УДК 539.374

О СДАВЛИВАНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ

М. А. Калашникова, Ю. М. Мяснянкин, А. И. Шашкин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.08.2013 г.

Аннотация: в работе рассматривается прессование тонкого пластического слоя коническим жестким штампом в конической матрице. Предполагается осевая симметрия, материал слоя изотропный, однородный, идеально жесткопластический, подчинен условию текучести Мизеса.

Ключевые слова: идеальная пластичность, тонкий конический слой, сдавливание, осевая симметрия.

Abstract: we consider pressing a thin plastic layer tapered rigid stamp in a conical die. It is assumed axial symmetry, the material layer is isotropic, homogeneous, ideal rigid, is subject to the Mises yield condition.

Keywords: the ideal plasticity, thin tapered layer, compression, axial symmetry.

ВВЕДЕНИЕ

Отыскание замкнутых частных решений в теории идеальной пластичности представляет несомненный интерес. Ряд таких решений был указан и исследован Л. Прандтлем, Г. Генки, А. Надаи, А. А. Ильюшиным, Р. Хиллом, В. В. Соколовским, Л. М. Качановым, М. А. Задояном, Д. Д. Ивлевым и другими. Обширная библиография по этим вопросам достаточно полно изложена в монографиях [1–3]. В данной работе решение краевой задачи строится методом малого параметра. За малый параметр принимается отношение толщины пластического слоя к его длине, а граничные условия на торцах выполняются в интегральном смысле. Аналогичный метод применялся в работах [4, 5]. В работе показано, что главная часть разложений для напряжений и скоростей перемещений при сжатии тонких слоев совпадает с решениями Прандтля-Надаи.

1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ СЛОЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ

Рассмотрим (рис. 1) сдавливание конусом EFDC пластического слоя GHBC в конусной матрице AB в случае осесимметричного напряженно-деформированного состояния с осью симметрии AOD. Введем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) и систему координат связанную с пластическим слоем (s, θ, ξ) таким образом, что ось s направлена по образующей конуса (вдоль отрезка ON) от его вершины, ось ξ перпендикулярна оси s (вдоль отрезка NM, M – произвольная точка слоя).

Функции преобразования координат и параметры Ламе имеют следующий вид

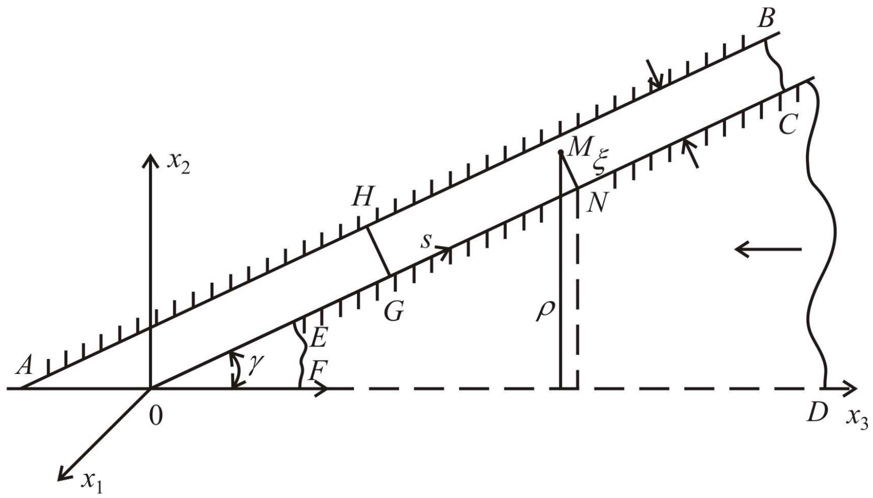

Рис. 1. *Схема сдавливания конусом EFDC пластического слоя GHBC в конусной матрице AB в случае осесимметричного напряженно-деформированного состояния с осью симметрии AOD.*

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \rho\cos\theta = (s\sin\gamma + \xi\cos\gamma)\cos\theta,\\
&x_2 = \rho\sin\theta = (s\sin\gamma + \xi\cos\gamma)\sin\theta,\\
&x_3 = s\cos\gamma - \xi\sin\gamma,\\
&H_1 = H_3 = 1,\ H_2 = \rho = s\sin\gamma + \xi\cos\gamma.
\end{aligned}
$$

Приведем общие уравнения теории идеальной пластичности в координатах (s, θ, ξ) при условии пластичности Мизеса и действии ассоциированного закона пластического течения.

