УДК 517.9

ТЕОРЕМА ПЭЛИ–ВИНЕРА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

А. Т. Астахов, В. З. Мешков, И. П. Половинкин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 25.06.2013 г.

Аннотация: доказана теорема Пэли–Винера для преобразования Радона.
Ключевые слова: преобразование Радона, вещественно–аналитическая функция, гиперплоскость, функции комплексного переменного.

Abstract: in this article we prove a theorem Paley–Wiener for Radon's trans-formation.
Keywords: Radon's transformation, real–analytic function, hyperplane, functions of complex variable.

Пусть $f(X)$ — измеримая функция в $\mathbf{R}^m$, убывающая на бесконечности быстрее любой степени $(1+|X|)^{-N}$ $(N>0)$. То есть, для любого $N>0$ существует положительная постоянная C_N такая, что всюду в $\mathbf{R}^m$ выполняется неравенство

$$|f(X)| < C_N\,(1+|X|)^{-N}. \tag{1}$$

Пусть B_ρ – шар в $\mathbf{R}^m$ радиуса ρ:

$$B_\rho = \{X=(x_1,x_2,...,x_m)\in\mathbf{R}^m : |X|\leqslant\rho\}.$$

Доказана теорема.

Теорема. *Предположим, что для любой гиперплоскости* $\pi\subset\boldsymbol{R}^m$*, такой, что* $\pi\cap B_\rho=\varnothing$*,* $\int\limits_\pi f\,dS=0$*, где* dS *– евклидова мера гиперплоскости* π*. Тогда функция* f *имеет компактный носитель.*

Этот результат был получен ранее С. Хелгассоном в несколько более общем виде [2, гл. 1, §2, теорема 2.6]. При доказательстве С. Хелгассон использовал преобразование Абеля. Наше доказательство основывается на оценках коэффициентов однородных многочленов и на методах функций комплексного переменного.

Далее без ограничения общности можно считать, что $\rho=1$.

А. Прежде всего приведём несколько известных свойств преобразования Фурье. Преобразование Фурье, как обычно, определим по формуле

$$\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbf{R}^m} f(X)e^{-i<X,\xi>}dX. \tag{2}$$

Здесь $\xi\in\mathbf{R}^m$ – двойственные переменные.

Пусть $\ell \in \mathbf{R}^m$ и $|\ell| = 1$, t – вещественное число и $\pi(\ell, t)$ гиперплоскость в $\mathbf{R}^m_X$, определяемая равенством

$$\pi(\ell, t) = \{X \in \mathbf{R}^m : (X, \ell) = t\} \tag{3}$$

Определим функцию $f_\ell(t)$ соотношением

$$f_\ell(t) = \int\limits_{(X,\ell)=t} f(X) dS,$$

где dS – евклидова мера гиперплоскости $\pi(\ell, t)$.

Ясно, что $f_\ell(t)$ – ограничена и имеет компактный носитель в промежутке $[-1, 1]$.

Пусть $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Тогда

$$\widehat{f}(\lambda\ell) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\ell(t) e^{-it\lambda} dt.$$

Таким образом, ограничение преобразования Фурье $\widehat{f}$ на прямую $\lambda\ell$ представляет собой не что иное, как обычное преобразование Фурье функции одной переменной $f_\ell(t)$, имеющей компактный носитель. Следовательно, её можно продолжить с вещественной прямой в комплексную плоскость $\lambda\ell$, где $\lambda \in \mathbf{C}$.

B. Из условия быстрого убывания $f(X)$ вытекает, что преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ – бесконечно дифференцируемо. Разложим её в ряд Тейлора-Маклорена относительно начала координат

$$\widehat{f}(\xi) \sim \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n_{(0)} \widehat{f}(\xi)}{n!}. \tag{4}$$

где

$$d^n_{(0)} \widehat{f}(\xi) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \widehat{f}(0)}{\partial \xi^\alpha} \xi^\alpha.$$

Здесь сумма берётся по всем мультииндексам α таким, что $|\alpha| = n$.

