УДК 517. 955. [2+4]

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07.05.2013 г.

Аннотация: для дифференциального уравнения в банаховом пространстве, неразрешённого относительно производной, решается в частном случае задача Коши методом декомпозиции уравнения, отличном от известного метода. Как пример решается задача для уравнения в частных производных гиперболического типа с условиями на характеристиках.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дескрипторное дифференциальное уравнение, фредгольмовский оператор, декомпозиция.

Abstract: for a differential equation in a Banach space, unresolved for the derivative, the Cauchy problem is solved in the special case of the equation decomposition method that is different from the well-known method. As an example we solve the problem for partial differential equations of hyperbolic type with the terms of on the characteristics.

Keywords: hyperbolic equation, descriptor differential equation, fredholm operator, decomposition.

ВВЕДЕНИЕ

Задача Коши для дифференциального уравнения с необратимым оператором при производной решалась многими авторами. Значительные результаты получены С. Г. Крейном, Г. А. Свиридюком, В. Е. Фёдоровым, А. Г. Баскаковым, К. И. Чернышовым, В. Ф. Чистяковым, А. А. Щегловой, Н. А. Сидоровым.

В работах С.П. Зубовой [3], [4] решена задача Коши с фредгольмовским и нётеровым операторами при производной методом каскадного расщепления исходного уравнения на уравнения в подпространствах с применением на каждом этапе процедуры дифференцирования, что требовало определённой гладкости коэффициентов уравнения.

В настоящей работе рассматривается частный случай одного этапа декомпозиции, производимого способом, отличным от способа, применяемого в работах [3], [4]. При этом снижаются требования на гладкость коэффициентов уравнения.

В качестве примера решается задача для гиперболического уравнения общего вида с условиями на характеристиках.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Приведём некоторые сведения, необходимые для решения поставленной задачи.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, A — замкнутый линейный фредгольмовский оператор, действующий из E_1 в E_2, с плотной в E_1 областью определения.

Для фредгольмовского оператора справедливы разложения:

$$E_1 = \mathrm{Coim}\ A \oplus \mathrm{Ker}\ A,\ E_2 = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Coker}\ A, \tag{1}$$

где Coker A — дефектное подпространство, Coim A — прямое дополнение к ядру Ker A в E_1, dim Ker $A =$ dim Coker $A < +\infty$. Сужение $\widetilde{A}$ оператора A на подпространство $\mathrm{Coim}\, A \cap \mathrm{dom}\, A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Вводятся проекторы P и Q на $\mathrm{Ker}\, A$ и $\mathrm{Coker}\, A$ соответственно, отвечающие разложениям (1), и оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I-Q)$, называемый полуобратным, $A^- :\ \mathrm{Im}\ A \to \mathrm{Coim}\ \cap \mathrm{dom}\, A$ [1].

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} = B(\eta)u(\eta) + f(\eta) \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(0) = u^0 \in E_1, \tag{3}$$

где $B(\eta) : E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый оператор, $\overline{\mathrm{dom}\ B(\eta)} = \overline{\mathrm{dom}\ A} = E_1$, $f(\eta)$ — заданная вектор-функция со значениями в E_2, $\eta \in [0; H]$.

Уравнение (2) является дескрипторным (неразрешённым относительно производной), поскольку A — фредгольмовский оператор.

Нас интересуют условия существования и единственности решения задачи (2), (3).

Произведём декомпозицию этого уравнения: заменим его эквивалентной системой:

$$\begin{cases} A\frac{\partial (I-P)u(\eta)}{\partial \eta} = B(\eta)u(\eta) + f(\eta), \\ Q\left(B(\eta)u(\eta) + f(\eta)\right) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Поскольку

$$u(\eta) = (I-P)u(\eta) + Pu(\eta) \tag{5}$$

и $(I-P)$ – проектор на $\mathrm{Coim}\, A$, то система (4) – это

$$\begin{cases} \frac{\partial (I-P)u(\eta)}{\partial \eta} = A^- B(\eta)\left((I-P)u(\eta) + Pu(\eta)\right) + A^- f(\eta), \\ QB(\eta)(I-P)u(\eta) + QB(\eta)Pu(\eta) + Qf(\eta) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Второе уравнение в системе (6) — это

$$\left(QB(\eta)P\right) Pu(\eta) = -QB(\eta)(I-P)u(\eta) - Qf(\eta) \tag{7}$$

(так как $P^2 = P$). Рассмотрим случай обратимости при каждом $\eta \in [0; H]$ оператора $A_1(\eta) = QB(\eta)P$. Из уравнения (7) имеем:

$$Pu(\eta) = -A_1^{-1}(\eta)QB(\eta)(I-P)u(\eta) - A_1^{-1}(\eta)Qf(\eta). \tag{8}$$

