УДК 517.988.6

ОБ УПЛОТНЯЮЩИХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СЮРЪЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Б. Д. Гельман, А. В. Завьялова

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 10.04.2013 г.

Аннотация: настоящая работа посвящена изучению многозначных уплотняющих возмущений линейных непрерывных сюръективных операторов. В ней доказываются теоремы о существовании решений включений вида $A(x) \in F(x)$, где A – непрерывный линейный сюръективный оператор, а F – уплотняющее многозначное возмущение A. Полученные теоремы применяются для доказательства существования локальных решений одного класса вырожденных включений в банаховом пространстве.

Ключевые слова: линейный сюръективный оператор, мера некомпактности, уплотняющее отображение, дифференциальное включение.

Abstract: this paper is devoted to investigation of multivalued condensing perturbations of linear continuous surjective operators. We prove existence of solutions of the inclusions in the form $A(x) \in F(x)$, where A is a surjective continuous linear operator and F is a condensing multivalued perturbation of A. The theorems obtained are applied to prove the existence of local solutions for a class of degenerate inclusions in a Banach space.

Keywords: closed linear operator, a measure noncompactness, condensing mapping, differential inclusion.

Хорошо известна теория уплотняющих отображений (как однозначных [1], так и многозначных [2]), которая находит многочисленные приложения в различных задачах современной математики.

В работах [3]–[6] изучались однозначные возмущения непрерывных отображений, уплотняющие относительно главной части. В этих работах рассматривалась гомотопическая классификация таких возмущений и строилась топологическая степень для новых классов векторных полей.

В работе [7] теория уплотняющих отображений была распространена на случай однозначных уплотняющих возмущений линейных непрерывных сюръективных операторов. В этом случае построение гомотопической классификации невозможно, однако удалось доказать некоторые теоремы о существовании решений операторных уравнений вида $A(x) = f(x)$, где A – непрерывный линейный сюръективный оператор, а f – уплотняющее возмущение A.

В настоящей статье результаты статьи [7] распространяются на случай многозначных уплотняющих возмущений линейных непрерывных сюръективных операторов. В ней доказываются теоремы о существовании решений включений вида $A(x) \in F(x)$, где A — непрерывный линейный сюръективный оператор, F — уплотняющее многозначное возмущение A.

* Это исследование поддержано РФФИ: грант N^0 11-01-00382-а

Полученные теоремы применяются для доказательства существования локальных решений одного класса вырожденных включений в банаховом пространстве. Некоторые классы вырожденных включений изучались ранее в работах [8], [9].

Пусть E, E_1 - банаховы пространства. Обозначим:
$K_v(E_1)$ - множество непустых выпуклых компактных подмножеств пространства E_1,
$C_v(E_1)$ - множество непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства E_1.

Пусть X подмножество в E. Если многозначное отображение $F : X \to E_1$ и имеет выпуклые компактные (выпуклые замкнутые) образы, то будем это записывать следующим образом $F : X \to K_v(E_1)$, $(F : X \to C_v(E_1))$. Если $Q \subset X$, то образом этого множества является множество $F(Q) = \bigcup\limits_{x \in Q} F(x)$. Основные сведения о многозначных отображениях содержатся в [10].

Пусть X – метрическое пространство, $C(X)$ – множество непустых замкнутых подмножеств в X, множества A, B – замкнутые подмножества в X.

Величину $\rho_*(A, B) = \sup\limits_{a \in A} \rho(a, B)$ называют *полуотклонением множества A от множества B.*

Рассмотрим функцию (метрику Хаусдорфа)

$$h(A, B) = max\{\rho_*(A, B); \rho_*(B, A)\}, \text{ где } h(A, B) \in \mathbb{R} \cup \infty.$$

Очевидно, что если $h(A, B) < \infty$, то

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset U_\varepsilon(B),\ B \subset U_\varepsilon(A)\},$$

где $U_\varepsilon(A)$, $U_\varepsilon(B)$ — ε-окрестности множеств A и B соответственно. Другие свойства функции $h(A, B)$ смотри, например, в [10].

Пусть $F : X \to C(X)$ многозначное отображение. Будем говорить, что отображение F является *липшицевым*, если существует такое число $c > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leqslant c\rho(x_1, x_2).$$

Если отображение F является липшицевым и число $c \in (0, 1)$, то многозначное отображение F называется *сжимающим.*

Пусть $Y \subseteq X$ - некоторое подмножество, $F : Y \to C(X)$ - многозначное отображение. Точка $x \in Y$ называется *неподвижной точкой многозначного отображения* F, если $x \in F(x)$.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор с областью определения $D(A)$.

Пусть $A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где $A^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid A(x) = y\}$, многозначное отображение, правое обратное к линейному сюрьективному оператору A.

Определение 1. *Число*

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} (\frac{\inf\{||x|| \mid x \in E_1,\ A(x) = y\}}{||y||}) < \infty$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления $||A^{-1}||$.

