УДК 533.1

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО РАЗМЕРА МИКРОСТРУКТУРЫ И ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ НА ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТОНКИХ СЛОЯХ

Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.06.2013 г.

Аннотация: в работе рассмотрена математическая модель поведения сплошной среды с учетом микроструктуры и времени релаксации в переходном слое.
Ключевые слова: переходный слой, микроструктура, время релаксации.

Abstract: this paper considers mathematical model of continuum's behavior, including typical size of microstructure and relaxation time in transition layer.
Keywords: transition layer, microstructure, relaxation time.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения материалов в переходных слоях, характеризующихся скачком физических величин и их производных, является достаточно трудной задачей как при аналитическом, так и при численном решении. Практические задачи, связанные с данными процессами, имеют широкое распространение в различных производственных процессах. В связи с этим необходимо совершенствовать методы анализа переходных процессов для существующих моделей сред, а также расширять представление о физической природе данных явлений путем введения дополнительных характеристик изучаемых объектов [1,2].

Описание реальных материалов всегда строится на определенных предположениях и допущениях об их физических свойствах. При этом большинство величин с большим порядком малости не учитываются в итоговых соотношениях в виду их незначительности. Однако не во всех задачах ими можно пренебречь. Переходные процессы в тонких слоях отличаются малой по сравнению с размерам всей задачи толщиной переходного слоя, большими градиентами скоростей, плотности и напряжений материала. Таким образом, характерный линейный размер h и характерное время релаксации τ микроструктуры являются значимыми для подобных задач, и, следовательно, должны учитываться в итоговых соотношениях механики сплошных сред.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МСС ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

В качестве представительного объема микроструктуры выберем куб с гранью $2h$ (Рис. 1).

Используя разложение в ряд Тейлора, приведем основные силовые и кинематические характеристики для центра масс представительного объема [3]:

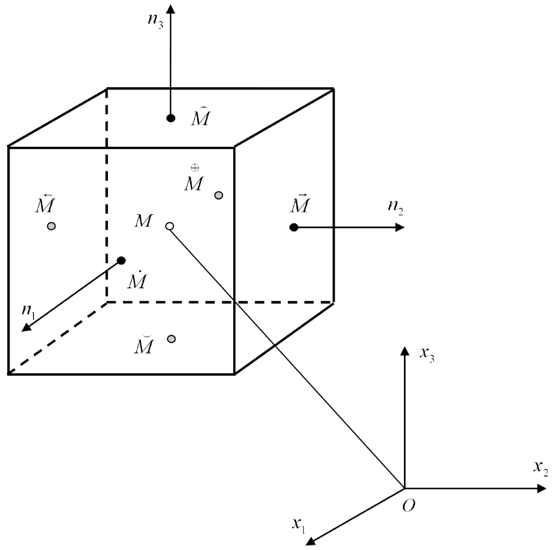


Рис. 1. *Характерный представительный объем*

— объемная деформация:

$$\overline{e}|_M \approx e|_M + \frac{1}{6}\Delta\, e|_M \cdot h^2 \tag{1}$$

— главный вектор:

$$Vec_i \approx \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} + \frac{1}{6}\Delta\sigma_{ij} \cdot h^2\right) \cdot 8h^3 \tag{2}$$

— главный момент:

$$Mom_i \approx \frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_{ij} + \frac{1}{6}\Delta m_{ij} \cdot h^2\right) \cdot 8h^3 +$$

$$+\varepsilon_{ijk}\left(\sigma_{jk}|_M + \frac{1}{2}\,\Delta\sigma_{jk}|_M \cdot h^2\right) \cdot 4h^3 \tag{3}$$

Полученные уточненные характеристики (1)–(3) используются для подстановки в основные соотношения механики сплошных сред.

