УДК 517.977

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ*

М. Б. Зверева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.04.2013 г.

Аннотация: в настоящей работе на геометрическом графе рассматривается задача граничного управления с нелинейным условием. Такая задача возникает при изучении колебаний системы струн, соединенных в одной точке (узле). При этом предполагается, что в узле дополнительно прикреплена пружина с разными витками, деформация которой не подчиняется закону Гука и задается некоторой функцией. Целью работы является предъявить в явном виде функции, определяющие граничные управления, позволяющие перевести систему из начального состояния в заданное финальное состояние.

Ключевые слова: геометрический граф, колебания на графе, граничные управления.

Abstract: in this paper on a geometric graph is considered the problem of boundary control with nonlinear condition. This problem arises when studying oscillations of a system of strings, united in one point(node). This assumes that the node is additionally attached spring with different coils, deformation which are not subject to the law of Hooke and sets a certain function. The aim is to present the explicit form of the functions that define the boundary controls, allowing to transfer the system from the initial state at a desired final state.

Keywords: geometric graph, fluctuations in the graph, boundary controls.

Изучению задач управления распределенными системами и их оптимизации посвящены работы многих математиков. Особенно можно выделить публикации В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, Л. Н. Знаменской, А. И. Егорова [1–4]. Основной целью исследований является получение условий, при которых процесс колебаний распределенной системы под воздействием некоторого граничного локального или нелокального управления может быть переведен из одного состояния, заданного начальными смещениями и скоростями системы, в наперед заданное финальное.

В настоящее время в теории граничной управляемости появились новые направления, открытые работами В. А. Ильина — конструктивная управляемость, когда не просто обосновывается существование управления, а предъявляется его явная формула и относительная управляемость, когда полной управляемости нет, но она возникает при выполнении некоторых выписываемых явно соотношений между параметрами задачи. Подобные постановки естественны и для задач управления на сетях.

Анализ колебательных процессов в состоящей из конечного числа струн физической системе, возникающих под воздействием граничных управляющих сил, приводит к задачам

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00392

управления дифференциальными системами с носителем на геометрических графах. Вопросам моделирования физических процессов на графах посвящены публикации Ю. В. Покорного, В. Л. Прядиева, А. В. Боровских, О. М. Пенкина, В. В. Провоторова [5–8].

В настоящей работе рассматривается задача граничного управления на геометрическом графе с нелинейным условием в узле. Найден явный вид функций управления.

Пусть точки O, A_1, A_2, A_3 находятся в одной плоскости. Рассматривается механическая система из трех струн, которые в положении равновесия совпадают с отрезками OA_1, OA_2, OA_3. Концы струн жестко закреплены в точках A_1, A_2, A_3 и соединены между собой в точке O. Граф Г состоит из ребер (интервалов) OA_1, OA_2, OA_3 и вершин O, A_1, A_2, A_3 . Здесь и далее будем пользоваться понятиями и терминологией из [5]. Под действием силы, направленной перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$, струны отклоняются от положения равновесия. Будем считать, что смещение всех точек происходит параллельно одной и той же прямой, перпендикулярно плоскости и рассматриваются малые отклонения от положения равновесия. Введем системы координат для описания отклонения струн. Для всех точек струн начало координат совпадает с точкой O. Ось абсцисс Ox_i для i-й струны $(i = 1, 2, 3)$ содержит отрезок OA_i и имеет направление от O к A_i. Таким образом, граф ориентирован от узла.Ось ординат OY проходит перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$. Рассмотрим колебательный процесс. Обозначим через $u_i(x, t)$ отклонение i-й струны от положения равновесия в момент времени t, где x —абсцисса рассматриваемой точки струны. Будем предполагать длины всех струн одинаковыми и равными l, т. е. $0 \leqslant x \leqslant l$.