Подставив выражение (8) в первое уравнение системы (6), получим уравнение для нахождения функции $(I-P)u(\eta)$:

$$\frac{\partial (I-P)u(\eta)}{\partial \eta} = A^- B(\eta)\widetilde{A}_1(\eta)(I-P)u(\eta) + \widetilde{f}(\eta) \tag{9}$$

в обозначениях:

$$\widetilde{A}_1(\eta) = I - A_1^{-1}(\eta)QB(\eta),\ \widetilde{f}(\eta) = A^- \left(I - B(\eta)A_1^{-1}(\eta)Q\right) f(\eta).$$

Из условия (3) получаем условие для $(I-P)\,u(\eta)$:

$$(I-P)u(0) = (I-P)\,u^0. \tag{10}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть оператор $A^-B(\eta)\widetilde{A}_1(\eta)(I-P)$ — ограниченный и сильно непрерывный по η, $\widetilde{f}(\eta)$ — непрерывно. Существует решение задачи* (2), (3) *в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$QB(\eta)u + Qf(\eta) \equiv 0,\ \eta \in [0; H]\,. \tag{11}$$

При выполнении этого условия решение $u(\eta)$ единственно и имеет вид

$$u(\eta) = \widetilde{A}_1(\eta)\left[V(\eta,0)\,(I-P)\,u^0 + \int\limits_0^\eta V(\eta,\nu)\widetilde{f}(\nu)d\nu\right] - A_1^{-1}(\eta)Qf(\eta), \tag{12}$$

где $V(\eta,\nu)$ — эволюционный оператор, производящим оператором которого является оператор

$$D(\eta) = A^-B(\eta)\widetilde{A}_1(\eta)(I-P) \in L(\mathrm{Coim}\ A).$$

Справедливость теоремы 1 следует из второго соотношения в системе (4); равенств (5), (7); уравнения (9) и условия (10).

Заметим, в отличие от работы [3] здесь не требуется дифференцируемость оператора $QB(\eta)$ и вектор-функции $Qf(\eta)$.

Условие (11) с $\eta = 0$

$$QB(0)u^0 + Qf(0) = 0 \tag{13}$$

называют условием согласования.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

2.1. Общий случай

В банаховом пространстве

$$E = \left\{\upsilon(\xi,\eta) \in C^{1.1}_{\xi,\eta}\left([0,\Xi]\times[0,\mathrm{H}]\right)\right\}$$

рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = a(\xi,\eta)\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta} + c(\xi,\eta)U(\xi,\eta) + \varphi(\xi,\eta) \tag{14}$$

с условиями на характеристиках

$$U(\xi,0) = g(\xi),\ \left.\frac{\partial U}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = g_1(\xi),\ U(0,\eta) = h(\eta)\ (g(0) = h(0)). \tag{15}$$

Уравнение (14) равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{l} U(\xi,\eta)=u_1(\xi,\eta),\\ \frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}=u_2(\xi,\eta),\\ \frac{\partial u_2(\xi,\eta)}{\partial\xi}=a(\xi,\eta)\frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)u_2(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)u_1(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta), \end{array}\right. \tag{16}$$

а условия (15) эквивалентны условиям:

$$u_1(\xi,0)=g(\xi),\ \ u_2(\xi,0)=g_1(\xi),\ \ u_1(0,\eta)=h(\eta),\ \ (g(0)=h(0)). \tag{17}$$

При этом $u_2(0,\eta)=\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\Big|_{\xi=0}=\frac{\partial}{\partial\eta}u_1(0,\eta)=h'(\eta)$.

Приведём систему из двух последних уравнений системы (16) к системе вида (4):

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}=u_2(\xi,\eta),\\ 0=a(\xi,\eta)\frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial\xi}+c(\xi,\eta)u_1(\xi,\eta)-\frac{\partial u_2(\xi,\eta)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)u_2(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta). \end{array}\right. \tag{18}$$

Задача (18), (17) – есть задача (2), (3) в пространстве $E\times E$ с $u_\xi(\eta)=\begin{pmatrix} u_1(\xi,\eta)\\ u_2(\xi,\eta)\end{pmatrix}$, операторами

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B(\eta)=\begin{pmatrix}0&1\\ a(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}+c(\xi,\eta)&-\frac{\partial}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\end{pmatrix},$$

вектор-функцией $f(\eta)=\begin{pmatrix}0\\ \varphi(\xi,\eta)\end{pmatrix}$ и условием $u_\xi(0)=\begin{pmatrix}g(\xi)\\ g_1(\xi)\end{pmatrix}$.

