УДК 517.982

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА–ЛОРЕНЦА*

А. М. Гришина, В. И. Овчинников

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.09.2013 г.

Аннотация: в работах Чианки (2004) и Овчинникова (2012) получены оптимальные теоремы вложения для пространств Орлича–Соболева. Описание оптимальных пространств вложения в альтернативных терминах позволило установить новые взаимосвязи между пространствами измеримых функций. В частности, найти описание некоторых пространств, полученных обобщенной конструкцией Лионса–Петре, как пространств Орлича–Лоренца, и доказать оптимальную интерполяционную теорему для операторов слабого типа в пространствах Орлича.

Ключевые слова: пространства Соболева, перестановочно инвариантные пространства, пространства Орлича, оптимальные теоремы вложения, обобщенные интерполяционные конструкции Лионса–Петре.

Abstract: A. Cianchi (2004) and V. I. Ovchinnikov (2012) found alternative descriptions of optimal spaces in embedding theorems for the Orlicz–Sobolev spaces. As a result we find new interpolation relations for spaces of measurable functions. In particular we identify some interpolation spaces, obtained by the generalized Lions–Peetre construction, with the Orlicz–Lorentz space, and we prove optimal interpolation theorem of weak type for Orlicz spaces.

Keywords: Sobolev's spaces, rearrangement invariant spaces, Orlicz spaces, optimal embedding theorems, the generalized Lions–Peetre interpolation construction.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1],[2] недавно получены оптимальные теоремы вложения для пространств Орлича–Соболева. Пространства вложения в этих работах описаны в совершенно разных терминах. Поэтому возникла задача о сравнении этих результатов. Оказалось, что эти результаты не сводятся один к другому, а на самом деле дают различные описания для одних и тех же пространств. Это позволило в данной работе доказать новые интерполяционные теоремы. В частности, получить описание некоторых обобщенных пространств Лионса–Петре как пространств Орлича–Лоренца и доказать оптимальную интерполяционную теорему для операторов слабого типа в пространствах Орлича.

1. ДВА ОПИСАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей, причем $n > 1$. Рассмотрим $E(\Omega)$ интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$ пространство. Через $W^1_E(\Omega)$ обозначим пространство Соболева первого порядка таких вещественнозначных слабо дифференцируемых функций на Ω, что модуль их градиента принадлежит E. Далее будем при возможности опускать область Ω в обозначениях пространств.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00378)

1.1. Первое описание

В работе Чианки [1] была доказана теорема об оптимальных вложениях для пространств Орлича–Соболева первого порядка в перестановочно инвариантные пространства. Напомним соответствующие понятия и результаты.

Выпуклую, отличную от нуля функцию $A : [0, \infty) \to [0, \infty]$, непрерывную слева и стремящуюся к нулю в нуле, будем называть функцией Юнга. Таким образом, любая функция Юнга допускает представление

$$A(s) = \int\limits_0^s a(r)dr \quad \text{для любого} \quad s \geqslant 0, \tag{1}$$

где $a : [0, \infty) \to [0, \infty]$ – неубывающая, непрерывная слева функция, которая не равна тождественно ни нулю, ни бесконечности.

Определение 1. *Пространством Орлича $L_A(\mathfrak{M})$, соответствующим функции Юнга A, называется пространство измеримых вещественнозначных функций на пространстве $\mathfrak{M}$ с мерой μ, таких, что для некоторого $\lambda > 0$*

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} A\left(\frac{|x(\mathfrak{m})|}{\lambda}\right) d\mu(\mathfrak{m}) < \infty,$$

и

$$||x||_{L_A} = \inf\{\lambda : \int\limits_{\mathfrak{M}} A\left(\frac{|x(\mathfrak{m})|}{\lambda}\right) d\mu(\mathfrak{m}) \leqslant 1\}.$$

Определение 2. *Функцией распределения для любой неотрицательной измеримой функции $x(\mathfrak{m})$, определенной на пространстве $\mathfrak{M}$ с мерой μ, называется функция*

$$n_x(\tau) = \mu(\mathfrak{m} : x(\mathfrak{m}) > \tau), \quad \text{где } \tau > 0.$$

Неотрицательные измеримые функции называются равноизмеримыми, если у них одинаковые функции распределения.