Учет характерного времени релаксации микроструктуры приводит к уточненным соотношениям для полных производных для скоростей:

$$\dot{v}_i = \frac{dv_i}{dt} + \tau \cdot \frac{d^2 v_i}{dt^2} \tag{4}$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{d\omega_i}{dt} + \tau \cdot \frac{d^2 \omega_i}{dt^2} \tag{5}$$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} + \tau \cdot \frac{d^2 \rho}{dt^2} \tag{6}$$

Уточненный тензор скоростей деформации равен:

$$e^*_{ij} = e_{ij} + \frac{\tau}{2}\nabla_i v^p \nabla_j v_p \tag{7}$$

В результате подстановки уточненных характеристик получим основные соотношения механики сплошных сред:

— модифицированное уравнение сохранения массы:

$$\frac{d\rho}{dt} + \tau\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\rho\left(e^* + \frac{1}{6}\rho \cdot h^2 \cdot \Delta e^*\right) \tag{8}$$

— модифицированные уравнения сохранения импульса:

$$\rho \cdot \left(\frac{dv_i}{dt} + \tau\frac{d^2 v_i}{dt^2}\right) = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\sigma_{ij} + F_i \tag{9}$$

— модифицированные уравнения момента сохранения импульса:

$$J_{ij} \cdot \left(\frac{d\omega_j}{dt} + \tau\frac{d^2\omega_j}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{iks}\sigma_{ks} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} + \frac{h^2}{4}\Delta\left(\varepsilon_{iks}\sigma_{ks}\right) + \frac{h^2}{6}\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta m_{ij} + M_i \tag{10}$$

Таким образом, получена система 7 уравнений в частных производных, содержащая 25 неизвестных (ρ — плотность, v — вектор скорости, σ_{ij} — тензор напряжений, m_{ij} — тензор моментных напряжений, $\omega_j = \dot{\varphi}_j$ — абсолютная угловая скорость представительного объема), является незамкнутой, однако она позволяет выявлять малых h и τ на уточнение законов сохранения (8)–(10) в тонких переходных слоях. Проведем исследование полученной системы в тонком переходном слое.

УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕХОДНОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОГО РАЗМЕРА МИКРОСТРУКТУРЫ И ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ

Рассмотрим движение сплошной среды вблизи гладкой поверхности S, характеризуемой нормалью n и поверхностными криволинейными координатами (y_1, y_2).

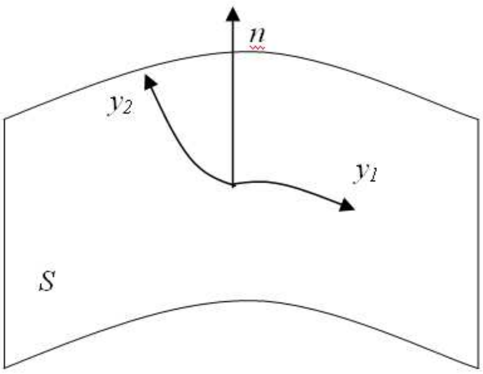


Рис. 2. *Элемент выпуклой поверхности с криволинейными координатами*

Первоначальная система уравнений (8)–(10) была приведена к безразмерному виду, что привело к появлению безразмерных комплексов: $Eu = \frac{P_0}{\widetilde{V}_0^2 \cdot \rho_0}$, $St = \frac{\tau}{T_0}$, $Kn = \frac{h}{L}$, где $P_0, \widetilde{V}_0^2, \rho_0, T_0, L$ — характерные значения исследуемых физических величин. Для учета влияния малого параметра микроструктуры h задачи произведем растяжение нормальной координаты n, приняв $\eta = {}^{n}/{}_{Kn}$. Учитывая эту замену представим систему (8)–(10) в локальной системе координат $(n, y1, y2)$, совершив предельный переход $h \to 0$.

В результате получена система уравнений, содержащая малые параметры Kn и St в нулевой и первой степенях:

$$\begin{aligned}
&Kn \cdot \left(V_n \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} + \bar{\rho} \cdot \frac{\partial V_n}{\partial \eta} + \frac{1}{6}\bar{\rho} \cdot \frac{\partial^3 V_n}{\partial \eta^3}\right) + St \cdot \left(V_n \frac{\partial V_n}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} + V_n V_n \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \eta^2}\right) = 0,\\
&Kn \cdot V_n \frac{\partial V_i}{\partial \eta} - Eu \cdot Kn \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \Theta_{in}}{\partial \eta} + \frac{1}{6\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial^3 \Theta_{in}}{\partial \eta^3}\right) + St \cdot \left(V_n \frac{\partial V_n}{\partial \eta}\frac{\partial V_i}{\partial \eta} + V_n V_n \frac{\partial^2 V_i}{\partial \eta^2}\right) = 0,\\
&Eu \cdot \left(\frac{\partial M_{in}}{\partial \eta} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 M_{in}}{\partial \eta^3}\right) + Kn \cdot Eu \cdot \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{iks}\Theta_{ks} + \frac{\partial M_{i1}}{partial y_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial y_2} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \eta^2}\left(\varepsilon_{iks}\Theta_{ks}\right)\right) +\\
&+Kn \cdot Eu \cdot \left(\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial M_{i1}}{\partial y_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial y_2}\right)\right) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Полученное в результате внутреннего разложения уравнение сохранения момента импульса позволяет построить нулевое и первое приближения.