Для оператора A имеем:

$$\begin{array}{l} \operatorname{Ker}\,A=\left\{\begin{pmatrix}0\\ v_2\end{pmatrix},\ v_2\in E\right\},\ \operatorname{Coim}\,A=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\ 0\end{pmatrix},\ v_1\in E\right\},\\ ImA=\left\{\begin{pmatrix}w_1\\ 0\end{pmatrix},\ w_1\in E\right\},\ \operatorname{Coker}\,A=\left\{\begin{pmatrix}0\\ w_2\end{pmatrix},\ w_2\in E\right\}, \end{array}$$

$$P=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A^-=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Второе уравнение в (18) есть уравнение (7) для определения $u_2(\xi,\eta)$ с оператором $A_1(\eta)\,(\cdot)=QB(\eta)P\,(\cdot)=-\frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\,(\cdot)$.

Равенство вида (8) — это равенство

$$u_2(\xi,\eta)=\int\limits_0^\xi\left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)a(s,\eta)\,\frac{\partial u_1(s,\eta)}{\partial s}\,ds+$$
$$+\int\limits_0^\xi\left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)c(s,\eta)\,u_1\,(s,\eta)ds\ +\ \int\limits_0^\xi\left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)\cdot\varphi(s,\eta)ds.$$

Пусть функция $a(\xi,\eta)$ дифференцируема по ξ. В результате интегрирования по частям в первом слагаемом последнего соотношения получаем:

$$u_2(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)\,u_1(\xi,\eta) - a(0,\eta)u_1(0,\eta)\exp\int\limits_0^\xi b(s,\eta)ds -$$

$$-\int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)\ \left(\frac{\partial a(s,\eta)}{\partial s} - a(s,\eta)b(s,\eta) - c(s,\eta)\right)u_1(s,\eta)ds +$$

$$+\int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)\ \varphi(s,\eta)ds + u_2(0,\eta)\exp\int\limits_0^\xi b(s,\eta)ds =$$

$$= a(\xi,\eta)\,u_1(\xi,\eta) + \big(h'(\eta) - a(0,\eta)h(\eta)\big)\exp\int\limits_0^\xi b(s,\eta)ds -$$

$$-\int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)\ \left(\frac{\partial a(s,\eta)}{\partial s} - a(s,\eta)b(s,\eta) - c(s,\eta)\right)u_1(s,\eta)ds +$$

$$+\int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)\ \varphi(s,\eta)ds. \tag{19}$$

Теперь первое уравнение в системе (6) – это уравнение

$$\frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} = u_2(\xi,\eta) = D_\xi(\eta)u_1(\xi,\eta) + \widetilde{f}_\xi(\eta) \tag{20}$$

с оператором

$$D_\xi(\eta)\,(\cdot) = a(\xi,\eta)\,(\cdot) - \int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)\ \left(\frac{\partial a(s,\eta)}{\partial s} - a(s,\eta)b(s,\eta) - c(s,\eta)\right)(\cdot)ds$$

и функцией $\widetilde{f}_\xi(\eta) = (h'(\eta) - a(0,\eta)h(\eta))\exp\int\limits_0^\xi b(s,\eta)ds + \int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\eta)dz\right)\ \varphi(s,\eta)ds.$

Его решение, удовлетворяющее условию $u_1(\xi,0) = g(\xi)$, это

$$u_1(\xi,\eta) = U(\xi,\eta) = V_\xi(\eta,0)g(\xi) + \int\limits_0^\eta V_\xi(\eta,\nu)\left(\int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,\nu)dz\right)\varphi(s,\nu)ds\right)d\nu \tag{21}$$

с эволюционным оператором $V_\xi(\eta,\nu)$, порождённым оператором $D_\xi(\eta)$.

Замечание 1. Выполнение условия согласования (13) следует из равенства (19) при $\eta = 0$:

$$g_1(\xi) = a(\xi,0)g(\xi) - \int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,0)dz\right)\left(\frac{\partial a(s,0)}{\partial s} - a(s,0)\cdot b(s,0) - c(s,0)\right)\cdot g(s)ds +$$

$$+\int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z,0)dz\right)\cdot\varphi(s,0)ds.$$

В силу этого задачу для уравнения (14) следует формулировать без условия $\left.\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = g_1(\xi)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При условии дифференцируемости $a(\xi,\eta)$ и $g(\xi)$ по ξ, $h(\eta)$ по η; непрерывности $a(\xi,\eta)$ и интегрируемости $\frac{\partial a(\xi,\eta)}{\partial \xi}, b(\xi,\eta), c(\xi,\eta), \varphi(\xi,\eta)$ решение задачи* (14), (15) *существует, единственно и имеет вид* (21).