Определение 3. *Перестановкой $x^*(t)$, где $t > 0$, функции $x(\mathfrak{m})$ называется функция*

$$x^*(t) = \inf\{\tau : n_{|x|}(\tau) < t\},$$

которая является единственной убывающей на $(0, \infty)$ непрерывной слева функцией, равноизмеримой с $|x|$.

Определение 4. *Пусть $q \in (1, \infty)$ и D – функция Юнга, такая, что для некоторого $\xi > 0$*

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{D(r)}{r^{1+q}} dr < \infty.$$

Тогда пространством Орлича–Лоренца назовём пространство $L(q, D)(\mathfrak{M})$ измеримых вещественнозначных функций x на $\mathfrak{M}$, для которых конечна величина

$$||x||_{L(q,D)(\mathfrak{M})} = ||t^{-\frac{1}{q}} x^*(t)||_{L_D(0,\mu(\mathfrak{M}))},$$

где для краткости обозначили $L_D(0, \mu(\mathfrak{M})) = L_D((0, \mu(\mathfrak{M})))$.

Определение 5. *Пусть $q \in (1,\infty)$ и A – функция Юнга, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \left(\frac{r}{A(r)}\right)^{\frac{1}{q-1}} dr < \infty \tag{2}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

По определению $B_{A,q} : [0,\infty) \to [0,\infty]$, и

$$B_{A,q}(s) = \int\limits_0^{s} b(r)dr, \tag{3}$$

где b – непрерывная слева функция на $[0,\infty)$, такая, что

$$b^{-1}(s) = \left(\int\limits_{a^{-1}(s)}^{\infty} \left(\int\limits_0^{t} \left(\frac{1}{a(r)}\right)^{\frac{1}{q-1}} dr\right)^{-q} \frac{dt}{a(t)^{q'}}\right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad s \geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь a – функция из представления (1), a^{-1} и b^{-1} – непрерывные слева функции, обобщенно обратные к a и b, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Чианки доказал, что если функция Юнга $A(r)$ кроме того удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{r}{A(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} dr = \infty, \tag{5}$$

то

$$W^1_{L_A}(\Omega) \subset L(n, B_{A,n})(\Omega).$$

При этом пространство $L(n, B_{A,n})$ является наименьшим перестановочно инвариантным пространством функций на Ω, куда вложено $W^1_{L_A}$.[1)]

1.2. Второе описание

В работе [3] на основе интерполяционных соображений получено альтернативное описание оптимального пространства вложения.

Пусть $0 < \theta < 1$. Обозначим через $\Lambda_\theta(\mathfrak{M})$ пространство Лоренца таких измеримых функций x на $\mathfrak{M}$, для которых конечна величина

$$\int\limits_0^{\infty} x^*(u)du^\theta,$$

и

$$||x||_{\Lambda_\theta(\mathfrak{M})} = \int\limits_0^{\infty} x^*(u)du^\theta.$$

[1)] На самом деле в работе Чианки доказано вложение для пространства Орлича–Соболева функций, аннулирующихся на границе произвольной ограниченной области Ω, но наша формулировка следует из [1].

Обозначим через $M_\theta(\mathfrak{M})$ – пространство Марцинкевича таких функций x на $\mathfrak{M}$, для которых конечен

$$\sup_{0<u<\infty} x^*(u)u^{1-\theta},$$

с нормой

$$||x||_{M_\theta(\mathfrak{M})} = \sup_{0<t<\infty} \frac{\int\limits_0^t x^*(u)du}{t^\theta}.$$

Как известно (см., например, [4]), для ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с достаточно гладкой границей справедливы оптимальные вложения

$$W^1_{L_1}(\Omega) \subset \Lambda_{1-1/n}(\Omega),$$

$$W^1_{\Lambda_{1/n}}(\Omega) \subset L_\infty(\Omega),$$

из которых на основе интерполяционных соображений вытекает описание всех оптимальных вложений в классе интерполяционных между L_1 и L_∞ пространств ([3]). Мы применим это описание для пространств Орлича L_A. Заметим, кстати, что условие (5) означает $L_A \nsubseteq \Lambda_{1/n}$.

