УДК 517.955

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. П. Зубова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 05.06.2013 г.

Аннотация: методом каскадной декомпозиции решается задача Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае нерегулярного уравнения и возможно непересекающихся областей определения операторных коэффициентов.
Ключевые слова: дескрипторное дифференциальное уравнение, нётеров оператор, декомпозиция.

Abstract: the method of cascade decomposition solves the Cauchy problem for differential equations in Banach space in the case of irregular equations and possibly non-overlapping domains of the operator coefficients.
Keywords: descriptor differential equation, Fredholm operator, decomposition.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное уравнение в случае необратимого операторного коэффициента при производной называют сингулярным, вырожденным, критическим, дифференциально–алгебраическим, алгебро–дифференциальным. Всё чаще используется название *дескрипторное* уравнение. Задачу Коши для дескрипторного уравнения исследовали многие авторы. Как правило, рассматривались регулярные случаи, то есть либо соответствующий операторный пучок регулярный [2]–[7], либо полон жорданов набор определённых элементов [8]. В нерегулярном случае авторы отмечают лишь существование решения не при любых начальных значениях искомой вектор–функции и возможную неединственность решения.

Нас интересуют в нерегулярном случае вопросы разрешимости и единственности решения задачи, свойства решений. В отличие от [2]–[8] в данной работе исследуется уравнение с переменными коэффициентами и неоднородное. В отличие от [2]–[7] здесь не требуется существование общей области определения операторных коэффициентов в рассматриваемом уравнении, решение задачи и его производная могут принадлежать разным множествам.

Для исследований применяем метод каскадного расщепления уравнения (1) на уравнения в подпространствах и исследование полученных уравнений в подпространствах (*каскадный метод*) [1].

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ

Для уравнения

$$A(t)\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, линейные, замкнутые, $\overline{dom}\, A = E_1$, $\overline{dom}\, B = E_1$, $A(t)$ — нётеров при каждом $t \in \mathfrak{T}$, $f(t) : \mathfrak{T} \to E_2$, $t \in \mathfrak{T} = [0, T]$, ставится задача Коши:

$$x(0) = x^0 \in \operatorname{dom} B. \tag{2}$$

Используем следующее свойство, вполне определяющее нётеров оператор $A(t)$.

Свойство 1. Имеют место разложения пространств в прямые суммы:

$$E_1 = CoimA(t)\dot{+}KerA(t), \quad E_2 = ImA(t)\dot{+}CokerA(t), \tag{3}$$

где Coker $A(t)$ — дефектное подпространство оператора $A(t)$, Coim $A(t)$ — прямое дополнение к Ker $A(t)$ в E_1, $\dim \operatorname{Ker} A(t) < \infty, \dim \operatorname{Coker} A(t) < \infty$. Проекторы на Ker $A(t)$ и Coker $A(t)$, отвечающие разложениям (3), обозначаем $P(A)$ и $Q(A)$ соответственно. Они переменные, символ t опускаем для краткости.

Сужение $\widetilde{A}$ оператора A на Coim $A\cap$ dom A — изоморфизм: Coim $A\cap$ dom $A \leftrightarrows$ Im A. Оператор $\widetilde{A}^{-1}(I - Q(A))$ называется *полуобратным*

Если $A(t') = 0$, $t' \in \mathfrak{T}$, то $Q(A(t')) = I$ и полагаем $A^-(t') = 0$. Через I здесь и далее обозначается единичный оператор в соответствующем пространстве, æ(A) — индекс нётерова оператора A, æ$(A) = $ dim Ker $A-$ dim Coker A.

Операторы $G(t) \in L(R^k, R^l)$ и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково.

Уравнение (1) с помощью свойства 1 расщепляется на уравнения в подпространствах $Coker\, A(t)$ и $Im\, A(t)$:

$$Q(A)B(t)x(t) + Q(A)f(t) \equiv 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{4}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^-(t)B(t)x(t) + A^-(t)f(t) + P(A)\frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall P(A)\frac{dx(t)}{dt} \in KerA(t). \tag{5}$$

В результате обозначений

$$\begin{gathered} A_0(t) = A(t), \quad B_0(t) = B(t), \\ S_0(t) = Q(A_0)B_0(t), \quad T_0(t) = A_0^-(t)B_0(t), \quad K_0(t) = Q(A) \end{gathered} \tag{6}$$

получаем:

уравнение (1) эквивалентно системе, состоящей из тождества

$$S_0(t)x(t) + K_0(t)f(t) \equiv 0 \tag{7}$$

и уравнения (5). И теперь задача состоит в нахождении $P(A)\dfrac{dx(t)}{dt}$ из системы (5), (7).