Нулевое приближение полученной системы содержит только моментные напряжения на нормальных площадках:

$$Eu \cdot \left(\frac{\partial M_{in}}{\partial \eta} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 M_{in}}{\partial \eta^3}\right) = 0 \tag{12}$$

Полученное уравнение для градиентов нормальных моментных напряжений относится к так называемым волновым уравнениям и получило название уравнение Гельмгольца. К данному уравнению приводит весьма широкий класс процессов, связанных с установившимися колебаниям и: акустика, теория электромагнитного поля, теория дифракции и т. д.

Решение полученного уравнения имеет следующий вид:

$$M_{in} = \sqrt{6} B_{iM} \cos\left(\sqrt{6}\eta + C_{Mi}\right) + D_{iM} \tag{13}$$

Представим полученную величину графически (рис. 3).

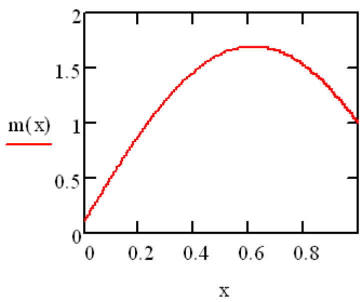


Рис. 3. *Поведение моментных напряжений на нормальных площадках при граничных значениях* $M_{i0} = 0.1$ *и* $M_{i1} = 1$

В результате получены константы интегрирования для задачи Коши и краевой задачи с граничными условиями на границах переходного слоя первого рода. Моментные напряжения на нормальных площадках имеют гармоническую природу и их характеристики зависят от граничных условий.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СКОРОСТИ И ПЛОТНОСТИ МАТЕРИАЛА С МИКРОСТРУКТУРОЙ ВНУТРИ ТОНКОГО СЛОЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАЧЕНИЯ БЕЗРАЗМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ Eu, Kn И St

При рассмотрении системы уравнений (11) возможно 8 случаев в зависимости от физических предположений, ведущих к учету слагаемых, содержащих безразмерные комплексы. Представим данные случаи в таблице 1:

Таблица 1.

№	Физические предположения	Учет безразмерных комплексов		
		$Eu \cdot Kn$	Kn	St
1	$Kn \to 0$, $St \to 0$ (0-приближение)	–	–	–
2	$Eu \cdot Kn >> \max(Kn, St)\,(Eu >> 1)$	+	–	–
3	$Kn >> \max(Eu \cdot Kn, St)\,(Eu << 1)$	–	+	–
4	$St >> \max(Eu \cdot Kn, Kn)$	–	–	+
5	$Eu << 1$и $St \sim Kn$	–	+	+
6	$Eu \sim 1$и $St < Kn$	+	+	–
7	$Eu \cdot Kn \sim St$и $St > Kn(Eu >> 1)$	+	–	+
8	$Eu \sim 1$и $St \sim Kn$	+	+	+

1) Первый случай из таблицы 1 был рассмотрен в предыдущем параграфе как нулевое приближение.

2) Во втором случае таблицы 1, когда $Eu \cdot Kn >> \max(Kn, St)\,(Eu >> 1)$, т. е. когда в системе силы давления намного больше инерциальных сил можно найти и проанализировать поведений напряжений.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Theta_{in}}{\partial \eta} + \frac{1}{6\rho} \cdot \frac{\partial^3 \Theta_{in}}{\partial \eta^3} = 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{iks}\Theta_{ks} + \frac{\partial M_{i1}}{\partial y_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial y_2} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \eta^2}(\varepsilon_{iks}\Theta_{ks}) + \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial M_{i1}}{\partial y_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial y_2}\right) = 0 \end{array} \qquad (14)$$

Для нормальных напряжений существует решение:

$$\Theta_{in} = B_{\Theta i} \sin\left(\sqrt{6}\eta + C_{\Theta i}\right) + \frac{A_{\Theta i}}{6} \qquad (15)$$

Таким образом, поведение компонент напряжений имеет гармоническую природу и их характеристики зависят от граничных условий. Из второго уравнения системы (15) можно получить значения моментных напряжений на площадках отличных от нормальной.