Определение 6. *(См. [5], [6]) Интерполяционной орбитой* $Orb(X, \{X_0, X_1\} \to \{Y_0, Y_1\})$ *пространства* $X \subset X_0 + X_1$ *при действии линейных ограниченных операторов из пары* $\{X_0, X_1\}$ *в пару* $\{Y_0, Y_1\}$ *будем называть пространство, состоящее из* $y \in Y_0 + Y_1$ *таких, что*

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} T_j x_j,$$

где $T_j : \{X_0, X_1\} \to \{Y_0, Y_1\}$, *а* $x_j \in X$ *такие, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max(||T_j||_{X_0 \to Y_0}, ||T_j||_{X_1 \to Y_1})||x_j||_X < \infty.$$

Норма

$$\|y\|_{Orb} = \inf_{T_j, x_j} \sum_{j=1}^{\infty} \max(||T_j||_{X_0 \to Y_0}, ||T_j||_{X_1 \to Y_1})||x_j||_X.$$

Согласно [6], функтор, который каждой паре $\{Y_0, Y_1\}$ ставит в соответствие пространство $Orb(X, \{X_0, X_1\} \to \{Y_0, Y_1\})$, называется нижним интерполяционным функтором, порожденным пространством X, характеристическая функция которого

$$\underline{\psi}(\alpha, \beta) = \inf_{\substack{f \in (X_0 + X_1)^*, \\ ||f||_{X_0^*} \leqslant \alpha^{-1}, ||f||_{X_1^*} \leqslant \beta^{-1}}} \frac{1}{||f||_{X^*}}$$

называется нижним типом пространства X относительно X_0 и X_1.

Рассмотрим пространство Орлича L_A, построенное по функции Юнга $A(r)$. Из [3] следует, что наименьшее пространство F, интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$, в которое вложено пространство $W^1_{L_A}$, совпадает с интерполяционной орбитой пространства L_A при действии линейных операторов из пары $\{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\}$ в пару $\{\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty\}$. Иными словами,

$$F = Orb(L_A, \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty\}).$$

Таким образом, мы приходим к задаче об описании интерполяционной орбиты пространства Орлича. Для ее решения используется обобщенный метод средних Лионса–Петре, введенный в [7].

2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВЛОЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА–СОБОЛЕВА

Определение 7. *Интерполяционной функцией называется положительная функция $\varphi(s,t)$ двух положительных переменных, если она возрастает по s и t и является однородной первой степени, то есть $\varphi(\lambda s, \lambda t) = \lambda\varphi(s,t)$ при всех $\lambda > 0$.*

Множество всех интерполяционных функций обозначается через Φ. Через Φ_0 обозначается подмножество всех интерполяционных функций таких, что $\varphi(t,1) \to 0$ и $\varphi(1,t) \to 0$ при $t \to 0$.

Определение 8. *Функция $\rho(t)$, определенная на полуоси $[0,\infty)$, называется квазивогнутой, если*

1) $\rho(0) = 0$;

2) $\rho(t)$ положительна и возрастает при $t > 0$;

3) $\rho(t)/t$ убывает при $t > 0$.

Любая интерполяционная функция $\varphi(s,t)$ задается с помощью квазивогнутой функции $\rho(t) = \varphi(1,t)$, причем $\varphi(s,t) = s\rho\,(t/s)$.