Пусть выполняется условие

s_0) оператор $S_0(t)$ и вектор–функция $K_0(t)f(t)$ дифференцируемы при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Замечание. Свойство дифференцируемости $S_0(t)$ не означает дифференцируемости $A(t)$ и $B(t)$. Действительно, если

$A(t), B(t) : R^2 \to R^2$, $t \in [0, 1]$ и $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{t} \\ t & t\sqrt{t} \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t\sqrt{t} & 1 \\ t^2\sqrt{t} & 0 \end{pmatrix}$, то $Q(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$, $S_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$.

Продифференцировав соотношение (7) и заменив в полученном выражении $\dfrac{dx(t)}{dt}$ с помощью (5), получаем:

$$S_0(t)P(A_0)\frac{dx(t)}{dt} + \left(S_0(t)T_0(t) + \frac{dS_0(t)}{dt}\right)x(t) + \left(S_0(t)A^-(t)f(t) + \frac{d}{dt}\Big(K_0(t)f(t)\Big)\right) \equiv 0. \tag{8}$$

В обозначениях

$$\begin{gathered} A_1(t)=S_0(t)P(A_0)=Q(A_0)B_0(t)P(A_0), \\ K_1(t)f(t)=S_0(t)A^-(t)f(t)+\frac{d}{dt}(K_0(t)f(t)), \end{gathered} \tag{9}$$

уравнение (8) таково:

$$A_1(t)P(A_0)\frac{dx(t)}{dt}=-\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)x(t)-K_1(t)f(t). \tag{10}$$

Пусть, кроме того, выполняется требование

r_0) dim Ker $A(t)=const=des$[1] $=n_0$, dim Coker $A(t)=const=des=m_0$.

Тогда $A_1(t)$ при каждом $t\in\mathfrak{T}$ — линейный ограниченный оператор, действующий из R^{n_0} в R^{m_0} , следовательно нётеров и

$$\mathrm{Ker}A_0(t)=\mathrm{Coim}A_1(t)\dot{+}\mathrm{Ker}A_1(t),\quad \mathrm{Coker}A_0(t)=\mathrm{Im}A_1(t)\dot{+}\mathrm{Coker}A_1(t).$$

В случае $n_0>n_1$ уравнение (10) в силу свойства 1 эквивалентно следующим соотношениям:

$$Q(A_1)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)x(t)+Q(A_1)K_1(t)f(t)\equiv 0, \tag{11}$$

$$P(A_0)\frac{dx(t)}{dt}=-A_1^-(t)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)x(t)-A_1^-(t)K_1(t)f(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt},$$

$\forall P(A_1)\frac{dx(t)}{dt}\in KerA_1(t)$. Подставив последнее выражение в (5) , получаем:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\Big(T_0(t)-A_1^-(t)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)\Big)x(t)+(A_0^- -A_1^-K_1)f(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt}. \tag{12}$$

В результате обозначений

$$S_1(t)=Q(A_1)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big),\quad T_1(t)=T_0(t)-A_1^-(t)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)$$

уравнение (12) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt}=T_1(t)x(t)+\Big(A_0^-(t)-A_1^-(t)K_1(t)\Big)f(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt},$$

а условие (11) вид

$$S_1(t)x(t)+Q(A_1)K_1(t)f(t)\equiv 0.$$

Итак, при выполнении условий s_0) и r_0) уравнение (1) эквивалентно соотношениям

$$S_i(t)x(t)+Q(A_i)K_i(t)f(t)\equiv 0,\quad t\in\mathfrak{T}, i=0,1,$$

и уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt}=T_1(t)x(t)+\Big(A_0^-(t)-A_1^-(t)K_1(t)\Big)f(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt}. \tag{13}$$

[1] Символ " = des =" читается как " обозначим" .