Пример 1. Пусть $C_{[a,b]}$ – пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве E. Пусть $A : D(A) \subset C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ – оператор дифференцирования, $D(A)$ – множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Очевидно, что A является замкнутым сюръективным оператором. В работе [11] показано, что $||A^{-1}|| = \frac{b-a}{2}$.

Если подпространство $Ker(A)$ не является дополняемым в пространстве E_1, то не существует линейного непрерывного оператора правого обратного к оператору A, однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *(i) Пусть y_0 – произвольная точка из пространства E_2, x_0 – произвольная точка из множества $A^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*
1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||x_0 - q(y)|| \leqslant k||y_0 - y||$ для любого $y \in E_2$.

(ii) Для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное отображение $\widetilde{q} : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:
1) $A(\widetilde{q}(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||\widetilde{q}(y)|| \leqslant k||y||$ для любого $y \in E_2$.
Доказательство этой леммы содержится, например, в [11]. Очевидно, что эти отображения q и $\widetilde{q}$ являются непрерывными сечениями многозначного отображения A^{-1}.

Пусть E - банахово пространство, $P(E)$ - множество всех непустых подмножеств в E. Следуя [1] и [2] дадим определение меры некомпактности.

Отображение $\psi : P(E) \to \Xi$, где Ξ – частично упорядоченное множество, называется мерой некомпактности в E, если $\psi(\overline{co}(\Omega)) = \psi(\Omega)$ для любого $\Omega \in P(E)$.

Мера некомпактности называется монотонной, если из $\Omega_0, \Omega_1 \in 2^E, \Omega_0 \subset \Omega_1$ следует $\psi(\Omega_0) \leqslant \psi(\Omega_1)$.
Мера некомпактности называется несингулярной, если $\psi(a \cup \Omega) = \psi(\Omega)$ для любых $a \in E, \Omega \in P(E)$.
Мера некомпактности называется алгебраически полуаддитивной, если $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leqslant \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$ для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$.
Мера некомпактности называется вещественной, если $\Xi = [0, \infty) \cup \infty$ и принимает конечные значения на ограниченных множествах.
Вещественная мера некомпактности называется правильной, если $\psi(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности множества Ω.

Распространенными примерами мер некомпактности, обладающими указанными выше свойствами, являются: мера некомпактности Хаусдорфа,

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon \mid \varepsilon > 0, \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon - \text{сеть }\},$$

и мера некомпактности Куратовского,

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d \mid \ d > 0,\ \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i,\ diam(\Omega_i) < d,\ n \in N\}.$$

Пусть X – ограниченное подмножество в E.

Определение 2. *Полунепрерывное сверху многозначное отображение $F : X \to K(E)$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности ψ (или ψ-уплотняющим), если $\psi(F(\Omega)) \ngeqslant \psi(\Omega)$, для любого множества $\Omega \subset X$, не являющегося относительно компактным.*

Теорема 1. *Пусть $U \subset E$ - ограниченное открытое выпуклое множество, $F : \overline{U} \to K_v(E)$ многозначное ψ-уплотняющее отображение и $F(x) \cap \overline{U} \neq \varnothing$ для всех $x \in \partial U$. Тогда многозначное отображение $F(x)$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 1.20.70 статьи [12]

2. МЕРА НЕКОМПАКТНОСТИ ИНДУЦИРОВАННАЯ НЕПРЕРЫВНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ И МНОГОЗНАЧНЫЕ УПЛОТНЯЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Приведем, следуя [7] определение меры некомпактности множества, индуцированной линейным непрерывным оператором.

Пусть E, E_0 - банаховы пространства, $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Рассмотрим отображение $\psi_A : P(E) \to \mathbb{R} \cup \infty$, определенное следующим образом:

$$\psi_A(\Omega) = \psi(A(\Omega)).$$

В работе [7] были доказаны следующие свойства отображения $\psi_A(\Omega)$.

1. *Это отображение является монотонным, т.е. если $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$ и $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\psi_A(\Omega_1) \leqslant \psi_A(\Omega_2)$*

2. *Это отображение инвариантно относительно взятия выпуклой оболочки, т.е. $\psi_A(\Omega) = \psi_A(co(\Omega))$*

3. $\psi_A(\overline{\Omega}) = \psi_A(\Omega)$ *для любого* $\Omega \in P(E)$.

4. $\psi_A(a \cup \Omega) = \psi_A(\Omega)$ *для любых* $a \in E$, $\Omega \in P(E)$.