Определение 9. *Последовательность $\{t_m\}$ положительных чисел, где m пробегает некоторый интервал $\mathbb{M}$ в $\mathbb{Z}$, называется дискретизирующей последовательностью для квазивогнутой функции $\rho(t)$, если она является*

1) полузаполняющей для функции $\rho(t)$, то есть существует константа C такая, что для любого положительного t существует t_m, удовлетворяющее неравенствам $\rho(t) \leqslant C\rho(t_m)$ и $\rho(t)/t \leqslant C\rho(t_m)/t_m$;

2) равномерно разреженной, т.е. существует $q > 1$ такое что $\rho(t_{m+1}) > q\rho(t_m)$ и $\rho(t_m)/t_m > q\rho(t_{m+1})/t_{m+1}$.

Для любой интерполяционной функции из Φ_0 соответствующая квазивогнутая функция имеет дискретизирующую последовательность (см., например, [5]). Такую последовательность будем называть дискретизирующей последовательностью для интерполяционной функции.

Определение 10. *Пусть $\{X_0, X_1\}$ – произвольная банахова пара, $\varphi(s,t)$ – некоторая интерполяционная функция из Φ_0, а $\{t_m\}$ – ее дискретизирующая последовательность, и $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$. Обозначим через $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ пространство таких $x \in X_0 + X_1$, что*

$$x = \sum_{m\in\mathbb{M}} \rho(t_m) x_m \quad (\textit{сходимость в } X_0 + X_1),$$

где $x_m \in X_0 \cap X_1$ и $\{||x_m||_{X_0}\} \in l_{p_0}, \{t_m ||x_m||_{X_1}\} \in l_{p_1}$.

Стандартным образом проверяется, что $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ – это банахово промежуточное пространство для пары $\{X_0, X_1\}$. Более того эта конструкция является интерполяционным функтором (см.[8]).

Пусть $\{X_0, X_1\}$ – банахова пара, $s > 0, t > 0$. Введем функцию

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) = \inf_{x=x_0+x_1} s||x_0||_{X_0} + t||x_1||_{X_1}.$$

Обычно K-функционалом называют

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) = K(1, t, x, \{X_0, X_1\}).$$

В терминах К-функционала можно описать элементы пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ [8]. Здесь используется конструкция Кальдерона–Лозановского для банаховых решеток.

Определение 11. *Пусть $\{E_0, E_1\}$ – пара квазибанаховых решеток, и $\varphi \in \Phi$. Обозначим через $\varphi(E_0, E_1)$ пространство всех элементов e из $E_0 + E_1$ таких, что $|e| = \varphi(|e_0|, |e_1|)$, где $e_0 \in E_0, e_1 \in E_1$, с квазинормой*

$$||e||_{\varphi(E_0,E_1)} = \inf_{e_0,\, e_1} \max\left(\|e_0\|_{E_0}, \|e_1\|_{E_1}\right),$$

где infimum берется по всем e_0 и e_1, таким, что $|e|$ представляется в форме $\varphi(|e_0|, |e_1|)$. Эта конструкция пространства $\varphi(E_0, E_1)$ по паре квазибанаховых решеток E_0, E_1 называется конструкцией Кальдерона–Лозановского.

Оказалось, что $x \in \varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$, где $\varphi \in \Phi_0$, тогда и только тогда, когда

$$\{K(w_k, x, \{X_0, X_1\})\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(w_k^{-1})),$$

где w_k – дискретизирующая последовательность для интерполяционной функции $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$, l_{p_0} – стандартное пространство последовательностей, а $l_{p_1}(w_k^{-1})$ состоит из последовательностей $\{\xi_k\}$ таких, что $\{\xi_k w_k^{-1}\} \in l_{p_1}$. При этом норма на $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ эквивалентна функционалу

$$\|\{K(w_k, x, \{X_0, X_1\})\}\|_{\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(w_k^{-1}))}$$

(см. [8]). Отсюда следует, что пространство $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ не зависит от выбора дискретизирующей последовательности для функции φ в определении 10. Далее, отсюда легко получить, что характеристическая функция [6] интерполяционного функтора $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ эквивалентна интерполяционной функции $\varphi^\star(s, t) = 1/\varphi(1/s, 1/t)$.

Пространство Орлича L_A можно описать с помощью конструкции Кальдерона–Лозановского в виде $\varphi(L_1, L_\infty)$, где $\varphi(s, t)$ – такая интерполяционная функция, что $A^{-1}(t) = \varphi(t, 1)$.