Таким образом, колебания каждой из струн системы можно описать волновым уравнением $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$. Условие соединения струн между собой в узле означает, что $u_1(0, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t)$. Предположим, что в точке $x = 0$ дополнительно прикреплена пружина с разными витками, деформация которой не подчиняется закону Гука, а задается функцией $\alpha(u_1(0, t))$. Будем предполагать, что функция $\alpha(x)$ непрерывно дифференцируема на всей оси и удовлетворяет условию Липшица $|\alpha(x_2) - \alpha(x_1)| \leqslant m|x_2 - x_1|$. Предположим, что в начальный момент времени заданы форма каждой из струн и начальная скорость $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ соответственно, т.е. $u_i(x, 0) = \varphi_i(x)$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \psi_i(x)$. Управление колебаниями ведется посредством функций $\mu_i(t)$, таких, что $u_i(l, t) = \mu_i(t)$. Таким образом, наша задача имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1, 2, 3) \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = \psi_i(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(+0, t) = \alpha(u_1(0, t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_1(0, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_i(l, t) = \mu_i(t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{1}$$

Найдем функции $\mu_i(t)$, позволяющие перевести механическую систему из заданного начального состояния в заданное финальное состояние $u_i(x, T) = \varphi_i^*(x)$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x, T) = \psi_i^*(x)$. Всюду далее будем рассматривать случай $0 < T < l$.

Будем предполагать, что $\varphi_i \in C^2[0, l]$, $\psi_i \in C^1[0, l]$, $\varphi_i^* \in C^2[0, l]$,$\psi_i^* \in C^1[0, l]$, $\mu_i \in C^2[0, T]$, $\varphi_i(l) = 0$, $\psi_i(l) = 0$, $\varphi_i''(l) = 0$, $\psi_i(0) = 0$, $\psi_i'(0) = 0$.

Кроме того, должны выполняться следующие условия согласования

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i'(0) = \alpha(\varphi_1(0)),$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0),$$

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i^{*\prime}(0) = \alpha(\varphi_1^*(0)),$$

$$\varphi_1^*(0) = \varphi_2^*(0) = \varphi_3^*(0),$$

$$\mu_i(0) = \varphi_i(l),$$

$$\mu_i(T) = \varphi_i^*(T),$$

$$\mu_i'(0) = \psi_i(l),$$

$$\mu_i'(T) = \psi_i^*(l).$$

Рассмотрим сначала задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1,2,3) \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = \psi_i(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(+0,t) = \alpha(u_1(0,t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_1(0,t) = u_2(0,t) = u_3(0,t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_i(l,t) = 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что решение $v(x,t)$ задачи (2) существует. Через $v_i(x,t)$ обозначим сужение $v(x,t)$ на соответствующее ребро графа Γ ($i = 1,2,3$). Пусть $\widetilde{u}(x,t) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3} v_i(x,t)$. Тогда $\widetilde{u}(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ \widetilde{u}(x,0) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,0) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3} \psi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(+0,t) = \dfrac{1}{3}\alpha(\widetilde{u}(0,t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ \widetilde{u}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. *Решение задачи (3) имеет вид*

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{\Phi(x-t) + \Phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \Psi(s)ds,$$

где

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(x), \; \textit{если } x \in [0,l] \\ -\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(2l-x), \; \textit{если } x \in [l,2l] \\ \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(-x), \; \textit{если } x \in [-l,0] \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(x), \; \textit{если } x \in [0,l] \\ -\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(2l-x), \; \textit{если } x \in [l,2l] \\ 2g(-x) - \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(-x) - \frac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\int\limits_0^{-x}\psi_i(s)ds, \; \textit{если } x \in [-l,0] \end{cases}$$

Здесь $g(t)$ — решение уравнения

$$g(t) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(t) + \frac{1}{3}\int\limits_0^t(\sum_{i=1}^{3}\psi_i(s) - \alpha(g(s)))ds, \tag{4}$$

определенное для всех $t \in [0,l]$.