5. *Отображение ψ_A является алгебраически полуаддитивным, т.е. $\psi_A(\Omega_1 + \Omega_2) \leqslant \psi_A(\Omega_1) + \psi_A(\Omega_2)$ для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$.*

6. *Если оператор A является сюръективным, то $\psi_A(\Omega) = 0$, тогда и только тогда, когда существует такой компакт $K \subset E$, что $\Omega \subset K + Ker(A)$.*

Таким образом отображение ψ_A является монотонной, несингулярной, алгебраически полуаддитивной мерой некомпактности, однако эта мера некомпактности не является правильной. Эта мера некомпактности ψ_A называется *мерой некомпатности индуцированной оператором A.*

Пусть $D(F)$ ограниченное подмножество в E, $A : E \to E_0$ – линейный непрерывный сюръективный оператор, $F : D(F) \to K_v(E_0)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение.

Определение 3. *Отображение F называется (A, ψ)-уплотняющим, если для любого множества $Q \subset D(F)$ из неравенства $\psi(F(Q)) \geqslant \psi_A(Q)$ вытекает равенство $\psi_A(Q) = 0$.*

Пусть отображение $F : D(F) \subset E \to K_v(E_0)$ является (A, ψ)-уплотняющим, $q : E_0 \to E$ - непрерывное отображение, правое обратное к отображению A. Пусть множество $Y = q^{-1}(A(D(F))) \cap D(F)$ непусто, $X = A(Y)$. Рассмотрим многозначное отображение $G : X \to K_v(E_0)$, $G(x) = F(q(x))$.

Предложение 1. *Если F является (A, ψ) - уплотняющим отображением, то G - уплотняющее отображение.*

Доказательство. Полунепрерывность сверху отображения G вытекает из полунепрерывности сверху отображения F и непрерывности q. Проверим уплотняймость отображения G.

Пусть множество $\Omega \subset X$ и $\psi(G(\Omega)) \geqslant \psi(\Omega)$. Тогда

$$\psi(G(\Omega)) = \psi(F(\Omega_1)) \geqslant \psi(\Omega),$$

где $\Omega_1 = q(\Omega)$. Так как q является правым обратным к отображению A, то

$$\psi(G(\Omega)) = \psi(F(\Omega_1)) \geqslant \psi(\Omega) = \psi(A(\Omega_1)) = \psi_A(\Omega_1),$$

т.е. $\psi(F(\Omega_1)) \geqslant \psi_A(\Omega_1)$.

Так как F является (A,ψ)-уплотняющим отображением, то $\psi_A(\Omega_1) = 0$. Тогда

$$\psi(\Omega) = \psi_A(\Omega_1) = 0.$$

Следовательно, отображение G является уплотняющим.

Рассмотрим некоторые примеры (A,ψ)-уплотняющих отображений.

Пусть E, E_0, E_1 – банаховы пространства, $A : E \to E_0$ – непрерывный сюрьективный линейный оператор, $B : E \to E_1$ – линейный оператор.

Определение 4. *Будем говорить, что оператор B подчинен оператору A, если для любого $x \in E$ справедливо равенство $||A(x)|| \geqslant ||B(x)||$.*

Очевидно, что если оператор B подчинен оператору A, то он также является непрерывным.

Пример 2. Пусть $A : E \to E_0$ - непрерывный сюрьективный линейный оператор, оператор $B : E \to E_1$ подчинен оператору A. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Куратовского α. Пусть множество X является ограниченным подмножеством в E. Предположим, что отображение $f_1 : X \subset E \to E_0$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию:
существует такое число $k \in (0,1)$, что для любых точек $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$||f_1(x_1) - f_1(x_2))|| \leqslant k||B(x_1) - B(x_2)||, \tag{1}$$

т.е. f_1 является B-сжимающим отображением.

Пусть $F_2 : X \to K_v(E_0)$ – вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим отображение $F = f_1 + F_2$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Куратовского α.

Предложение 2. *При сделанных предположениях многозначное отображение F является (A,α)-уплотняющим отображением.*

Доказательство. Пусть множество $Q \subset X$ и

$$\alpha(F(Q)) \geqslant \alpha_A(Q). \tag{2}$$

Пусть ε – произвольное число большее $\alpha_A(Q)$. Тогда существует конечное число множеств $\{N_i\}_{i=1}^n$, $N_i \subset A(Q)$, таких, что $\bigcup\limits_{i=1}^n N_i = A(Q)$ и $diam(N_i) < \varepsilon$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $Q_i = A^{-1}(N_i) \bigcap Q$. Обозначим $M_i = f_1(Q_i)$. Вычислим диаметр множества M_i.

$$diam(M_i) = \sup_{u,v \in M_i} ||u - v|| = \sup_{x,y \in Q_i} ||f_1(x) - f_1(y)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x,y \in Q_i} k||B(x) - B(y)|| \leqslant \sup_{x,y \in Q_i} k||A(x) - A(y)|| \leqslant$$
$$\leqslant k \sup_{a,b \in N_i} ||a - b|| = kdiam(N_i) < k\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > \alpha_A(Q)$ существует конечное число множеств $M_i, i - 1, 2, \ldots n$, таких, что $\bigcup\limits_{i=1}^n M_i = f_1(Q)$ и $diam(M_i) < k\varepsilon$.