В [8] показано, что $\varphi(L_1, L_\infty) = \varphi(L_1, L_\infty)_{1,\infty}$. Тогда

$$F = Orb(\varphi(L_1, L_\infty)_{1,\infty}, \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty\}).$$

В работе [2] орбита F вычислена в терминах обобщенных пространств средних Лионса–Петре. Оказалось, что

$$F = \widetilde{\varphi}(\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty)_{1,n},$$

где $\widetilde{\varphi}(s, t)$ – интерполяционная функция, совпадающая с нижним типом пространства L_A между L_1 и $\Lambda_{\frac{1}{n}}$.

Если применить теорему двойственности для обобщенных пространств средних Лионса–Петре [9], то легко проверить, что $F'' = F$, следовательно, пространство F является перестановочно инвариантным.

Тем самым мы приходим к двум описаниям одного и того же наименьшего перестановочно инвариантного пространства, куда вложено $W^1_{L_A}$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если $n > 1$ и функция Юнга $A(r)$, удовлетворяет условиям (2) при $q = n$ и (5), то для пространств измеримых функций на пространстве с конечной мерой*

$$L(n, B_{A,n}) = \widetilde{\varphi}(\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty)_{1,n}, \tag{6}$$

где $\widetilde{\varphi}(s,t)$ – интерполяционная функция, совпадающая с нижним типом пространства L_A между L_1 и $\Lambda_{\frac{1}{n}}$.[2)]

Заметим, что условия на функцию Юнга A заведомо выполняются, если пространство Орлича L_A оказывается промежуточным для пары $\{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\}$.

Из теоремы 1 вытекает новое соотношение для классических пространств.

Теорема 2. *Пусть $n > 1$, и выполняются условия (2) и (5) на функцию Юнга $A(r)$. Тогда*

$$\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n} = L_{B_{A,n}}, \tag{7}$$

где интерполяционная функция $\widetilde{\varphi}(s,t)$ равна нижнему типу пространства Орлича L_A между L_1 и $\Lambda_{\frac{1}{n}}$.

Для доказательства нам понадобится одно предложение, касающееся K-функционалов.

Предложение 1. *Пусть $0 < \theta < 1$, тогда для любого $x \in \Lambda_{1-\theta}$*

$$K(t, x; \{\Lambda_{1-\theta}, L_\infty\}) = (1-\theta) \int\limits_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} x^*(u) u^{-\theta} du \asymp K(t, x^*(u)u^{-\theta}; \{L_1, M_{1-\theta}\}).$$

Доказательство. Первое равенство является прямым развитием своего частного случая при $\theta = 0$, и известно давно из работы Лоренца–Шимогаки [10]. Поэтому обратимся ко второму соотношению.

Как известно из [11] или [12], $M_{1-\theta} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,\infty}$. Тогда по формуле Холмстедта [12] получим, что

$$K(t, x^*(u)u^{-\theta}; \{L_1, M_{1-\theta}\}) \asymp t \sup_{t^{\frac{1}{1-\theta}} \leqslant s < \infty} \{s^{-(1-\theta)} K(s, x^*(u)u^{-\theta}; \{L_1, L_\infty\})\}. \tag{8}$$

Поскольку $K(t, x, \{L_1, L_\infty\}) = \int\limits_0^t x^*(u) du$, выражение (8) приобретает вид

$$t \sup_{t^{\frac{1}{1-\theta}} \leqslant s < \infty} \{s^{\theta-1} \int\limits_0^s x^*(u) u^{-\theta} du\}. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию $g(s) = s^{\theta-1} \int\limits_0^s x^*(u)u^{-\theta} du$ и покажем, что она убывает при $s > 0$.