Уравнения равновесия

$$\rho\frac{\partial\sigma_s}{\partial s} + \sigma_s\sin\gamma + \rho\frac{\partial\tau_{\xi s}}{\partial\xi} + \tau_{\xi s}\cos\gamma - \sigma_\theta\sin\gamma = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi} + \sigma_\xi\cos\gamma + \rho\frac{\partial\tau_{\xi s}}{\partial s} + \tau_{\xi s}\sin\gamma - \sigma_\theta\cos\gamma = 0. \tag{2}$$

Условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_s - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_s - \sigma_\xi)^2 + (\sigma_\xi - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{\xi s}^2 = 6k^2. \tag{3}$$

Ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} = \lambda\left(2\sigma_s - \sigma_\theta - \sigma_\xi\right), \tag{4}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_\xi}{\rho}\cos\gamma + \frac{u_s}{\rho}\sin\gamma = \lambda\left(2\sigma_\theta - \sigma_s - \sigma_\xi\right), \tag{5}$$

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u_\xi}{\partial\xi} = \lambda\left(2\sigma_\xi - \sigma_\theta - \sigma_s\right), \tag{6}$$

$$2\varepsilon_{\xi s} = \frac{\partial u_s}{\partial\xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial s} = 6\lambda\tau_{\xi s}, \tag{7}$$

где $\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_\xi, \tau_{\xi s}$ — компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\xi, \varepsilon_{\xi s}$ — компоненты тензора скоростей деформаций, k — предел текучести, $\lambda \geqslant 0$ — коэффициент пропорциональности.

В силу осевой симметрии $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\xi\theta} = u_\theta = \varepsilon_{\theta s} = \varepsilon_{\theta\xi} = 0$.

Предположим, что матрица шероховатая, а клин абсолютно гладкий, тогда граничные условия примут вид

$$\text{при } \xi = 0: \ \tau_{\xi s} = 0, \ \ u_\xi = v_0 = const, \tag{8}$$

$$\text{при } \xi = h: \ \tau_{\xi s} = k, \ u_\xi = 0. \tag{9}$$

Граничные условия на торцах слоя удовлетворим в смысле Сен-Венана [5], [2].

Далее будем пользоваться безразмерными переменными, введенными следующим образом:

$$\frac{\sigma_s}{k} = \sigma_x, \ \frac{\sigma_\xi}{k} = \sigma_y, \ \frac{\tau_{\xi s}}{k} = \tau_{xy}, \ \frac{\sigma_\theta}{k} = \sigma_\varphi, \ \frac{u_s}{v_0} = u_x, \ \frac{u_\xi}{v_0} = u_y, \ \frac{s}{l} = x, \ \frac{\xi}{h} = y, \ \frac{h}{l} = \varepsilon.$$

После исключения λ из соотношений (4)–(7) они перепишутся следующим образом.

Уравнения равновесия

$$\varepsilon\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \varepsilon\frac{\sigma_x - \sigma_\varphi}{r}\sin\gamma + \varepsilon\frac{\tau_{xy}}{r}\cos\gamma + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \varepsilon\frac{\sigma_y - \sigma_\varphi}{r} + \varepsilon\frac{\tau_{xy}}{r}\sin\gamma + \varepsilon\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

где $r = x\sin\gamma + \varepsilon y\cos\gamma$.