Следовательно,

$$k\alpha_A(Q) \geqslant \alpha(f_1(Q)). \tag{3}$$

Так как множества X и $A(X)$ ограничены, а отображение F_2 является вполне непрерывным, то $\alpha(F_2(Q)) = 0$. Так как $F(Q) \subset f_1(Q) + F_2((Q)$, то

$$\alpha(f_1(Q)) = \alpha(f_1(Q)) + \alpha(F_2(Q)) \geqslant \alpha(F(Q)) \geqslant \alpha(A(Q)). \tag{4}$$

Сравнивая неравенства (3) и (4) получаем, что $\alpha(A(Q)) = 0$ и условие из определения 4 доказано.

Пример 3. Пусть, как и раньше, оператор $B : E \to E_1$ подчинен оператору A, множество X – ограниченное подмножество в E. Пусть $G : X \times E_1 \to K_v(E_0)$ –многозначное полунепрерывное сверху отображение, удовлетворяющее следующим условиям:
(1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in X$ и любых $y_1, y_2 \in E_1$ справедливо неравенство

$$||h(G(x, y_1), G(x, y_2))|| \leqslant k||y_1 - y_2||;$$

(2) для любого $y \in E_1$ многозначное отображение $G(\cdot, y) : X \to K_v(E_0)$ является вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $F : X \to K_v(E_0)$, $F(x) = G(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ.

Предложение 3. *При сделанных предположениях многозначное отображение F является (A, χ)-уплотняющим отображением.*

Доказательство. Докажем, что для любого множества $Q \subset X$ такого, что $\chi(A(Q)) \leqslant \infty$, справедливо неравенство $\chi(F(Q)) \leqslant k\chi(A(Q))$, откуда и следует условие из определения 4.

Пусть $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ - конечная $(\chi(A(Q))+\varepsilon)$-сеть множества $A(Q)$. Так как $S \subset A(Q)$, то существуют точки $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset Q$ такие, что $s_i = A(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $B(x_i) = z_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда точки $\{z_i\}$ также образуют $(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$-сеть в множестве $B(Q)$. Действительно, если $z \in B(Q)$, то существует точка $x \in Q$ такая, что $B(x) = z$. Тогда для некоторого i_0 имеем

$$||z - z_{i_0}|| = ||B(x) - B(x_{i_0})|| \leqslant ||A(x) - A(x_{i_0})|| \leqslant \chi(A(Q)) + \varepsilon.$$

Пусть $S_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Рассмотрим множество $G(Q, z_i)$, где $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим $L = G(Q \times S_1) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G(Q, z_i)$. Так как отображение G является вполне непрерывным по первому аргументу, то это множество является относительно компактным. Покажем, что L является вполне непрерывной $k(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$-сетью в множестве $F(Q)$.

Пусть z - произвольная точка из $F(Q)$, тогда существует такая точка $x \in Q$, что $z \in G(x, B(x))$. Пусть точка $z_{i_0} \in S_1$ такая, что $z_{i_0} = B(x_{i_0})$ и

$$||A(x) - A(x_{i_0})|| < \chi(A(Q)) + \varepsilon.$$

Тогда точка $G(x, z_i) \in G(Q, z_i) \subset L$. Оценим

$$\rho(z; G(x, z_i)) \leqslant h(G(x, B(x)), G(x, B(x_{i_0}))) \leqslant$$

$$\leqslant k||B(x) - B(x_i)|| \leqslant k||A(x) - A(x_i)|| < k(\chi(A(Q)) + \varepsilon).$$

Следовательно, $\chi(F(Q)) < k(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда $\chi(F(Q)) \leqslant k(\chi(A(x)))$ и условие из определения 4 доказано.

3. О ВКЛЮЧЕНИЯХ С (A, ψ)-УПЛОТНЯЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Пусть E, E_0 — банаховы пространства. Пусть $A : E \to E_0$ — ограниченный линейный сюръктивный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ. Пусть $x_0 \in E$ - некоторая точка, $B_R[x_0]$- замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to K_v(E_0)$ – многозначное полунепрерывное сверху (A,ψ)-уплотняющее отображение.

Рассмотрим включение

$$A(x) \in F(x), \tag{5}$$

$N(A,F)$ - множество решений этого уравнения.

Теорема 2. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leqslant \frac{R}{k},$$

то $N(A,F) \neq \varnothing$.