Сделаем замену $u^{1-\theta} = s^{1-\theta} v$. Тогда

$$g(s) = s^{\theta-1} \int\limits_0^s x^*(u) u^{-\theta} du = \frac{1}{1-\theta} \int\limits_0^1 x^*(s v^{\frac{1}{1-\theta}}) dv.$$

[2)] Формально мы получили данное равенство для пространств функций на ограниченной области Ω в достаточно гладкой границей. Но, как показано в [11], подобные результаты прямо переносятся на произвольные пространства с конечной мерой.

Отсюда сразу следует убывание $g(s)$, если учесть убывание $x^*(u)$. Поэтому *supremum* в выражении (9) достигается при $s = t^{\frac{1}{1-\theta}}$. Получили, что

$$K(t, x^*(u)u^{-\theta}; \{L_1, M_{1-\theta}\}) \asymp \int\limits_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} x^*(u)u^{-\theta}du.$$

□

Теперь мы сможем доказать (7).

Доказательство. Воспользуемся описанием пространств Лионса–Петре через K-функционал [8], тогда $x \in \widetilde{\varphi}(\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty)_{1,n}$ равносильно тому, что $\{K(w_k, x; \{\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty\})\} \in \widetilde{\varphi}(l_1, l_n(w_k^{-1}))$, где w_k – дискретизирующая последовательность для K-функционала. В силу предложения 1 последовательность $\{K(w_k, x^*(u)u^{-\frac{1}{n}}; \{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\})\}$ также принадлежит $\widetilde{\varphi}(l_1, l_n(w_k^{-1}))$. А это значит, что $x^*(u)u^{-\frac{1}{n}} \in \widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}$.

Рассмотрим пространства

$$E = \{x : x^*(u)u^{-\frac{1}{n}} \in \widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}\} = \widetilde{\varphi}(\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty)_{1,n},$$

$$F = \{x : x^*(u)u^{-\frac{1}{n}} \in L_{B_{A,n}}\} = L(n, B_{A,n}).$$

По теореме 1

$$\widetilde{\varphi}(\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty)_{1,n} = L(n, B_{A,n}), \quad \text{то есть } E = F.$$

Докажем, что $\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n} = L_{B_{A,n}}$.

В [11] (стр. 103) доказано следующее свойство перестановок: если $\alpha > -1$ и $x(u)$ – убывающая неотрицательная функция, то справедливо неравенство

$$C_1 \int\limits_0^\infty x(u)u^{\gamma+\alpha}du \leqslant \int\limits_0^\infty (x(u)u^\gamma)^* u^\alpha du \leqslant C_2 \int\limits_0^\infty x(u)u^{\gamma+\alpha}du$$

для любого положительного γ, где C_1 и C_2 не зависят от выбора функции $x(u)$.

Так как x^* – убывающая неотрицательная функция, и $-\frac{1}{n} > -1$, то, согласно этому свойству, верно неравенство

$$C_1 \int\limits_0^t x^*(u)du \leqslant \int\limits_0^t (x^*(u)u^{\frac{1}{n}})^* u^{-\frac{1}{n}}du \leqslant C_2 \int\limits_0^t x^*(u)du,$$

где C_1 и C_2 не зависят от выбора функции $x(u)$ и $t > 0$. Иными словами

$$\int\limits_0^t (x^*(u)u^{\frac{1}{n}})^* u^{-\frac{1}{n}}du \asymp \int\limits_0^t x^*(u)du. \tag{10}$$

А это значит, что для любого пространства, интерполяционного между L_1 и L_∞, функции x и $(x^*(u)u^{1/n})^* u^{-1/n}$ принадлежат ему одновременно.[3)]

[3)] Этим наблюдением мы обязаны С. В. Асташкину.

Рассмотрим такую функцию $z(u)$, что $z^*(u) \in \widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n},$. В силу (10), $(z^*(u)u^{\frac{1}{n}})^* u^{-\frac{1}{n}} \in \widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}$, то есть $z^*(u)u^{\frac{1}{n}} \in E$. Так как $E = F$, то $z^*(u)u^{\frac{1}{n}} \in F$, следовательно, $(z^*(u)u^{\frac{1}{n}})^* u^{-\frac{1}{n}} \in L_{B_{A,n}}$, то есть $z^*(u) \in L_{B_{A,n}}$. Следовательно, $\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n} \subset L_{B_{A,n}}$. Аналогично доказывается обратное вложение.