3) В третьем случае из таблицы 1, когда $Kn >> \max(Eu \cdot Kn, St)$, что возможно лишь при малых числах Эйлера, система (11) примет вид:

$$\begin{array}{l} V_n \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} + \bar{\rho} \cdot \frac{\partial V_n}{\partial \eta} + \frac{1}{6} \bar{\rho} \cdot \frac{\partial^3 V_n}{\partial \eta^3} = 0, \\ V_n \frac{\partial V_i}{\partial \eta} = 0. \end{array} \tag{16}$$

При таких предположениях в переходном слое все физические величины остаются постоянными в случае, когда инерциальные силы намного больше сил давления, а скорость установления микроструктуры намного больше скорости системы. То есть в таких средах большие градиенты скоростей и плотностей невозможны.

4) В четвертом случае из таблицы 1, когда $St >> \max(Eu \cdot Kn, Kn)$, система уравнений (11) в частных производных примет вид:

$$\begin{array}{l} V_n \frac{\partial V_n}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} + V_n V_n \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \eta^2} = 0, \\ V_n \frac{\partial V_n}{\partial \eta} \frac{\partial V_i}{\partial \eta} + V_n V_n \frac{\partial^2 V_i}{\partial \eta^2} = 0. \end{array} \tag{17}$$

Решение для нормальной компоненты скорости выглядит следующим образом:

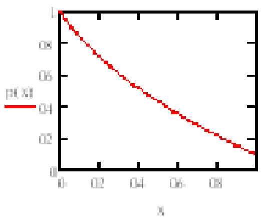
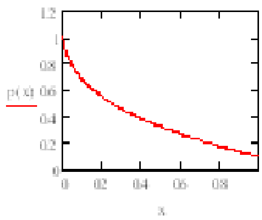
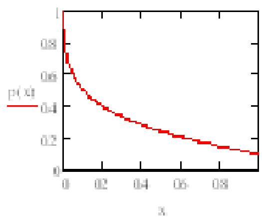
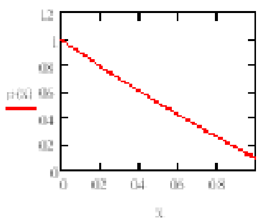
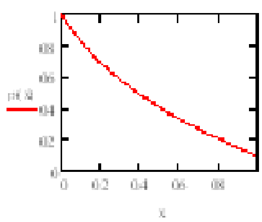
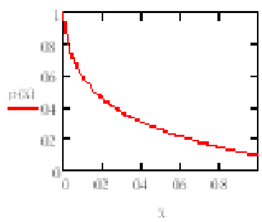
$$V_n = \sqrt{C_{V_n 0} \eta + C_{V_n 1}}. \tag{18}$$

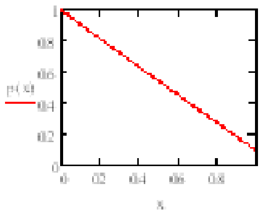
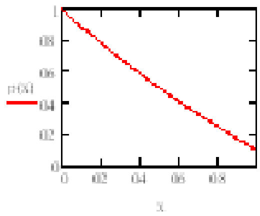
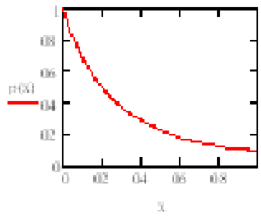
Решение для плотности выглядит следующим образом:

$$\bar{\rho} = C_{\rho 1} \cdot (C_{V_n 0} \eta + C_{V_n 1})^{\frac{1}{2}} + C_{\rho 0} \cdot \ln(C_{V_n 0} \eta + C_{V_n 1}). \tag{19}$$

Проведем исследование зависимости плотности от начального распределения нормальной компоненты скорости и ее производной. Для этого построим таблицу 2.

Таблица 2. Вид скачка плотности при граничных условиях для плотности $\bar{\rho}_0 = 1$, $\bar{\rho}_1 = 0.1$ и различных значений начальной скорости и ускорения

	$\dot{V}_0 = 0.1$	$\dot{V}_0 = 1$	$\dot{V}_0 = 10$
$V_0 = 0.01$			
$V_0 = 0.1$			

$V_0 = 1$			

Следовательно, в случае когда, когда инерциальные силы намного меньше сил давления при скорости установления микроструктуры намного меньшей скорости системы, компоненты скорости изменяются по степенному закону, а плотность сплошной среды зависит от начального распределения отношения градиента скорости к значению самой скорости. Чем больше отношение первоначального безразмерного ускорения к скорости, тем быстрее происходит изменение плотности.