Ясно, что $d^n f(\xi) = d^n_{(0)} \widehat{f}(\xi)$ является однородным многочленом степени n. Кроме того отметим, что

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \widehat{f}(\lambda\ell)\Big|_{\lambda=0} = d^n \widehat{f}(\ell). \tag{5}$$

Пусть функция $g_\ell(\lambda)$ определяется равенством

$$g_\ell(\lambda) = \widehat{f}(\lambda\ell).$$

Ясно что функция $g_\ell(\lambda)$ является целой во всей комплексной плоскости ℓ и удовлетворяет там оценке

$$|g_\ell(\lambda)| \leqslant M e^{\operatorname{Re} \lambda}. \tag{6}$$

В силу равенства (4) $d^n_{(0)} \widehat{f}(\ell) = g^{(n)}_\ell(0)$. Оценив $g^{(n)}_\ell(0)$ для всех ℓ из единичной сферы $|\ell| = 1$ и воспользовавшись неравенством (1) можно оценить коэффициенты $d^n_{(0)} \widehat{f}(\xi)$ и доказать сходимость ряда Тейлора–Маклорена (3), а также аналитичность функции $\widehat{f}(\xi)$ во всем C^m.

Лемма 1. *Пусть целая функция* $g(\lambda)$ *во всей комплексной плоскости* C *удовлетворяет неравенству*

$$|g(\lambda)| \leqslant Me^{\mathrm{Re}\,\lambda}.$$

Тогда последовательность её производных $\{g^{(n)}(0)\}$ – *ограничена.*

Доказательство леммы 1. В силу формулы Коши для производных аналитической функции

$$g^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\varphi})}{r^n e^{in\varphi}} id\varphi.$$

Из этой формулы взяв $r = n$ получим следующую оценку коэффициентов

$$|g^{(n)}(0)| \leqslant \frac{Mn!}{2\pi n^n}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{n\cos\varphi}d\varphi. \tag{7}$$

В силу формулы Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Кроме того, в силу метода Лапласа [3, отдел 2. задача 201]

$$\int\limits_{0}^{2\pi} e^{n\cos\varphi}d\varphi \sim e^n\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Поэтому правая часть неравенства (6) при $n \to \infty$ стремится к M, что и доказывает лемму 1.

В силу того, что условие (1) выполняется для функции $g(\lambda) = g_\ell(\lambda)$ при любом ℓ таком, что $|\ell| = 1$, из соотношения (2) выполняется, что $|d^n_{(0)}\widehat{f}(\ell)| \leqslant K$, где постоянная K одна и та же для всех $\ell \in S^{n-1}_\xi$,

$$S^{n-1}_\xi = \{\ell \in \mathbf{R}^m : |\ell| = 1\}$$

и всех $n = 1, 2, ...$

Поэтому в силу оценок коэффициентов однородных многочленов для суммы коэффициентов дифференциала $d^n_{(0)}\widehat{f}$ справедлива следующая оценка,

$$\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha!}\left|\frac{\partial^\alpha \widehat{f}(0)}{\partial z^\alpha}\right| \leqslant C\gamma^n K\omega_{n-1}$$

где ω_{n-1} – площадь единичной сферы $|\xi| = 1$. Далее, пусть
$Z = (z_1, z_2, ..., z_m) \in C^m$ и $|Z| = \left(\sum\limits_{k=1}^{m}|z_k|^2\right)^{1/2}$.

Тогда

$$|d^n_{(0)}\widehat{f}(Z)| = \left|\frac{n!}{\alpha!}\sum_{|\alpha|=n}\frac{\partial^\alpha \widehat{f}(0)}{\partial \xi^\alpha}Z^\alpha\right| \leqslant CK\gamma^n|Z|^n$$

Из этой оценки вытекает, что ряд Тейлора-Маклорена (4)

$$\widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^n_{(0)}f(Z)}{n!}.$$

сходится в C^m. Так, что функцию $\widehat{f}$ можно рассматривать как аналитическую функцию в C^m, которая удовлетворяет там оценке

$$|\widehat{f}(Z)| \leqslant Ce^{\gamma|Z|} \tag{8}$$

с некоторой положительной постоянной C. Кроме того, $\widehat{f}(\xi)$ ограничена на $\mathbf{R}^m_\xi$.