Таким образом, получили, что

$$\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n} = L_{B_{A,n}}.$$

□

Следствие 1. *Функция Юнга $B_{A,n}$ удовлетворяет соотношению*

$$B_{A,n}^{-1}(t) \asymp \widetilde{\varphi}(t, t^{1/n}). \tag{11}$$

Доказательство. Как уже отмечалось, характеристическая функция интерполяционного функтора $\widetilde{\varphi}(X_0, X_1)_{1,n}$ эквивалентна $\widetilde{\varphi}^\star(s,t) = 1/\widetilde{\varphi}(1/s, 1/t)$. Поэтому фундаментальные функции ψ пространств L_1, $M_{1-\frac{1}{n}}$ и $\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}$ связаны (см. [13]) соотношением

$$\psi_{\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}}(t) \asymp \widetilde{\varphi}^\star(\psi_{L_1}(t), \psi_{M_{1-\frac{1}{n}}}(t)) = \widetilde{\varphi}^\star(t, t^{\frac{1}{n}}).$$

Поскольку пространство $\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}$ оказалось пространством Орлича с функцией Юнга $B_{A,n}$, то его фундаментальная функция равна $1/B_{A,n}^{-1}(1/t)$. Таким образом приходим к

$$1/B_{A,n}^{-1}(1/t) \asymp \widetilde{\varphi}^\star(t, t^{\frac{1}{n}}) \quad \text{или} \quad B_{A,n}^{-1}(t) \asymp \widetilde{\varphi}(t, t^{1/n}).$$

□

Отметим, что формула (11) выгодно отличается от формулы (3–4).

Одним из важнейших свойств конструкции Кальдерона–Лозановского является то, что из соотношений вида (11) следует равенство пространств Орлича

$$L_{B_{A,n}} = \widetilde{\varphi}(L_1, L_n).$$

Таким образом, приходим к несколько неожиданным соотношениям

$$\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n} = L_{B_{A,n}} = \widetilde{\varphi}(L_1, L_n) = \widetilde{\varphi}(L_1, L_n)_{1,n}. \tag{12}$$

(Напомним, что функция $\widetilde{\varphi}$ не произвольна, а является нижним типом пространства L_A между L_1 и $\Lambda_{\frac{1}{n}}$.)

Теорема 2 приводит нас к оптимальной интерполяционной теореме для некоторых операторов слабого типа. Близкие результаты содержатся в работе [1].

Теорема 3. *Если пространство Орлича L_A не содержится в пространстве Лоренца $\Lambda_{1/n}$, то для пространств измеримых функций на пространстве с конечной мерой при $n > 1$*

$$Orb(L_A; \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\}) = \widetilde{\varphi}(L_1, L_n),$$

где $\widetilde{\varphi}(s,t)$ – интерполяционная функция, равная нижнему типу пространства L_A между L_1 и $\Lambda_{\frac{1}{n}}$.

Доказательство. Без ограничения общности будем рассматривать пространства функций на единичном интервале. Обозначим через T_1 множество операторов, действующих из пары $\{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\}$ в пару $\{\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty\}$, и через T_2 – множество операторов, действующих из пары $\{\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty\}$ в пару $\{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\}$.

Поскольку $\widetilde{\varphi}(X_0, X_1)_{1,n}$ – интерполяционный функтор, то операторы, действующие из $\{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\}$ в $\{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\}$, отображают пространство $\widetilde{\varphi}(L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}})_{1,n}$ в пространство $\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}$.

В [2] показано, что

$$Orb(L_A, \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\}) = \widetilde{\varphi}(L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}})_{1,n}.$$

Следовательно, $L_A \subset \widetilde{\varphi}(L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}})_{1,n}$. Поэтому

$$Orb(L_A; \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\}) \subset \widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}. \tag{13}$$

Для того, чтобы доказать обратное вложение, рассмотрим произвольную функцию $z(t) = z^*(t)$, где $0 < t < 1$, принадлежащую пространству $\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}$. Пусть T – оператор, соответствующий умножению на $t^{-\frac{1}{n}}$. Очевидно, что $T \in T_2$.