5) В пятом случае из таблицы 1, когда $Eu << 1$ и $St \sim Kn$, система уравнений в частных производных примет вид:

$$\begin{aligned} &Kn \cdot \left(V_n \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} + \bar{\rho} \cdot \frac{\partial V_n}{\partial \eta} + \frac{1}{6}\bar{\rho} \cdot \frac{\partial^3 V_n}{\partial \eta^3}\right) + St \cdot \left(V_n \frac{\partial V_n}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} + V_n V_n \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \eta^2}\right) = 0, \\ &Kn \cdot V_n \frac{\partial V_i}{\partial \eta} + St \cdot \left(V_n \frac{\partial V_n}{\partial \eta} \frac{\partial V_i}{\partial \eta} + V_n V_n \frac{\partial^2 V_i}{\partial \eta^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение для нормальной компоненты скорости выглядит следующим образом:

$$V_n = e^{\frac{C_{V_n 0}}{St}\eta} - \frac{Kn}{St}\eta + C_{V_n 1} \tag{21}$$

Плотность определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \eta^2} \left(e^{\frac{C_{V_n 0}}{St}\eta} - \frac{Kn}{St}\eta + C_{V_n 1}\right)^2 + \\ &\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} \left(Kn \cdot \left(e^{\frac{C_{V_n 0}}{St}\eta} - \frac{Kn}{St}\eta + C_{V_n 1}\right) + St \cdot \left(e^{\frac{C_{V_n 0}}{St}\eta} - \frac{Kn}{St}\eta + C_{V_n 1}\right) \left(\frac{C_{V_n 0}}{St} e^{\frac{C_{V_n 0}}{St}\eta} - \frac{Kn}{St}\right)\right) + \\ &+\bar{\rho} \cdot Kn \cdot \left(Kn \cdot \left(\frac{C_{V_n 0}}{St} e^{\frac{C_{V_n 0}}{St}\eta} - \frac{Kn}{St}\right) + \frac{1}{6} Kn \cdot \left(\frac{C_{V_n 0}}{St}\right)^3 e^{\frac{C_{V_n 0}}{St}\eta}\right) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Уравнение (22) для изменения плотности вдоль нормали позволяет провести предельный анализ для больших $C_{V_n 0} = Kn + St \cdot \dot{V}_n(0)$, что возможно в случае положительных начальных ускорений на границе. В таких предположениях уравнение (22) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \eta^2} + C_{V_n 0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} = 0 \tag{23}$$

и плотность в слое будет меняться по закону:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 e^{-C_{V_n 0}\eta} + C_{\rho 0}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что повышение градиента скорости ведет к уменьшению плотности, а уменьшению градиента скорости приводит к увеличению плотности, что согласуется с основными законами механики.

В оставшихся трех случаях (6,7,8) из таблицы (1), которые характеризуются одним порядком величин кинетической и потенциальной энергий уравнения (11) для скоростей, напряжений, моментных напряжений и плотности не разделяются. Для их анализа необходимо задание реологических соотношений. Это позволяет сделать вывод о том, что в случае одного порядка сил давления и инерциальных сил в элементарном объеме возникающие за счет деформации и скоростей деформации напряжения и моментные напряжения являются значимыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Четверушкин Б. Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24. — № 11. — С. 33–52.

[2] Елизарова Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Лекции по математическим моделям и численным методам в динамике газа и жидкости / Т. Г. Елизарова — М.: Научный мир, 2007. — 350 с.

[3] Вервейко Н. Д. Математическое моделирование поведения сплошной среды с учетом микроструктуры и времени релаксации / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Механика и процессы управления. Том 1. — Материалы XXXXII Всероссийского симпозиума. — М.: РАН, 2012. — С. 111–122.

Вервейко Н. Д., доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета
Тел.: (4732)20-87-63

Verveiko N. D., professor, chair of engineering and applied mechanics of Voronezh State University
Tel.: (4732)20-87-63

Просветов В. И., преподаватель кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета
E-mail: viprosvetov@rambler.ru

Prosvetov V. I., teacher of mathematical and applied analysis department of Voronezh State University
E-mail: viprosvetov@rambler.ru