Лемма 2. *Пусть $g(Z)$ – целая функция на C^m, удовлетворяющая на C^m и $\boldsymbol{R}^m$ соответственно оценкам*

$$|g(Z)| \leqslant C \cdot e^{\gamma|Z|}, \quad |f(X)| \leqslant C \tag{9}$$

где C, γ – некоторые положительные постоянные.

Тогда на самом деле выполняется оценка

$$|g(X+iY)| \leqslant Ce^{\gamma|Y|}. \tag{10}$$

Сформулируем известный принцип Фрагмена – Линделёфа [3, отдел 3, задача 322].

Теорема (Фрагмена - Линделёфа). *Пусть $f(z)$ аналитична в угле $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и удовлетворяет там оценке*

$$|f(z)| \leqslant Ce^{|z|^\alpha}, \tag{11}$$

где C, α – положительные постоянные, причём $\alpha < 2$. Тогда, если на сторонах $|f(x)| \leqslant 1$, $|f(y)| \leqslant 1$, то и во всём угле $|f(z)| \leqslant 1$.

Пусть точка $(X_0+iY) \in C^m$. Мы получим оценку $|g(X_0+iY)|$, зависящую только от $|Y|$ и не зависящую от X_0. Рассмотрим комплексную плоскость

$$\pi = \{X_0 + \lambda Y : \lambda \in C\}.$$

На плоскости π рассмотрим аналитическую функцию $f(\lambda) = g(X_0+\lambda Y)$. Пусть $\lambda = \xi+i\eta$. Тогда в силу (9) имеем

$$|f(\xi)| \leqslant C, \quad f(i\eta) = Ce^{\gamma|X_0+i\eta Y|} \leqslant Ce^{\gamma|X_0|} \cdot e^{\gamma\eta|Y|}.$$

Положим $\varphi(\lambda) = f(\lambda)e^{i\gamma|Y|\lambda}$. На вещественной оси $|\varphi(\xi)| \leqslant C$. Кроме того $|\varphi(iy)| \leqslant Ce^{\gamma|X_0|}$.

Ясно, что φ удовлетворяет условию (11) с $\alpha = 1$.

В силу теоремы Фрагмена-Линделёфа $|\varphi(\lambda)| \leqslant Ce^{\gamma|X_0|}$ в угле $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Точно такую оценку можно получить для угла $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Таким образом, $\varphi(\lambda)$ ограничена в верхней полуплоскости. В силу принципа максимума для полуплоскости

$$|\varphi(\xi+i\eta)| \leqslant \sup|f(\xi)| \leqslant C.$$

Отсюда имеем $|f(i)|e^{-\gamma|Y|} \leqslant C$. Наконец,

$$|g(X_0+iY)| = |f(i)| \leqslant Ce^{\gamma|Y|}.$$

Лемма 2 доказана.

В силу леммы 2 функция $\widehat{f}(Z)$, удовлетворяет оценке (8) на самом деле удовлетворяет оценке

$$|\widehat{f}(X_0+iY)| \leqslant Ce^{\gamma|Y|}.$$

В силу теоремы Пэли, Винера, Хёрмандера [1, т.1, теорема 7.3.1] носитель функции $f(X)$ лежит в шаре $|X| \leqslant \gamma$. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986. — 464 с.

[2] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. — М.: Мир, 1987. — 736 с.

[3] Полиа Г, Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1978. — 391 с.

Астахов А. Т., доцент Воронежского государственного университета
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Тел.: (473)2208-348

Astahov A. T., associate professor of the Voronezh state university
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Tel.: (473)2208-348

Мешков В. З., профессор Воронежского государственного университета
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Тел.: (473)2208-348

Meshkov V. Z., professor of the Voronezh state university
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Tel.: (473)2208-348

Половинкин И. П., доцент Воронежского государственного университета
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Тел.: (473)2208-348

Polovinkin I. P., associate professor of the Voronezh state university
E-mail: AstahovAleks@yandex.ru
Tel.: (473)2208-348