Доказательство. Обозначим $\overline{\varphi}(x) = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(x)$, $\overline{\psi}(x) = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(x)$, $\frac{1}{3}\alpha(x) = \beta(x)$. Определим функцию

$$\overline{v}(x,t) = \frac{\Phi(x-t)+\Phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Psi(s)ds,$$

где

$$\Psi(x) = \begin{cases} \overline{\psi}(x), \; \text{если } x \in [0,l] \\ -\overline{\psi}(2l-x), \; \text{если } x \in [l,2l] \\ \overline{\psi}(-x), \; \text{если } x \in [-l,0] \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \overline{\varphi}(x), \; \text{если } x \in [0,l] \\ -\overline{\varphi}(2l-x), \; \text{если } x \in [l,2l] \\ 2g(-x) - \overline{\varphi}(-x) - 2\int\limits_0^{-x}\overline{\psi}(s)ds, \; \text{если } x \in [-l,0] \end{cases}$$

Здесь $g(t)$—решение уравнения

$$g(t) = \overline{\varphi}(t) + \int\limits_0^t(\overline{\psi}(s) - \beta(g(s)))ds,$$

определенное на всем отрезке $[0,l]$. Докажем, что такое решение существует и единственно. Введем оператор

$$L(g)(t) = \overline{\varphi}(t) + \int\limits_0^t(\overline{\psi}(s) - \beta(g(s)))ds.$$

Заметим, что $L : C[0,l] \to C[0,l]$. Утверждение сводится к вопросу о существовании у оператора L единственной неподвижной точки. Введем в $C[0,l]$ эквивалентную норму

$$\|x\|_m = \max_{0\leqslant t\leqslant l} e^{-mt}|x(t)|.$$

Тогда оператор L является сжатием в смысле этой нормы. В самом деле,

$$|L(g_1) - L(g_2)| = |\int\limits_0^t (\beta(g_2(s)) - \beta(g_1(s)))ds| \leqslant$$

$$\frac{1}{3}m\int\limits_0^t |g_2(s) - g_1(s)|ds = \frac{1}{3}m\int\limits_0^t e^{-ms}|g_2(s) - g_1(s)|e^{ms}ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}m\|g_2 - g_1\|_m \int\limits_0^t e^{ms}ds = \frac{1}{3}(e^{mt} - 1)\|g_2 - g_1\|_m.$$

Значит, умножив последнее неравенство на e^{-mt} и перейдя к максимуму получим, что

$$\|L(g_1) - L(g_2)\|_m \leqslant \frac{1}{3}(1 - e^{-ml})\|g_2 - g_1\|_m.$$

Следовательно, L имеет единственную неподвижную точку. Непосредственной подстановкой с учетом введенных ограничений на φ_i и ψ_i проверяется, что $\overline{v}(x,t)$ является решением задачи (3). Теорема доказана.

Введем функции $\omega_i(x,t) = v_i(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$ $(i = 1,2,3)$. Заметим, что $\omega_i(x,t)$ являются решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1,2,3) \\ \omega_i(x,0) = \varphi_i(x) - \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial\omega_i}{\partial t}(x,0) = \psi_i(x) - \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \omega_i(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ \omega_i(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{5}$$

Как известно [9], решение задачи (5) может быть представлено в виде

$$\omega_i(x,t) = \frac{\Phi_i(x-t) + \Phi_i(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Psi_i(s)ds,$$

где

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) - \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(x), \text{ если } x \in [0,l] \\ \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(-x) - \varphi_i(-x), \text{ если } x \in [-l,0] \\ \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i(2l-x) - \varphi_i(2l-x), \text{ если } x \in [l,2l] \end{cases}$$

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x) - \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(x), \text{ если } x \in [0,l] \\ \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(-x) - \psi_i(-x), \text{ если } x \in [-l,0] \\ \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(2l-x) - \psi_i(2l-x), \text{ если } x \in [l,2l] \end{cases}$$

Но тогда

$$v_i(x,t) = \omega_i(x,t) + \widetilde{u}(x,t) = \frac{\widetilde{\Phi}_i(x-t) + \widetilde{\Phi}_i(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\widetilde{\Psi_i}(s)ds, \qquad (6)$$

где

$$\widetilde{\Phi_i}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), \text{ если } x \in [0,l] \\ -\varphi_i(2l-x), \text{ если } x \in [l,2l] \\ 2g(-x) - \varphi_i(-x) - \dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\int\limits_{0}^{-x}\psi_i(s)ds, \text{ если } x \in [-l,0] \end{cases}$$

$$\widetilde{\Psi_i}(x) = \begin{cases} \psi_i(x), \text{ если } x \in [0,l] \\ -\psi_i(2l-x), \text{ если } x \in [l,2l] \\ \dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\psi_i(-x) - \psi_i(-x), \text{ если } x \in [-l,0] \end{cases}$$