Продолжая этот процесс дальше с введением обозначений

$$
\begin{gathered}
A_i(t) = S_{i-1}(t)P(A_{i-1}), \quad S_i(t) = Q(A_i)\Big(S_{i-1}(t)T_{i-1}(t) + \frac{dS_{i-1}(t)}{dt}\Big),\\
T_i(t) = T_{i-1}(t) - A_i^-(t)\Big(S_{i-1}(t)T_{i-1}(t) + \frac{dS_{i-1}(t)}{dt}\Big),\\
K_i(t)f(t) = S_{i-1}(t)\Big(A_0^-(t) - \sum_{j=1}^{i-1} A_j^-(t)K_j(t)\Big)f(t)+\\
+\frac{d}{dt}Q(A_{i-1})K_{i-1}(t)f(t), \quad i = 1, 2, \ldots
\end{gathered} \tag{14}
$$

и при выполнении условий

s_i) вектор–функции $S_i(t)$ и $Q(A_i)K_i(t)f(t)$ дифференцируемы на $\mathfrak{T}$, $\quad i = 0, 1, 2, \ldots,$

r_i) $\dim \mathrm{Ker}\, A_i(t) = \mathrm{const}{=}\mathrm{des}{=}n_i$, $\dim \mathrm{Coker}\, A(t) = \mathrm{const}$, $\quad i = 0, 1, 2, \ldots,$

получаем следующий результат.

Лемма. *Уравнение* (1) *при выполнении условий* s_i), r_i), $i = \overline{0, q-1}$, *эквивалентно системе*

$$
S_i(t)x(t) + Q(A_i)K_i(t)f(t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, q}, \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{15}
$$

$$
\frac{dx(t)}{dt} = T_q(t)x(t) + \Big(A_0^-(t) - \sum_{j=1}^{q} A_j^-(t)K_j(t)\Big)f(t) + P(A_q)\frac{dx(t)}{dt}, \tag{16}
$$

$\forall P(A_q)\dfrac{dx(t)}{dt} \in \mathrm{Ker}\, A_q(t)$.

Обозначим $\dim \mathrm{Coker}\, A_i(t) = m_i$, $\quad i = 1, 2, \ldots.$

Заметим, если $n_k = n_{k-1}$, то и $m_k = m_{k-1}$, оператор $A_k(t)$ в таком случае тождественно нулевой, в формулах (14) $P(A_k) = I$, $Q(A_k) = I$, и процесс расщепления пространств продолжается дальше. Получаем:

$$
\begin{aligned}
&E_1 = \mathrm{Coim}A(t)\dot{+}\mathrm{Ker}A(t) = \mathrm{Coim}A(t)\dot{+}\mathrm{Coim}A_1(t)\dot{+}\mathrm{Ker}A_1(t) = \ldots\\
&\ldots = \mathrm{Coim}A(t)\dot{+}\mathrm{Coim}A_1(t)\dot{+}\ldots\dot{+}\mathrm{Coim}A_q(t) + \mathrm{Ker}A_q(t),\\
&E_2 = \mathrm{Im}A(t)\dot{+}\mathrm{Coker}A(t) = \mathrm{Im}A(t)\dot{+}\mathrm{Im}A_1(t)\dot{+}\mathrm{Coker}A_1(t) = \ldots\\
&\ldots = \mathrm{Im}A(t)\dot{+}\mathrm{Im}A_1(t)\dot{+}\ldots\dot{+}\mathrm{Im}A_q(t) + \mathrm{Coker}A_q(t).
\end{aligned}
$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Возможны лишь следующие исходы.

Случай 1. Существует $p \in N$ такое, что $n_{p-1} > n_p = 0$ и $m_{p-1} > m_p = 0$, что возможно лишь при $æ(A) = 0$, то есть в случае фредгольмовского оператора $A(t)$.

Случай 2. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{p-1} > n_p = 0$ и $m_{p-1} > m_p \neq 0$, что возможно лишь при $æ(A) < 0$.

Случай 3. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{p-1} > n_p \neq 0$ и $m_{p-1} > m_p = 0$ $(æ(A) > 0)$.

Случай 4. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{p-1} > n_p = n_{p+1} = \ldots$, $m_{p-1} > m_p = m_{p+1} = \ldots.$ Это возможно и при $æ(A) = 0$, и при $æ(A) \neq 0$.