Следствия ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}\left(2\sigma_\varphi - \sigma_x - \sigma_y\right) = \varepsilon\left(\frac{u_y}{r}\cos\gamma + \frac{u_x}{r}\sin\gamma\right)\left(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_\varphi\right), \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{r}\left(u_y\cos\gamma + u_x\sin\gamma\right) = 0, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\left(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_\varphi\right) = 6\frac{\partial u_y}{\partial y}\tau_{xy}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\left(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_\varphi\right) = 6\frac{\partial u_x}{\partial x}\tau_{xy}. \tag{15}$$

Условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_\varphi)^2 + 6\tau_{xy}^2 = 6. \tag{16}$$

Граничные условия в безразмерных переменных на двух поверхностях слоя

$$\text{при } y = 0: \ \ u_y = 1, \ \ \tau_{xy} = 0, \tag{17}$$

$$\text{при } y = 1: \ \ u_y = 0, \ \ \tau_{xy} = 1. \tag{18}$$

Среди уравнений (12)-(15) независимых только три, однако для упрощения вычислений будут использоваться все уравнения.

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

В систему определяющих уравнений (10)-(15) вошел параметр $\varepsilon << 1$, что позволяет искать решение в виде рядов [4, 5]

$$\alpha\left(x,y\right)=\sum_{n}\varepsilon^{n}\alpha^{(n)}\left(x,y\right),\quad \varepsilon<<1. \tag{19}$$

В дальнейшем положим, что величины $\frac{\sigma_x-\sigma_\varphi}{r}$, $\frac{\sigma_y-\sigma_\varphi}{r}$, $\frac{\tau_{xy}}{r}$ порядка единицы, тогда из соотношений (10), (11), (16)-(18) следует, что разложения компонент напряжений имеют вид:

$$\begin{gathered}\tau_{xy}=\tau_{xy}^{(0)}+\varepsilon\tau_{xy}^{(1)}+\varepsilon^{2}\tau_{xy}^{(2)}+\ldots,\\ \sigma_{i}=\frac{1}{\varepsilon}\sigma_{i}^{(-1)}+\sigma_{i}^{(0)}+\varepsilon\sigma_{i}^{(1)}+\ldots,\ \ i\in\left\{x,y,\varphi\right\},\end{gathered} \tag{20}$$

причем $\sigma_x^{(-1)}=\sigma_y^{(-1)}=\sigma_\varphi^{(-1)}=\sigma^{(-1)}\left(x\right),\ \sigma_y^{(0)}=\sigma_y^{(0)}\left(x\right).$

Подставляя соответствующие разложения из (20) в уравнение (10), заключаем, что $\frac{\partial\tau_{xy}^{(0)}}{\partial y}$ является функцией x, т.е. $\tau_{xy}^{(0)}=\beta\left(x\right)y+\delta\left(x\right)$. Функции $\beta\left(x\right)$ и $\delta\left(x\right)$ определяются из граничных условий (17) и (18). В результате имеем

$$\delta\left(x\right)=0,\ \beta\left(x\right)=1,\ \tau_{xy}^{(0)}=y. \tag{21}$$

Отсюда следует

$$\sigma_x^{(-1)}=\sigma_y^{(-1)}=\sigma_\varphi^{(-1)}=\sigma^{(-1)}=-x+c_1,\ c_1=const. \tag{22}$$

Постоянная c_1 находится из граничных условий на торцах слоя.

Граничные условия (17), (18) показывают, что разложение u_y имеет вид:

$$u_y=u_y^{(0)}+\varepsilon u_y^{(1)}+\varepsilon^2u_y^{(2)}+\ldots,\text{причем}\quad\frac{\partial u_y^{(0)}}{y}\neq0. \tag{23}$$

Из условия несжимаемости (13) следует, что

$$u_x=\frac{1}{\varepsilon}u_x^{(-1)}+u_x^{(0)}+\varepsilon u_x^{(1)}+\ldots \tag{24}$$

Из уравнения (14) получим, что $\frac{\partial u_x^{(-1)}}{\partial y}=0$, то есть $u_x^{(-1)}=u_x^{(-1)}\left(x\right)$. В этом случае из (13) следует

$$\frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial y}=-\frac{\partial u_x^{(-1)}}{\partial x}-\frac{u_x^{(-1)}}{x}=\varphi\left(x\right), \tag{25}$$

то есть $u_y^{(0)}=\varphi\left(x\right)y+\psi\left(x\right)$. Функции $\varphi\left(x\right)$ и $\psi\left(x\right)$ определим из граничных условий (17)–(18):

$$\varphi\left(x\right)=-1,\ \ \psi\left(x\right)=1,\ \ u_y^{(0)}=-y+1. \tag{26}$$