Выше в доказательстве теоремы 2 было показано, что принадлежность функции $z^*(t)$ пространству $\widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}$ равносильна принадлежности функции $y(t) = z^*(t)t^{\frac{1}{n}}$ пространству $\widetilde{\varphi}(\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty)_{1,n}$. То есть, z^* является образом функции $y \in \widetilde{\varphi}(\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty)_{1,n} = Orb(L_A; \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{\Lambda_{1-\frac{1}{n}}, L_\infty\})$ при действии оператора умножения $T \in T_2$. Поэтому $z^* = T(y) \in Orb(L_A; \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\})$.

Условие $z = z^*$, как известно, не существенно, поэтому

$$Orb(L_A; \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\}) \supset \widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) получаем, что

$$Orb(L_A; \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\}) = \widetilde{\varphi}(L_1, M_{1-\frac{1}{n}})_{1,n}.$$

А в силу (12)

$$Orb(L_A; \{L_1, \Lambda_{\frac{1}{n}}\} \to \{L_1, M_{1-\frac{1}{n}}\}) = \widetilde{\varphi}(L_1, L_n).$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Cianchi A. Optimal Orlicz–Sobolev embeddings. Rev. Mat. Iberoamericana. — 2004. — V. 20. — P. 427–474.

[2] Овчинников В.И. Обобщенная теорема о сокращении параметров для метода средних Лионса–Петре и теоремы вложения для пространств Соболева // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2012: материалы международной конференции. — Воронеж, 2012. — С. 168–171.

[3] Gogatishvili A., Ovchinnikov V.I. Interpolation orbits and optimal Sobolev's embeddings // Journal of Functional Analisys. — 2007. — V. 253. — P. 1–17.

[4] Kerman R., Pick L. Optimal Sobolev imbeddings // Forum Math. — 2006. — V. 18. — P. 535–570.

[5] Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory. Mathematical Reports. — V. 1, Part 2. — Chur: Harwood Acad. Pbl., 1984.

[6] Дмитриев В.И., Крейн С.Г., Овчинников В.И. Основы теории интерполяции линейных операторов // В сб. „Геометрия линейных пространств и теория операторов“. — Ярославль, 1977. — С. 31–74.

[7] Ovchinnikov V.I. Interpolation orbits in couples of L_p spaces // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1. — 2002. — V. 334. — P. 881–884.

[8] Овчинников В.И. Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега // Функциональный анализ и его приложения. — 2005. — Т. 38, в. 1. — С. 56–68.

[9] Кравишвили Е.Д. Метод средних с произвольным функциональным параметром // Труды математического факультета ВГУ. — 2002. — Т. 7. — С. 58–72.

[10] Lorentz G.G., Shimogaki T. Interpolation theorem for operators in function spaces // Journal of Functional Analisys. — 1968. — V. 2, no. 1. — P. 31–51.

[11] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М.: „Наука“, 1978. — 400 с.

[12] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: „Мир“, 1980. — 264 с.

[13] Берколайко М.З., Овчинников В.И. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Труды МИАН СССР. — 1983. — Т. 161. — С. 3–17.

Гришина Анна Михайловна, магистрант кафедры математического моделирования математического факультета ВГУ
E-mail: grischina.ancka@yandex.ru
Тел.: +79038572069

Grishina A.M., master student of the mathematical modeling chair at the Mathematical dept., VSU
E-mail: grischina.ancka@yandex.ru
Tel.: +79038572069

Овчинников Владимир Иванович, профессор кафедры математического моделирования математического факультета ВГУ
E-mail: vio@thebat.net
Тел.: +79515559951

Ovchinnikov V.I., professor of the mathematical modeling chair at the Mathematical dept., VSU
E-mail: vio@thebat.net
Tel.: +79515559951