Кратность $\widehat{\mu}$ вершинной угловой критической точки $a \in \mathcal{C}$ определяется (см. [4]) как размерность фактор-алгебры $Q(W, \alpha) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\widehat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$, где α — образ a в пространстве ключевых переменных, принадлежащий вершинной грани $\{\xi_1 = 0, \ldots, \xi_m = 0\}$, $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - \alpha$, а $\widehat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный следующим набором функций (точнее, тейлоровскими разложениями этих функций):

$$\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1},\ \xi_2 \frac{\partial W}{\partial \xi_2}\ , \ \ldots,\ \xi_m \frac{\partial W}{\partial \xi_m}\ ,\quad \frac{\partial W}{\partial \xi_{m+1}}\ , \ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial \xi_n}.$$

Аналогично определяется кратность особой точки на других гранях угла. Кратность внутренней точки a угла определяется обычном образом [2], как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\mathfrak{A}(W, \alpha)$, где $\mathfrak{A}(W, \alpha)$ — якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором первых производных $\frac{\partial W}{\partial \xi_1},\ \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial \xi_n}$.

Пусть $\widehat{M} \in E \times R^q$ — многообразие катастроф:

$$\widehat{M} = M_0 \cup M_1 \cup M_2, \ldots, \cup, \ldots, M_j, \ \ldots\ ,$$

где $M_j,\ j = j_1, \ldots, j_k,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, определяется соотношениями

$$f(x, \lambda) = 0, \quad x \in \mathcal{C}_j, \quad \dim Ker \frac{\partial [f]_j}{\partial x}(x, \lambda) > 0.$$

Здесь $\mathcal{C}_j$ — грань угла, $[f]_j = \mathrm{grad}_H \left(V \Big|_{\mathcal{C}_j} \right)$.

Каустикой семейства $W(x,\lambda)$ будем называть, следуя В.И. Арнольду [2], совокупность тех тех значений параметра $\overline{\lambda}$ (вблизи нуля), при которых $W(\cdot,\overline{\lambda})$ имеет вблизи нуля вырожденную критическую точку. Каустика Σ функционала в угловой особой точке определяется также как образ многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: $\Sigma = \pi(\widehat{M})$.

Если заранее известна оценка сверху некоторым (целым) числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый расклад бифурцирующих экстремалей (bif-расклад) описывается матрицей (кодирующей матрицей bif-расклада) $L = (l_k^j)$, в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек на C_k.

В случае угловой особенности ее версальная деформация (развертка) определяется как функция $W(x,\lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x,0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\widehat{Q}_0(W)$. Если эта совокупность является базисом $\widehat{Q}_0(W)$, то деформация называется миниверсальной. Рассмотрев в кольце ростков гладких функций максимальный идеал и профакторизовав его по угловому якобиеву идеалу, получим так называемое усеченное угловое локальное кольцо $\widehat{Q}_0^*(W)$. Деформация $W(x,\lambda)$, для которой $W(x,0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x,0)$ образует базис $\widehat{Q}_0^*(W)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Чаще всего в качестве каустики особенности рассматривается каустика ограниченной миниверсальной деформаци (геометрическое строение каустики не зависит от выбора такой деформации (см. [2] – [4])).

3. СЛУЧАЙ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Будем предполагать, что ключевая функция W в некоторой экстремальной задаче зависит от двух (ключевых) переменных, и в результате огрубления (отбрасывания мономов порядка $>\ 6$) имеет следующий вид (см. [6], [7]):

$$x_1^6 + x_2^6 + a_1x_1^4x_2^2 + a_2x_1^2x_2^4 + \varepsilon_1x_1^4 + \varepsilon_2x_2^4 + \varepsilon_3x_1^2x_2^2 + \delta_1x_1^2 + \delta_2x_2^2\,.$$

Ограничимся рассмотрением максимальных bif-раскладов (с максимально возможным количеством ответвившихся экстремалей).

После замены $x_1^2 = y_1,\ x_2^2 = y_2$ получим омбилическую точку [3] минимума в вершине угла $y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0$ [4].

Нетрудно проверить, что в рассмотренном нами случае имеют место следующие четыре правила, которым подчинены расклады экстремалей, бифурцирующих из омбилической min-особенности в вершине углового сектора.

Правило 1. *В случае максимального bif-расклада для омбилической min-особенности в вершине углового сектора расположена точка локально минимального значения.*

Правило 2. *В случае максимального bif-расклада для омбилической min-особенности в угловом секторе на каждой из полуосей кооординат имеется ровно две ненулевые критические точки. Причем, эти точки разнотипны: с различными значениями индекса Морса.*

Правило 3. *В случае максимального $bif-$расклада для омбилической min-особенности в угловом секторе внутри углового сектора находятся ровно четыре критические точки. В случае гиперболичнской омбилики — это две седловые точки, одна точка минимума и одна*

Другое название каустики — «бифуркационная диаграмма особенности».

точка максимума. В случае эллиптической омбилики — три седловые точки и одна точка минимума или максимума.