Заметим, что предположив существование $v_i(x,t)$ доказали справедливость равенства (6). Верно и обратное. Непосредственной постановкой проверяется, что функции $v_i(x,t)$, задаваемые равенством (6), являются решением задачи (2). Здесь покажем, что выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial v_i}{\partial x}(+0,t) = \alpha(v_1(0,t))$. Имеем:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}(+0,t) = \frac{\widetilde{\Phi_i}'(-t) + \widetilde{\Phi_i}'(t)}{2} + \frac{\widetilde{\Psi_i}(t) - \widetilde{\Psi_i}(-t)}{2}.$$

Заметим, что $\widetilde{\Phi_i}'(t) = \varphi_i'(t)$, $\widetilde{\Phi_i}'(-t) = \varphi_i'(t) - \dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i'(t) + \dfrac{2}{3}\alpha(g(t))$. Значит,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}(+0,t) = \varphi_i'(t) - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\varphi_i'(t) + \frac{1}{3}\alpha(g(t)) - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\psi_i(t) + \psi_i(t).$$

$$v_i(0,t) = \frac{\widetilde{\Phi}_i(-t) + \widetilde{\Phi}_i(t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t}\widetilde{\Psi_i}(s)ds =$$

$$= \frac{2g(t) - \varphi_i(t) - \frac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\int\limits_{0}^{t}\psi_i(s)ds + \varphi_i(t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{0}(\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\psi_i(-x) - \psi_i(-x))dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\psi_i(x)dx = g(t).$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial v_i}{\partial x}(+0,t) = \alpha(g(t))$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь задачи ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = \psi_i(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ u_i(0,t) = v_i(0,t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_i(l,t) = \mu_i(t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{7}$$

Предположим, что решения задач (7) существуют. Обозначим их через $u_1^*(x,t)$, $u_2^*(x,t)$, $u_3^*(x,t)$ соответственно. Тогда функции $h_i(x,t) = u_i^*(x,t) - v_i(x,t)$ являются решением задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 h_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ h_i(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial t}(x,0) = 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ h_i(0,t) = 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ h_i(l,t) = \mu_i(t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Значит, $h_i(x,t) = \underline{\mu_i}(t + x - l)$, где

$$\underline{\mu_i}(t) = \begin{cases} \mu_i(t), \text{ если } t \geqslant 0 \\ 0, \text{ если } t < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $u_i^*(x,t) = h_i(x,t) + v_i(x,t) = \underline{\mu_i}(t + x - l) + v_i(x,t)$, где функции $v_i(x,t)$ определяются равенствами (6), являются решениями задачи (7). Заметим, что функции $u_i^*(x,t)$ также являются и решениями исходной задачи (1).

Требуется, чтобы выполнялись условия $u_i^*(x,T) = \varphi_i^*(x)$, $\dfrac{\partial u_i^*}{\partial t}(x,T) = \psi_i^*(x)$. Тогда

$$h_i(x,T) = u_i^*(x,T) - v_i(x,T) = \varphi_i^*(x) - v_i(x,T) = \widetilde{\varphi}_i(x),$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t}(x,T) = \psi_i^*(x) - \frac{\partial v_i}{\partial t}(x,T) = \widetilde{\psi}_i(x).$$

Откуда

$$\underline{\mu_i}(T + x - l) = \widetilde{\varphi}_i(x),$$

$$\underline{\mu_i'}(T + x - l) = \widetilde{\psi}_i(x).$$

Значит,

$$\widetilde{\varphi}_i(t) - \widetilde{\varphi}_i(t_0) - (\widehat{\widetilde{\psi}}_i(t) - \widehat{\widetilde{\psi}}_i(t_0)) \equiv 0,$$