Доказательство. Обозначим $y_0 = A(x_0)$. Пусть $q : E_0 \to E$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям: $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_0$; $\|x_0 - q(y)\| \leqslant k\|A(x_0) - y\|$ для любого $y \in E_0$. Такое отображение всегда существует в силу леммы 1. Очевидно, что для любой точки $y \in B_{\frac{R}{k}}[y_0] \subset E_0$ точка $q(y) \in B_R[x_0]$, так как

$$||x_0 - q(y)|| \leqslant k||y_0 - y|| \leqslant k\frac{R}{k} = R.$$

Рассмотрим отображение $G = F \circ q : B_{\frac{R}{k}}[y_0] \to K_v(E_0)$. Это уплотняющее отображение в силу предложения 1.

Проверим, что для любой точки $y \in B_{\frac{R}{k}}[y_0]$ пересечение

$$G(y) \cap B_{\frac{R}{k}}[y_0] \neq \varnothing.$$

Это вытекает из того, что

$$\min_{z \in G(y)} ||y_0 - z|| = \min_{z \in F(q(y))} ||y_0 - z|| \leqslant \frac{R}{k},$$

так как $q(y) \in B_R[x_0]$. Тогда в силу теоремы 1 это отображение имеет неподвижную точку x_*, которая определяет решение включения (5). Действительно, если $x_* \in G(x_*) = F(q(x_*))$, то $A(q(x_*)) \in F(q(x_*))$. Следовательно точка $y_* = q(x_*)$ является решением включения (5). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть многозначное отображение $F : E \to K_v(E_0)$ и удовлетворяет следующим условиям:*
(i) существуют такие $c > 0$ и $d > 0$ что для любой точки $x \in E$ справедливо неравенство $\min_{u \in F(x)} ||u|| \leqslant c||x|| + d$;
(ii) $c||A^{-1}|| < 1$.
Тогда включение (5) имеет решение.

Доказательство. Для доказательства найдем шар $B_R[0]$ и число $k > ||A^{-1}||$ такие, чтобы для любой точки $x \in B_R[0]$ было выполнено неравенство

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leqslant \frac{R}{k}.$$

Пусть k произвольное число удовлетворяющее неравенству

$$||A^{-1}|| < k < \frac{1}{c}.$$

Очевидно, что $c\,k < 1$. Рассмотрим число R удовлетворяющее неравенству

$$\frac{d\,k}{1 - c\,k} \leqslant R.$$

Проверим,что для любой точки $x \in B_R[0]$ было выполнено неравенство

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leqslant \frac{R}{k}.$$

Действительно

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leqslant c||x|| + d \leqslant cR + d \leqslant cR + \frac{R(1-ck)}{k} = \frac{R}{k}.$$

Таким образом многозначное отображение F на шаре $B_R[0]$ удовлетворяет условиям теоремы 2, что и доказывает утверждение.

4. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть E_1, E_2, E_3 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - непрерывный линейный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ - непрерывный линейный оператор, подчиненный оператору A. Пусть точка $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0] \subset E_1$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x_0.

Пусть многозначное отображение $F_1 : [0,T] \times B_R[x_0] \to K_v(E_2)$ является вполне непрерывным, а многозначное отображение $F_2 : [0,T] \times E_3 \to K_v(E_2)$ удовлетворяет следующим условиям:
1) F_2 - непрерывно по совокупности переменных;
2) существует такое α, что для любого $t \in [0,T]$ и для любых $y_1, y_2 \in E_1$ справедливо неравенство:

$$h(F(t,y_1), F(t,y_2)) \leqslant \alpha||y_1 - y_2||.$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$(Ax(t))' \in F_1(t, x(t)) + F_2(t, B(x(t))), \tag{6}$$

$$A(x(0)) = Ax_0. \tag{7}$$

Решением задачи (6), (7) на промежутке $[0,l]$, $0 < l \leqslant T$, будем называть непрерывную функцию x_*, определенную на $[0,l]$ такую, что

$$(Ax_*(t))' \in F_1(t, x_*(t)) + F_2(t, Bx_*(t)),$$

$$A(x_*(0)) = Ax_0.$$

Обозначим $\sum(x_0, [0,l])$ - множество решений задачи (6), (7) на промежутке $[0,l]$.

Нам понадобятся следующие леммы.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $A : E_1 \to E_2$ – линейный непрерывный сюрьективный оператор. Обозначим $C_{([0,l],E_1)}$ – пространство непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,l]$ со значениями в E_1. Аналогичный смысл имеет обозначение $C_{([0,l],E_2)}$. Тогда естественно определяется отображение $\widehat{A} : C_{([0,l],E_1)} \to C_{([0,l],E_2)}$ по следующему правилу:

$$\widehat{A}(x)(t) = A(x(t)).$$

Лемма 2. *Если отображение A непрерывно и сюрьективно, то:*
1) отображение $\widehat{A}$ непрерывно и сюрьективно;
2) $||\widehat{A}^{-1}|| = ||A^{-1}||$.

Для замкнутого сюръективного оператора доказательство этой леммы содержится в [13].

Дадим операторную трактовку задачи (6), (7).

