УДК 517.95

О ВЛИЯНИИ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. В. Алексеева, В. В. Корниенко, Д. В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Поступила в редакцию 26.03.2013 г.

Аннотация: для замкнутых дифференциальных операторов $L:\mathcal{H}_{t,x}\to\mathcal{H}_{t,x}$, порождённых задачей Дирихле для эллиптических систем второго порядка изучены спектры: $C\sigma L = R\sigma L$– пустое множество; точечный спектр $P\sigma L$ располагается в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z \leqslant 0$) комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В случае эллиптической системы без младших членов собственные вектор-функции оператора L образуют ортогональный базис. В случае эллиптической системы с младшими членами вектор-функции оператора L образуют базис Рисса, не являющимся ортогональным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{t,x}$.

Ключевые слова: эллиптические системы, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, базис, ортогональный базис, базис Рисса.

Abstract: for a closed differential operators $L:\mathcal{H}_{t,x}\to\mathcal{H}_{t,x}$, generated by the Dirichlet problem for elliptic systems of second-order studied the spectra: $C\sigma L = R\sigma L$– empty set; a point spectrum of $P\sigma L$ is located in the left half-plane ($\operatorname{Re} z \leqslant 0$) complex plane $\mathbb{C}$. In the case of an elliptic system without the younger members of their own vector-function of the operator L form an orthogonal basis. In the case of an elliptic system with the younger members of the vector-function of the operator L form a basis for the Riesz means, a non-orthogonal in the Hilbert space $\mathcal{H}_{t,x}$.

Keywords: elliptic systems, the boundary problems, the closed operators, spectrum, basis, orthogonal basis, basis Рисса.

Работа посвящена сравнительному изучению и описа́нию спектральных свойств дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для эллиптической системы (1) без "младших членов"

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} &= \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} &= \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{1}$$

и для эллиптической системы (2) с "младшими членами"

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u^2}{\partial x} &= \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^1}{\partial x} &= \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{2}$$

рассматриваемых в замыкании $V_{t,x}$ ограниченной области $\Omega_{t,x} = (0;\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Присоединив к системам уравнений (1) и (2) условие Дирихле

$$u\big|_{\partial\Omega_{t,x}} = 0 \tag{3}$$

получим две граничные задачи: задачу (1), (3) и задачу (2), (3).

Для системы Коши-Римана и более общих, так называемых симметричных и несимметричных систем, имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [1].[1)]

Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений первого порядка по выделенной переменной t при числе переменных более двух посвящена работа [2].[2)] Исследованию свойств задачи Дирихле для 2×2 — эллиптических систем посвящена работа [3]; сильно и усиленно эллиптические системы изучались в работах [4], [5] соответственно. Однако, спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных больше двух почти не изучены. Элементы спектральной теории замкнутых операторов подробно изложены в книгах [6], [7]. Спектральные свойства задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [8], [9], [10], [11] .

Также, как и в работах [9], [10] системы дифференциальных уравнений (2) и (3) для удобства будем называть эллиптическими системами первого типа. Эллиптической системой второго типа с младшими членами в данном случае будет система вида

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x} &= \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^1}{\partial x} &= \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что система (4) равносильна системе (2) (для $\lambda = 0$) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (2) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (4). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования в случае эллиптических систем первого порядка показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [12], а также при изучении эллиптических систем в [8]. Обозначим символами $e_i = \left(\delta_i^1 \ \delta_i^2\right)^{\mathrm{T}}$, $i = 1,\, 2$; ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_2^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}_2^2$— унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2$; со скалярным произведением $\left(u, v; \mathcal{U}_2^2\right) = u^1 \overline{v^1} + u^2 \overline{v^2}$. Пусть $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{L}_2^2\left(V_{t,x}\right)$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V_{t,x} \to \mathbb{C}^2$, норма в котором задаётся формулой

$$\left|u; \mathcal{H}_{t,x}^2\right|^2 = \iint\limits_{V_{t,x}} \left|u(\tau,\, \xi); \mathcal{U}_2^2\right|^2 \, d\tau \, d\xi.$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u = u(t, x)$, принадлежащих классу $\mathbb{C}\left(\overline{\Omega}_{t,x}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega\right)$ и удовлетворяющих условиям (3). Опишем вначале спектральные свойства эллиптической системы первого типа без младших членов.