где $\widehat{\widetilde{\psi}}_i(t)$—какая-то первообразная для $\widetilde{\psi}_i(t)$, $t_0 \in [0, l]$. Выберем первообразную так, чтобы

$$\widehat{\widetilde{\psi}}_i(t_0) - \widetilde{\varphi}_i(t_0) = 0. \tag{8}$$

Тогда получим равенство

$$\widetilde{\varphi}_i(t) - \widehat{\widetilde{\psi}}_i(t) = 0,$$

справедливое для всех $t \in [0, l]$. С другой стороны,

$$2\underline{\mu_i'}(T + x - l) = \widetilde{\varphi}_i{}'(x) + \widetilde{\psi}_i(x).$$

Значит, при $0 \leqslant x \leqslant l-T$ получим, что

$$\widetilde{\varphi}_i{}'(x) + \widetilde{\psi}_i(x) \equiv 0.$$

Зафиксируем любое $t_0 \in [0, l-T]$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}_i(t) - \widetilde{\varphi}_i(t_0) + \widehat{\widetilde{\psi}}_i(t) - \widehat{\widetilde{\psi}}_i(t_0) \equiv 0,$$

где $\widehat{\widetilde{\psi}}_i(t)$—какая-то первообразная для $\widetilde{\psi}_i(t)$, $t_0 \in [0, l-T]$. Выберем ее так, чтобы

$$\widehat{\widetilde{\psi}}_i(t_0) + \widetilde{\varphi}_i(t_0) = 0. \tag{9}$$

Тогда для всех $0 \leqslant t \leqslant l-T$ получим, что

$$\widetilde{\varphi}_i(t) + \widehat{\widetilde{\psi}}_i(t) = 0.$$

Так как $\widetilde{\varphi}_i(x) = h_i(x,T) = \underline{\mu_i}(T+x-l)$, то $\widetilde{\varphi}_i(x) \equiv 0$ при $x \leqslant l-T$. Следовательно, если $t_0 \in [0, l-T]$, то $\widetilde{\varphi}_i(t_0) = 0$. Таким образом, для $t_0 \in [0, l-T]$ равенства (8), (9) эквивалентны. Получаем, что

$$\widetilde{\varphi}_i(t) - \widehat{\widetilde{\psi}}_i(t) = 0, \quad t \in [0, l] \tag{10}$$

$$\widetilde{\varphi}_i(t) + \widehat{\widetilde{\psi}}_i(t) = 0, \quad t \in [0, l-T]. \tag{11}$$

Первообразная $\widehat{\widetilde{\psi}}_i(t)$ для функции $\widetilde{\psi}_i(t)$ выбирается так, чтобы $\widehat{\widetilde{\psi}}_i(t_0) + \widetilde{\varphi}_i(t_0) = 0$, где $t_0 \in [0, l-T]$. Вернувшись к исходным обозначениям, перепишем (9), (10), (11) как

$$\varphi_i^*(t) - v_i(t,T) - \widehat{\psi}_i^*(t) + \widehat{v}_i(t,T) = 0, \quad t \in [0, l], \tag{12}$$

$$\varphi_i^*(t) - v_i(t,T) + \widehat{\psi}_i^*(t) - \widehat{v}_i(t,T) = 0, \quad t \in [0, l-T], \tag{13}$$

$$\varphi_i^*(t_0) - v_i(t_0,T) + \widehat{\psi}_i^*(t_0) - \widehat{v}_i(t_0,T) = 0, \quad t_0 \in [0, l-T]. \tag{14}$$

Здесь

$$\widehat{v}_i(x,t) = \frac{\widetilde{\Phi}_i(x+t) - \widetilde{\Phi}_i(x-t)}{2} + \frac{1}{2}(\widehat{\widetilde{\Psi}}_i(x+t) + \widehat{\widetilde{\Psi}}_i(x-t)),$$

где $\widehat{\widetilde{\Psi}}_i(t)$ — какая-то первообразная для $\widetilde{\Psi}_i(t)$. Так как

$$\widehat{v}_i(t,T) + v_i(t,T) = \widetilde{\Phi}_i(t+T) + \widehat{\widetilde{\Psi}}_i(t+T),$$

$$v_i(t,T) - \widehat{v}_i(t,T) = \widetilde{\Phi}_i(t-T) - \widehat{\widetilde{\Psi}}_i(t-T),$$