Пусть число $l \in (0, T]$, $u \in C_{([0,l],KerA)}$. Нетрудно заметить, что задача (6), (7) эквивалентна интегральному включению

$$A(x)(t) \in \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds + \int\limits_0^t u(s)ds + A(x_0), \tag{8}$$

где

$$\mathcal{P}_{F_1}(x) = \{v \in L^1_{([0,l],E_2)} \,|\, v(s) \in F_1(s, x(s)) \text{ для п. в. } s \in [0,l]\},$$

а отображение

$$\mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x)) = \{w \in L^1_{([0,l],E_2)}|\ w(s) \in F_2(s, B(x(s))) \text{ для п. в. } s \in [0,l]\}.$$

Рассмотрим многозначное отображение $V : C_{([0,l],E_1)} \to K_v(C_{([0,h],E_2)})$,

$$V(x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds + A(x_0)$$

Очевидно, что любое решение операторного включения

$$\widehat{A}(x) \in V(x). \tag{9}$$

является решением задачи (6), (7) Изучим свойства отображения V.

Лемма 3. *Если отображение F_1 вполне непрерывно, то многозначное отображение $\Phi_1 : C_{([0,l],E_1)} \to K_v(C_{([0,l],E_2)})$, где*

$$\Phi_1(x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds,$$

является вполне непрерывным многозначным отображением.

Доказательство этого факта содержится в [10].

Лемма 4. *Пусть отображение F_2 удовлетворяет условиям (1) и (2), тогда многозначное отображение $\Phi_2 : C_{([0,l],E_3)} \to K_v(C_{([0,l],E_2)})$,*

$$\Phi_2(z)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(z)(s)ds,$$

имеет компактные выпуклые образы и является липшицевым.

Доказательство. Компактность и выпуклость множества $\Phi_2(z)$ вытекает из компактности и выпуклости множества $\int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(z)(s)ds$ (см. [10]). Проверим липшицевость отображения Φ_2.

Пусть z_1 и z_2 – произвольные функции из $C_{([0,l],E_3)}$, и $z_1 \neq z_2$. По определению метрики Хаусдорфа имеем

$$h(\Phi_2(z_1), \Phi_2(z_2)) = inf\{\varepsilon : \Phi_2(z_1) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_2)),\ \Phi_2(z_2) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_1))\},$$

где $U_\varepsilon(A)$ – $\varepsilon-$окрестность множества A.

Пусть $\alpha \in \Phi_2(z_1)$, тогда $\alpha(t) = \int\limits_0^t w(s)ds,$ где $w(s) \in F_2(s, z_1(s))$ при почти всех $s \in [0, l]$.

В силу липшицевости по второму переменному многозначного отображения F_2 имеет место следующее неравенство

$$\rho(w(s), F_2(s, z_2(s))) \leqslant h(F_2(s, z_1(s)), F_2(s, z_2(s)))\alpha||z_1(s) - z_2(s)|| \leqslant \alpha||z_1 - z_2||,$$

для почти всех $s \in [0, l]$. То есть для почти всех $s \in [0, l]$ справедливо включение:

$$w(s) \in U_\beta(F_2(s, z_2(s)))$$

для любого $\beta > \alpha||z_1 - z_2||$. Будем считать, что

$$(\alpha + 1)||z_1 - z_2|| > \beta > \alpha||z_1 - z_2||.$$

Рассмотрим непрерывное многозначное отображение

$$Q_2(s) = F_2(s, z_2(s)), \;\; s \in [0, l],$$

это отображение ограничено. Отображение $w(s)$ является измеримым сечением непрерывного многозначного отображения

$$Q_1(s) = F_2(s, z_1(s)), \;\; s \in [0, l],$$

следовательно $w(s)$ ограничена при почти всех $s \in [0, l]$. Тогда существует число $k > 0$ такое, что $\max\limits_{q \in Q(s)} ||q - w(s)|| \leqslant k$ для почти всех $s \in [0, l]$.

В силу теоремы Скорца-Драгони для любого $\delta > 0$ существует компакт $\triangle \subset [0, l]$ такой, что сужение w на $\triangle$ является непрерывной функцией, $\mu([0, l] \backslash \triangle) < \delta$, и $w(s) \in U_\beta(F_2(s, z_2(s)))$ для любой точки $s \in \triangle$.

Так как $F_2(s, z_2(s)) \cap U_\beta(w(s)) \neq \varnothing$ для любого $s \in \triangle$, то существует непрерывная функция $P_\triangle : \triangle \to E_2$ такая, что

$$P_\triangle(s) \in F_2(s, z_2(s)) \cap U_\beta(w(s)),$$

(см., например, [14]).