2.2. Частный случай

Пусть коэффициенты a, b, c уравнения (14) не зависят от η и удовлетворяют условиям теоремы 2.

Задано уравнение

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = a(\xi)\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi} + b(\xi)\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta} + c(\xi)U(\xi,\eta) + \varphi(\xi,\eta) \tag{22}$$

и условия (15).

В этом случае $D_\xi(\eta) = D_\xi$, то есть

$$D_\xi(\cdot) = a(\xi)(\cdot) - \int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z)dz\right)\left(\frac{\partial a(s)}{\partial s} - a(s)b(s) - c(s)\right)(\cdot)\,ds$$

и $\widehat{f}_\xi(\eta) = \left(\exp\int\limits_0^\xi b(s)ds\right)\cdot h(\eta) + \int\limits_0^\xi \left(\exp\int\limits_s^\xi b(z)dz\right)\cdot\varphi(s,\eta)ds.$

Решение уравнения (22) с условиями (15) равно

$$U(\xi,\eta) = u_1(\xi,\eta) = \left(\exp\left[\eta D_\xi(\cdot)\right]\right)\cdot g(\xi) + \int\limits_0^\eta \left(\exp\left[(\eta-\nu)D_\xi(\cdot)\right]\right)\cdot\widehat{f}_\xi(\nu)d\nu.$$

2.3. Пример

Решим задачу

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta} + U(\xi,\eta) \tag{23}$$

с условиями (15). Заменим уравнение системой

$$\begin{cases} U(\xi,\eta) = u_1(\xi,\eta), \\ \frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} = u_2(\xi,\eta), \\ \frac{\partial u_2(\xi,\eta)}{\partial \xi} = u_2(\xi,\eta) + u_1(\xi,\eta). \end{cases}$$

Решение последнего уравнения этой системы с условием $u_2(0,\eta) = h'(\eta)$ — это функция

$$u_2(\xi,\eta) = e^\xi \cdot h'(\eta) + \int\limits_0^\xi e^{\xi-s}\cdot u_1(s,\eta)ds.$$

Второе уравнение последней системы теперь имеет вид

$$\frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \int\limits_0^{\xi} e^{\xi - s} \cdot u_1(s,\eta) ds + e^{\xi} \cdot h'(\eta),$$

и функция $u_1(\xi,\eta)$, удовлетворяющая этому уравнению и условию $u_1(\xi,0) = g(\xi)$, такова:

$$u_1(\xi,\eta) = \exp\left(\eta \cdot \int\limits_0^{\xi} e^{\xi - s} \left(\cdot\right) ds\right) g(\xi) + \int\limits_0^{\eta} \exp\left((\eta - \nu) \cdot \int\limits_0^{\xi} e^{\xi - s} \left(\cdot\right) ds\right) e^{\xi} \cdot h'(\nu) d\nu.$$

В частном случае $g(\xi) = \xi e^{\xi}$, $h(\eta) = \eta$ решение задачи (23), (15) равно

$$U(\xi,\eta) = e^{\xi} \left(\xi + \eta\right) \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\xi\eta)^i}{i!\ (i+1)!}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

[2] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

[3] Зубова С.П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной / С.П. Зубова // Доклады РАН. — 2009. — Т. 428, № 4. — С. 444–446.

[4] Зубова С.П. Свойства возмущённого фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной / С.П. Зубова; Воронежский гос. ун-т. — Воронеж, 1991. — 17 с. — Деп. в ВИНИТИ 17.06.91, № 2516–В91.

Баев А. Д., д. ф.-м. н., декан математического факультета, заведующий кафедрой математического анализа, Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru
Тел.: 8–473–220–84—01

Baev A. D., Doctor of physico-mathematical sciences, the dean of Department of Mathematics, head of a chair of mathematical analysis of Voronezh State University
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru
Tel.: 8–473–220–84—01

Зубова С. П., к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет
E-mail: spzubova@mail.ru
Тел.: 8–951–851–36–30

Zubova S. P., Ph.D, assistant professor, chair of mathematical analysis, Voronezh State University
E-mail: spzubova@mail.ru
Tel.: 8–951–851–36–30

Усков В. И., студент математического факультета, Воронежский государственный университет
E-mail: vum1@yandex.ru
Тел.: 8–960–134–47–02

Uskov V. I., Student of mathematics faculty, Voronezh State University
E-mail: vum1@yandex.ru
Tel.: 8–960–134–47–02