то (12), (13), (14) перепишем как

$$\varphi_i^*(t) - \widehat{\psi}_i^*(t) - \widetilde{\Phi}_i(t-T) + \widehat{\widetilde{\Psi}}_i(t-T) = 0, \quad t \in [0, l],$$

$$\varphi_i^*(t) + \widehat{\psi}_i^*(t) - \widetilde{\Phi}_i(t+T) - \widehat{\widetilde{\Psi}}_i(t+T) = 0, \quad t \in [0, l-T],$$

где первообразные $\widehat{\widetilde{\Psi}}_i(t)$, $\widehat{\psi}_i^*(t)$ выбираются так, чтобы

$$\varphi_i^*(t_0) + \widehat{\psi}_i^*(t_0) - \widetilde{\Phi}_i(t_0+T) - \widehat{\widetilde{\Psi}}_i(t_0+T) = 0, \quad t_0 \in [0, l-T].$$

Первое из полученных равенств распадается на два. Если $T \leqslant t \leqslant l$, то оно принимает вид

$$\varphi_i^*(t) - \widehat{\psi}_i^*(t) - \varphi_i(t-T) + \psi_i(t-T) = 0.$$

Если же $0 \leqslant t \leqslant T$, получаем выражение

$$\varphi_i^*(t) - \widehat{\psi}_i^*(t) - 2g(T-t) + \varphi_i(T-t) + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\int\limits_0^{T-t}\psi_i(s)ds - \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\widehat{\psi}_i(T-t) + \widehat{\psi}_i(T-t) = 0.$$

При $0 \leqslant t \leqslant l-T$ получим, что

$$\varphi_i^*(t) + \widehat{\psi}_i^*(t) - \varphi_i(t+T) - \widehat{\psi}_i(t+T) = 0.$$

Причем, первообразные $\widehat{\psi_i^*}$ и $\widehat{\psi}_i$ выбираются так, чтобы

$$\varphi_i^*(t_0) + \widehat{\psi}_i^*(t_0) - \varphi_i(t_0+T) - \widehat{\psi}_i(t_0+T) = 0,$$

где $t_0 \in [0, l-T]$. Сложив равенства

$$\underline{\mu_i}'(T+x-l) = \widetilde{\varphi}_i'(x),$$

$$\underline{\mu_i'}(T+x-l) = \widetilde{\psi}_i(x),$$

получим, что

$$2\underline{\mu_i'}(T+x-l) = \varphi_i^{*'}(x) + \psi_i^*(x) - \widetilde{\Phi_i}'(x+T) - \widetilde{\Psi}_i(x+T),$$

откуда при $0 \leqslant t \leqslant T$ получим явное представление для граничных управлений, имеющее вид

$$\mu_i(t) = \frac{1}{2}(\varphi_i^*(t+l-T) + \widehat{\psi_i^*}(t+l-T) + \varphi_i(l-t) - \widehat{\psi}_i(l-t)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ильин В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Успехи математических наук. — 2005. — Т. 60, вып. 6 (366). — С. 89–114.

[2] Избранные труды В.А. Ильина: В 2-х томах: Том 2. — М.:МАКС Пресс, 2008. — 692 с.

[3] Егоров А. И. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, вып. 1. — С. 85–92.

[4] Егоров А. И. Наблюдаемость колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами в точке соединения / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. — Санкт-Петербург, 2011. — Вып. 1. — С. 142–146.

[5] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный [и др.]. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

[6] Прядиев В.Л. Об аналоге формулы Даламбера и спектре лапласиана на графе с соизмеримыми ребрами / В. Л. Прядиев, А. В. Копытин // Вестник ВГУ, Сер. физика, математика. — Воронеж, 2001. — № 1. — С. 106–109.

[7] Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной / А. В. Боровских // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, вып. 1. — С. 64–89.

[8] Провоторов В.В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн / В. В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. — Санкт-Петербург, 2012. — Вып. 1. — С. 62–71.

[9] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. — М.: Издательство МГУ, 1999. — 797 с.

Зверева М. Б., к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа ВГУ
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: (473)220–86–90

Zvereva M. B., Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: (473)220–86–90