Пусть $P : [0, l] \to E_2$ измеримая функция, определенная условием

$$P(s) = \begin{cases} P_\triangle(s), & \text{если } s \in \triangle, \\ u(s), & \text{если } s \in [0, l] \backslash \triangle, \end{cases}$$

где $u(s)$ – произвольное измеримое сечение многозначного отображения $F_2(s, z_2(s))$ на множестве $[0, l] \backslash \triangle$. Тогда

$$\int\limits_0^l |P(s) - w(s)|ds = \int\limits_\triangle |P_\triangle(s) - w(s)|ds + \int\limits_{[0,l]\backslash\triangle} |u(s) - w(s)|ds < \beta l + k\delta.$$

Если $0 < \delta < \frac{l||z_1 - z_2||}{k}$, то

$$\int\limits_0^l |P(s) - w(s)|ds < l\,(\alpha + 1)||z_1 - z_2|| + l||z_1 - z_2|| = l(\alpha + 2)||z_1 - z_2||.$$

Тогда, если $v_\beta(t) = \int\limits_0^t P(s)ds$, то

$$||z - v_\beta|| = \max_{0\leqslant t\leqslant l} ||\int\limits_0^t P(s)ds - \int\limits_0^t w(s)ds|| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant l} \int\limits_0^t ||P(s) - w(s)||ds \leqslant l(\alpha+2)||z_1 - z_2||.$$

Если выполнено неравенство $l\,(\alpha + 2)||z_1 - z_2|| < \varepsilon$, то $||z - v_\beta|| < \varepsilon$. Тогда $\Phi_2(z_1) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_2))$.

В силу равноправности функций z_1 и z_2 аналогично можно доказать, что $\Phi_2(z_2) \subset U_\varepsilon(\Phi_2(z_1))$.

Тогда $h(\Phi_2(z_1), \Phi_2(z_2)) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > l(\alpha+2)||z_1 - z_2||$. Следовательно,

$$h(\Phi_2(z_1), \Phi_2(z_2)) \leqslant l(\alpha+2)||z_1 - z_2||.$$

Это и доказывает липшицевость отображения Φ_2. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию $\widehat{x}_0 \in C_{([0,l],E_1)}$, где $\widehat{x}_0(t) = x_0$ при всех $t \in [0,l]$. Пусть $D_R[\widehat{x}_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в $\widehat{x}_0$ в пространстве $C_{([0,l],E_1)}$.

Лемма 5. *Если число $l > 0$ достаточно мало, то многозначное отображение $V : D_R[\widehat{x}_0] \to K_v(C_{([0,l],E_2)})$,*

$$V(x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds + A(x_0),\ \ 0 \leqslant t \leqslant l,$$

является $(\widehat{A}, \chi)$ – уплотняющим, где χ – мера некомпактности Хаусдорфа.

Доказательство. Для доказательства этой леммы воспользуемся предложением 3. Рассмотрим многозначное отображение

$$G : D_R[\widehat{x}_0] \times C_{([0,l],E_3)} \to K_v(C_{([0,l],E_2)}),$$

где

$$G(x,y)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + A(x_0) + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(y)(s)ds.$$

Очевидно, что $V(x) = G(x, \widehat{B}(x))$, где оператор $\widehat{B}$ подчинен оператору $\widehat{A}$.

Если зафиксировать $y \in C_{([0,l],E_3)}$, то $G(\cdot, y) : D_R[\widehat{x}_0] \subset K_v(C_{([0,l],E_2)})$ является вполне непрерывным отображением (см. лемму 3).

Зафиксируем $x \in D_R[\widehat{x}_0]$, тогда $G(x,\cdot) : C_{([0,l],E_3)} \subset K_v(C_{([0,l],E_2)})$ является липшицевым отображением и константа Липшица равна $l(\alpha+2)$ (см. лемму 4). Если $0 < l < \frac{1}{\alpha+2}$, то отображение $G(x,\cdot)$ является сжимающим.

Таким образом выполнены все условия предложения 3, то есть при $l < \frac{1}{\alpha+2}$ отображение V является $(\widehat{A}, \chi)$ – уплотняющим. Лемма доказана.

Теорема 3. *При сделанных предположениях найдется такое число $l_0 > 0$, что $\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{x}_0 \in C_{([0,l],E_1)}$, где $\widehat{x}_0(t) = x_0$ при всех $t \in [0,l]$, $D_R[\widehat{x}_0] \subset C_{([0,l],E_1)}$ – замкнутый шар радиуса R с центром в $\widehat{x}_0$, $k > ||A^{-1}||$ произвольное число. Пусть точка $x \in D_R[\widehat{x}_0]$. Оценим

$$\rho(\widehat{A}(\widehat{x}_0)(t), \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds + A(x_0)) =$$

$$\rho(A(x_0), \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds + A(x_0)) =$$

$$= \rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds) \leqslant \rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds) + \rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds). \quad (12)$$

Оценим первое слагаемое $\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds)$ выражения (12).