Правило 4 (формула Эйлера). *В случае максимального bif-расклада, описываемого матрицей*

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} l_0^0 & l_1^0 & l_2^0 \\ l_0^1 & l_1^1 & l_2^1 \\ l_0^2 & l_1^2 & l_2^2 \end{pmatrix},$$

для омбилической $\min$-особенности в угловом секторе имеет место следующее ограничение (для элементов кодирующей матрицы):

$$l_0^0 - l_1^0 + l_2^0 + 2(l_0^1 - l_1^1 + l_2^1) + 4(l_0^2 - l_1^2 + l_2^2) = 1.$$

Замечание 1. Сотношение для элементов кодирующей матрицы в четвертом правиле допускает эквивалентную переформулировку в следующем виде:

$$l_0^1 - l_1^1 + l_2^1 = 2\,\left(l_1^2 - l_0^2 - l_2^2\right).$$

Из перечисленных выше правил вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Максимальные расклады бифурцирующих экстремлей из угловой точки минимума с омбилической особенностью исчерпываются следующим списком кодирующих матриц:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранее, в работах [5] – [7], были указаны лишь отдельные части приведенного в теореме списка максимальных bif-раскладов. В этих работах учитывались дополнительные ограничения на рассмотренные деформации особенностей (в виде требования симметрии, условия гиперболичности омбилики и др.), приводившие к неполноте представленных списков.

Если упростить ключевую функцию с помощью нелинейной замены координат, то можно перейти к нормализованной форме омбилического полинома [2]: $W = x^3 \pm xy^2 + \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 x^2$. При этом неравенства, задающие угол, примут следующий вид: $\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 + \cdots \geqslant 0$, $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 + \cdots \geqslant 0$ (в общем случае угловой сектор может быть криволинейным).

На рис. 1, 2 приведены графические изображения реализаций перечисленных выше максимальных раскладов в виде линий уровня редуцированной (по симметрии) и нормализованной ключевой функции (в прямолинейном угловом секторе).

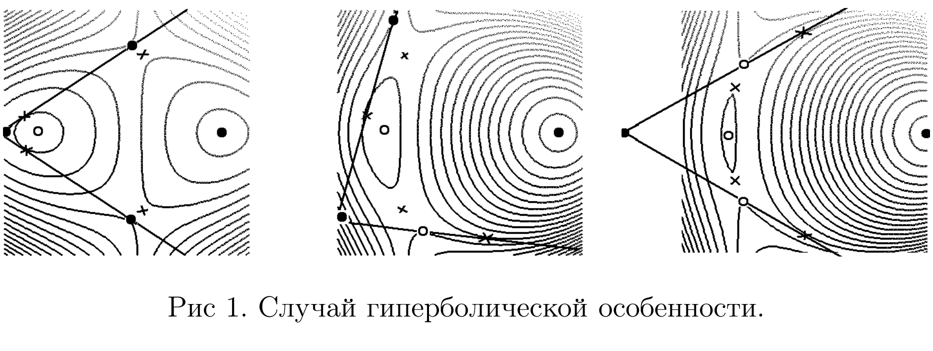

Рис 1. Случай гиперболической особенности.

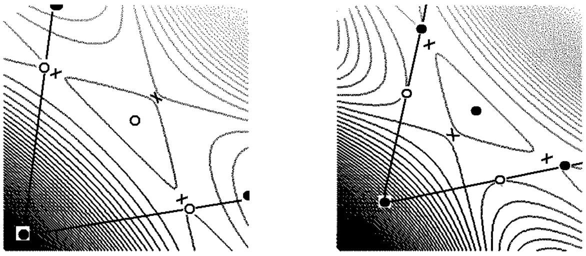

Рис 2. Случай эллиптической особенности.

Замечание 2. Максимальные расклады представляют особую важность, так как на их основе несложно организовать, следуя правилам 1 – 4, описание всех прочих раскладов (включая диаграмму примыканий раскладов). Более полная информация о ветвлении экстремалей получается после выяснения геометрического строения каустики. Этим вопросам будет посвящена отдельная публикация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140.

[2] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.

[3] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. – М.: Мир. 1980. – 608 с.

[4] Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc// Quart. J. Oxford Ser. – 1981. – V.32, N 125. – P. 119-127.

[5] Белоглазов А.В. Об угловых особенностях гладких функций в нелинейных задачах математической физики// Труды воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2006. Воронеж: ВорГУ, 2006. - С. 21-36.

[6] Колесникова И.В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка// Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ, 2009. - Т.9, вып.2. — С.25-30.

[7] Колесникова И.В. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Ветвление фаз кристалла,определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка// Системы управления и информационные технологии. – Москва-Воронеж, 2009. - № 1(35). — С. 72-76.

[8] Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера// Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. – С.3-54.

[9] Звягин В.Г., Ратинер Н.М. Ориентированная степень фредгольмовых отображений. Метод конечномерных редукций// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: РУДН. Т.44. 2012. – С.3-171.

Колесникова И. В., к. ф.-м. н, ассистент кафедры математического анализа математического анализа ВГУ
E-mail: kolinna@inbox.ru
Тел.: 89038576425

Kolesnikova I. V., Candidate of physical and mathematical sciences, Assistant Professor at the Share of Mathematical Analysis, Voronezh State University
E-mail: kolinna@inbox.ru
Tel.: 89038576425

Сапронов Ю. И., д. ф.-м. наук, профессор кафедры математического моделирования математического факультета ВГУ
E-mail: yusapr@mail.ru

Sapronov Yu. I., Doctor of physical and mathematical sciences, Professor at the Share of Mathematical Modelling, Voronezh State University
E-mail: yusapr@mail.ru

Уварова Н. С., аспирант кафедры математического моделирования математического факультета ВГУ
E-mail: yusapr@mail.ru

Uvarova N. S., Postgraduate student at the Share of Mathematical Modelling, Voronezh State University
E-mail: yusapr@mail.ru