Теперь из дифференциального уравнения (25) $\frac{du_x^{(-1)}}{dx}+\frac{u_x^{(-1)}}{x}=1$ найдем

$$u_x^{(-1)}=\frac{1}{2}x+\frac{c_2}{x},\ \ c_2=const. \tag{27}$$

Подставляя ряды u_x, u_y и σ_i в соотношения (12)–(18) и приравнивая функции при $\varepsilon^0 = 1$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial y}\left(2\sigma_\varphi^{(0)} - \sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}\right) = \frac{u_x^{(-1)}}{x}\left(2\sigma_y^{(0)} - \sigma_x^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}\right), \tag{28}$$

$$\frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial y}\left(2\sigma_y^{(0)} - \sigma_x^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}\right) = 6\frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial y}\tau_{xy}^{(0)}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial y}\left(2\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}\right) = 6\frac{\partial u_x^{(-1)}}{\partial x}\tau_{xy}^{(0)}, \tag{30}$$

$$\left(\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_x^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_\varphi^{(0)} - \sigma_y^{(0)}\right)^2 = 6 - 6\left(\tau_{xy}^{(0)}\right)^2. \tag{31}$$

Исключим $\frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial y}$ из уравнений (29), (30) и воспользуемся соотношениями (28), (27), (26), (20). В результате будем иметь:

$$\sigma_x^{(0)} = \sigma_\varphi^{(0)},\ \sigma_y^{(0)} = p,\ \ p = const,\ \ c_2 = 0. \tag{32}$$

Подставляя $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_\varphi^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$ в (31) и (32), найдем $\sigma_x^{(0)}$ и $u_x^{(0)}$:

$$\sigma_x^{(0)} = p - \sqrt{3}\sqrt{1-y^2},\ \ u_x^{(0)} = -\sqrt{3}\sqrt{1-y^2} + c_3,\ \ c_3 = const. \tag{33}$$

Если в рядах (19) пренебречь малыми членами порядка $\varepsilon << 1$ и выше, то напряженное и деформированное состояние пластического слоя примет следующий вид:

$$\sigma_x = \sigma_\varphi = \tfrac{1}{\varepsilon}\left(-x + c_1\right) + p - \sqrt{3}\sqrt{1-y^2},\ \sigma_y = p + \tfrac{1}{\varepsilon}\left(-x + c_1\right),$$
$$u_x = \tfrac{1}{2\varepsilon}x - \sqrt{3}\sqrt{1-y^2} + c_3,\ \ u_y = -y + 1.$$

В предельных случаях, когда $\sin\gamma$ или $\cos\gamma$ являются малыми величинами порядка ε, необходимо проводить дополнительные исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хилл Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл // М.: Гостехтеориздат, 1956. — 407 с.

[2] Соколовский В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский // М., Л.: Изд-во АН СССР, 1946. — 308 с.

[3] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред / Д.Д. Ивлев // М.: Физматлит, 2001. — Т. 1. — 445 с.

[4] Давыдов Д.В., Мяснянкин Ю.М., Чуфринова Е.Д. О сжатии тонкого анизотропного упрочняющегося слоя криволинейными шероховатыми плитами / Д.В. Давыдов, Ю.М. Мяснянкин, Е.Д. Чуфринова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2010. — № 8. — С. 138–145.

[5] Давыдов Д.А., Мяснянкин Ю.М. О внедрении тел в жесткопластическую среду / Д.В. Давыдов, Ю.М. Мяснянкин// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2009. — № 1. — С. 94–100.

Калашникова Марина Александровна, студент 5 курса факультета ПММ, Воронежский государственный университет

Kalashnikova Marina Aleksandrovna, 5th year student of the Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State University

Мяснянкин Юрий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет
Тел.: (473)–246–53–87

Myasnyankin Yury Mihailoviz, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University
Tel.: (473)–246–53–87

Шашкин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет
E-mail: dean@amm.vsu.ru

Shashkin Alexander Ivanoviz, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematics and Applied Analysis, Voronezh State University
E-mail: dean@amm.vsu.ru