Рассмотрим **случай 1**. Конечномерный оператор $A_p(t)$ имеет ограниченный обратный $A_p^-(t) = A_p^{-1}(t)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
E_1 = \mathrm{Coim}A\dot{+}\mathrm{Ker}A &= \mathrm{Coim}A\dot{+}\mathrm{Coim}A_1\dot{+}\mathrm{Ker}A_1 = \ldots\\
\ldots &= \mathrm{Coim}A\dot{+}\mathrm{Coim}A_1\dot{+}\ldots\dot{+}\mathrm{Coim}A_p,
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$E_2 = \mathrm{Im}A\dot{+}\mathrm{Coker}A = \mathrm{Im}A\dot{+}\mathrm{Im}A_1\dot{+}\mathrm{Coker}A_1 = \ldots = \mathrm{Im}A\dot{+}\mathrm{Im}A_1\dot{+}\ldots\dot{+}\mathrm{Im}A_p. \qquad (18)$$

На основании леммы справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\exists p \in \mathbb{N}$ *такое, что выполняются условия* $s_i)$, $r_i)$ *с* $i = \overline{0, p-1}$; A_p *— обратимый,* $T_p(t)$ *— ограниченный при каждом* t *и сильно непрерывный на* $\mathfrak{T}$ *оператор.*

Решение $x(t)$ *задачи* (1), (2) *существует для тех, и только тех* x^0 *и* $f(t)$, *для которых выполняются условия согласования*

$$S_i(0)x^0 + Q(A_i)K_i(t)f(t)|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \qquad (19)$$

и

$$R_p(t) = \int\limits_0^t U(t,s)\Big(A_0^-(s) - \sum_{j=1}^{p} A_j^-(s)K_j(s)\Big)f(s)ds \qquad (20)$$

дифференцируем на $\mathfrak{T}$.

При выполнении этих условий $x(t)$ *и* $f(t)$ *обладают свойствами*

$$S_i(t)x(t) + Q(A_i)K_i(t)f(t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, p-1}; \qquad (21)$$

$x(t)$ *единственно и равно*

$$x(t) = U(t,0)x^0 + R_p(t), \qquad (22)$$

где $U(t,s)$ *— эволюционный оператор, соответствующий* $T_p(t)$.

В случае 2 Ker $A_p = \{0\}$, но A_p имеет ненулевое коядро: $P(A_p) \equiv 0$, $Q(A_p) \neq 0$. Пространство E_1 разлагается в прямую сумму (17), для E_2 имеет место разложение

$$E_2 = \mathrm{Im}A\dot{+}\mathrm{Im}A_1\dot{+}\ldots\dot{+}\mathrm{Im}A_p\dot{+}\mathrm{Coker}A_p. \qquad (23)$$

Теорема 2. *Пусть* $\exists p \in \mathbb{N}$ *такое, что выполняются условия* $s_i)$, $r_i)$ *с* $i = \overline{0, p-1}$, $A_p(t)$ *инъективный,* $T_p(t)$ *— ограниченный при каждом* t *и сильно непрерывный на* $\mathfrak{T}$ *оператор.*

Решение $x(t)$ *задачи* (1), (2) *существует для тех, и только тех* x^0 *и* $f(t)$, *для которых*

$$S_i(0)x^0 + Q(A_i)K_i(t)f(t)|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, p}, \qquad (24)$$

(условия согласования), и интеграл $R_p(t)$, *введенный формулой* (20), *дифференцируем на* $\mathfrak{T}$.

Тогда $x(t)$ *и* $f(t)$ *обладают свойствами*

$$S_i(t)x(t) + Q(A_i)K_i(t)f(t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, p}; \qquad (25)$$

$x(t)$ *единственно и имеет вид* (22).

Случай 3. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что A_p имеет ненулевое ядро, но коядро состоит лишь из нулевого элемента. Для E_1 имеет место разложение

$$E_1 = \mathrm{Coim}A\dot{+}\mathrm{Coim}A_1\dot{+}\ldots\dot{+}\mathrm{Coim}A_p\dot{+}\mathrm{Ker}A_p. \qquad (26)$$

Пространство E_2 раскладывается в прямую сумму (18). Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $\exists p \in \mathbb{N}$ *такое, что выполняются условия* s_i), r_i) *с* $i = \overline{0, p-1}$, $A_p(t)$ *— сюръективный,* $T_p(t)$ *— ограниченный при каждом* t, *сильно непрерывный на* $\mathfrak{T}$ *оператор и* $R_p(t)$ *дифференцируем на* $\mathfrak{T}$. *Решение* $x(t)$ *задачи* (1), (2) *существует для тех, и только тех* x^0 *и* $f(t)$, *для которых выполняются условия согласования* (19).