Так как F_1 является вполне непрерывным многозначным отображением, то существует такое число N_1, что $||u|| \leqslant N_1$ для любого $u \in F_1(t,s)$, где $t \in [0,l], s \in B_R[x_0]$. Тогда $\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds) \leqslant \int\limits_0^l N_1 ds = N_1 l$. Пусть $0 < l \leqslant \frac{R}{2kN_1}$, тогда $\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds) \leqslant \frac{R}{2k}$.

Оценим второе слагаемое $\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds)$ выражения (12).

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \rho(0, F_2(t, B(x_0)))$. В силу свойств многозначного отображения F_2 функция φ является ограниченной на отрезке $[0,l]$. Следовательно существует число $N_2 > 0$ такое, что $N_2 \geqslant \varphi(t)$ для любого $t \in [0,l]$. Пусть $\widehat{B}(x)(t) = B(x(t))$.

Оценим

$$\rho(0, F_2(t, \widehat{B}(x)(t)) \leqslant \rho(0, F_2(t, B(x_0))) + h(F_2(t, B(x(t))); F_2(t, B(x_0))) \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(t) + \alpha||B||\,||x(t) - x_0|| \leqslant N_2 + \alpha||B|| \max_{0 \leqslant t \leqslant l} ||x(t) - x_0|| \leqslant N_2 + \alpha||B||(R + ||x_0||) = N_3.$$

Тогда

$$\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(s, B(x)(s))ds) \leqslant \int\limits_0^t \rho(0, \mathcal{P}_{F_2}(B(x))(s))ds \leqslant N_3\, l.$$

Пусть $0 < l \leqslant \frac{R}{2kN_3}$, тогда $\rho(0, \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds) \leqslant \frac{R}{2k}$.

Таким образом, если $l_0 \leqslant \min\{\frac{R}{2kN_1}, \frac{R}{2kN_3}\}$, то для любой точки $x \in D_R[\widehat{x}_0]$ справедливо неравенство:

$$\rho(\widehat{A}(\widehat{x}_0),\ V(x)) = \rho(\widehat{A}(\widehat{x}_0), \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int\limits_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\widehat{B}(x))(s)ds + A(x_0)) \leqslant \frac{R}{k}. \quad (13)$$

Так как V является $(\widehat{A}, \chi)$-уплотняющим отображением и справедливо неравенство (13), то выполнены все условия теоремы 2, т.е. включение (11) имеет решение. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ахмеров Р.Р. Меры некомпактности и уплотняющие отображения / Р.Р. Ахмеров и др. — Новосибирск: Наука. — 1986.

[2] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001.

[3] Hetzer G. Some remarks on operators and the coincidence degri for Fredholm equationwith noncompact nonlinearperturbation/ G. Hetzer // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1. — 1975. — V. 89, N. 1. — P. 497–508.

[4] Борисович Ю.Г. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. I / Ю.Г. Борисович // Геом. и теория особенностей в нелинейных уравнениях. — Воронеж, ВорГУ. — 1987. — С. 24–46.

[5] Борисович Ю.Г. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. II / Ю.Г. Борисович // Глобал. анал. и нелинейн. уравнения. — Воронеж, ВорГУ. — 1988. — С. 22–43.

[6] Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В.Т. Дмитриенко, В.Г. Звягин // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 801–812.

[7] Гельман Б.Д., Калабухова С.Н. Об уплотняющих возмущениях линейных сюрьективных операторов / Б.Д. Гельман, С.Н. Калабухова // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: математика, физика. — 2011. — № 1. — С. 120–127.

[8] Obukhovskii V., Zecca P. On boundari value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces // Abstr. Appl. Anal., 2003, N 13, P. 769–784.

[9] Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces // Math. Differ. Incl. Control Optim., 2003, N 23, P. 53–74.

[10] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М: КомКнига (URSS). — 2005.

[11] Гельман Б.Д. Многозначные сжимающие отображения и их приложения / Б.Д. Гельман // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: математика, физика. — 2009. — № 1. — С. 74–86.

[12] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 34, № 1. — С. 59–126.

[13] Гельман Б.Д. Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных включений/ Б.Д. Гельман // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: математика, физика. — 2007. — № 2. — С. 86–91.

[14] Гельман Б.Д. Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки // Математические заметки. — 2005. — 78 (2). — С. 212–222.

Гельман Б. Д., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и геометрии Воронежского государственного университета
E-mail: gelman@math.vsu.ru
Тел.: 2235-692

Gel'man B. D., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theory of Functions and Geometry Voronezh State University
E-mail: gelman@math.vsu.ru
Tel.: 2235-692

Завьялова А. В., аспирант кафедры высшей математики Воронежского государственного педагогического университета
E-mail: antonina.zavyalova@gmail.com
Тел.: 8-920-440-42-00

Zavyalova A. V., aspirant of Department of Higher Mathematics Voronezh State Pedagogical University
E-mail: antonina.zavyalova@gmail.com
Tel.: 8-920-440-42-00