При этом $x(t)$ *и* $f(t)$ *обладают свойствами* (21), $x(t)$ *неединственно и имеет вид*

$$x(t) = U(t,0)x^0 + \int_0^t U(t,s)\Big(\big(A_0^-(s) - \sum_{j=1}^{p} A_j^-(s)K_j(s)\big)f(s) + P(A_p)c(s)\Big)ds, \qquad (27)$$

$\forall P(A_p)c(t) \in C^0(\mathfrak{T} \to E_1)$.

В случае 4 имеем $A_{p+j}(t) \equiv 0$, $j \in \mathbb{N}_0$. Для E_1 и E_2 имеют место разложения (26) и (23).

Теорема 4. *Пусть* $\exists p \in \mathbb{N}$ *такое, что выполняются условия* s_i), r_i) *с* $i \in \mathbb{N}_0$; $A_{p+j}(t) \equiv 0$, $j \in \mathbb{N}_0$; $T_p(t)$ *— ограниченный при каждом* t, *сильно непрерывный на* $\mathfrak{T}$ *оператор и* $R_p(t)$ *дифференцируем на* $\mathfrak{T}$. *Решение* $x(t)$ *задачи* (1), (2) *существует если, и только если выполняются условия согласования* (24) *при* $i \in \mathbb{N}_0$.

При этом $x(t)$ *и* $f(t)$ *обладают свойствами* (25) *с* $i \in \mathbb{N}_0$, $x(t)$ *неединственно и имеет вид* (27).

(Результаты теорем 1 и 2, 3 и 4 отличаются количеством условий согласования и количеством соотношений, определяющих фазовые пространства).

Фазовыми пространствами при выполнении условий теорем 1 и 3 является $M_{p-1}(t) = \{x \in E_1 : \quad S_i(t)x + Q(A_i)K_i(t)f(t) \equiv 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad i = \overline{0, p-1}\}$, при выполнении условий теоремы 2: $M_p(t) = \{x \in E_1 : \quad S_i(t)x + Q(A_i)K_i(t)f(t) \equiv 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad i = \overline{0, p}\}$, и при выполнении условий теоремы 4: $M_\infty(t) = \{x \in E_1 : \quad S_i(t)x + Q(A_i)K_i(t)f(t) \equiv 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad i \in \mathbb{N}_0\}$.

Следствие 1. *При выполнении условий* s_i), r_i) *и ограничений на* $T_k(t)$ *и* $R_k(t)$, *указанных в формулировке теоремы 3, решение задачи* (1), (2) *единственно тогда и только тогда, когда* $\exists p \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$\mathrm{Ker}\ A_p(t) = \{0\}.$$

Выполнения условий s_i), r_i) здесь требуется при $i = \overline{0, p-1}$, $k = p$.

Уравнение (1), коэффициенты которого обладают свойством $\mathrm{Ker}\ A_p(t) = \{0\}$, называем *псевдорегулярным.*

В случае постоянных A, B и $B \in L(E_1, E_2)$ условие $\mathrm{Ker}\ A_p(t) = \{0\}$ эквивалентно условию инъективности операторного пучка $A - \lambda B$ при достаточно малых (по модулю) $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. В этом случае задача (1), (2) с однородным уравнением однозначно разрешима (при выполнении условий согласования) в том и только том случае, когда $(A - \lambda B)y = 0 \to y = 0$, то есть когда уравнение (1) псевдорегулярное [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Zubova S. P. Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative // Doklady Mathematics. — 2009. — V. 80, № 2. — P. 710–712.

[2] Крейн С.Г. Сингулярно возмущённые дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, К.И. Чернышов // Новосибирск: СО АН СССРБ Институт математики, Препринт. — 1979. — 18 с.

[3] Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро—дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 222 с.

[4] Campbell S.L. Singular Systems of Differential Equations / S.L. Campbell // Pitman, London, 1980. — 176 p.

[5] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем.наук. — 1994. — Т. 49, № 4 — С. 47–74.

[6] Фёдоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Фёдоров // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, вып. 3. — С. 173–200.

[7] Баскаков А.Г. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А.Г. Баскаков, К.И. Чернышов // Матем. сборник. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3–42.

[8] Сидоров Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 9. — С. 1516—1526.

Зубова Светлана Петровна, кандидат физико–математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского госуниверситета
E-mail: spzubova@mail.ru
Тел.: 8(473)220–86–90

Zubova Svetlana Petrovna, Ph.D, assistant professor, chair of mathematical analysis, Voronezh State University
E-mail: spzubova@mail.ru
Tel.: 8(473)220–86–90