---

1) Дезин Алексей Алексеевич (23 апреля 1923, Москва - 4 марта 2008 года, Москва) Советский и российский математик.

2) Романко Василий Кириллович (28 декабря 1936, Москва - 27 сентября 2012 года, Москва) Советский и российский математик.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА БЕЗ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ

Обозначая символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (1), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (1), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографиях [6, с. 25], [13, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим символами ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно.

Имеет место [11] следующая теорема:

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей* (1), (3), *состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2; \quad m = 1,2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (5), *представима в виде*

$$u_{m,k,s}(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} + \left(ie_1 + (-1)^{m+1}e_2\right)\sin(kt)\sin(sx).$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : \ m = 1,2; \ k \in \mathbb{N}; \ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$. $\blacksquare$

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Также, как и в случае эллиптической системы без младших членов обозначим символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (2), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций.

Теорема 2. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей* (2), (3) *состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m \left(\frac{1}{4} + s^2\right); \quad m = 1,2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in N. \tag{6}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (6), *представима в виде*

$$u_{m,k,s}(t,x) = 2\sin(kt)\, e^{\frac{x}{2}} \sin(sx) \left(ie_m + e_{3-m}\right)$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1,2; \ k \in \mathbb{N}; \ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$. $\square$

Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{m,k,s}(t) \ : \ \ m = 1, 2; \ k \in \mathbb{N}\}$ вектор-функций

$$u_{m,k,s}(t) = 2\sin(kt)\,(ie_m + e_{3-m})$$

является полной и ортогональной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_t^2 = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$, и воспользоваться, доказанным в [9], представлением $\mathcal{H}_{t,x}^2$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}_t^2$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{H}_t^2 \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дезин А. А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук – 1959. – Т. XIV, вып. 3 (87) – С. 21–73.

[2] Романко В. К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, №1. – С. 47–50.

[3] Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3, № 6. – С. 211–212.

[4] Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник – 1951. – Т. 29, (71), выпуск 4.– С. 615 – 676.

[5] Солдатов А. П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №5.– С. 674–686.

[6] Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач – М.: Наука, 1980. – 207с.

[7] Качмаж С. Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов – М.: Гос.из-во физ.- мат. литературы, 1958. – 508с.

[8] Корниенко Д. В. О спектральных задачах для линейных систем дифференциально-операторных уравнений // Вестник Елецкого госуниверситета им. И. А. Бунина. Вып. 5: Серия "Математика, физика". – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2004. – С. 71–78.

[9] Корниенко Д. В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений/ Д. В. Корниенко// Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 91–100.

[10] Корниенко Д. В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №8. – С. 1063–1071.

[11] Алексеева О. В О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем / О. В. Алексеева// НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Белгородского государственного университета. Математика Физика. 2010. №17(88). Выпуск 20. С. 5–9.

[12] Дезин А. А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, №10. – С. 1851 – 1858.

[13] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, Т.1. Общая теория – М.: И.Л., 1962. – 895с.

Корниенко В. В., Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Заведующий кафедрой вычислительной математики и информатики, Доктор физ.-мат.наук, профессор
E-mail: V_V_Kornienko@mail.ru
Тел.: 8(47467)60898

Kornienko V. V., Eletskii the state university it. I. A. Bunina, Head of the Department of Computational Mathematics and Informatics,Dr. phys. - Mathematical sciences, professor
E-mail: V_V_Kornienko@mail.ru
Tel.: 8(47467)60898

Корниенко Д. В., Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Доцент кафедры вычислительной математики и информатики, Кандидат физ.-мат.наук, доцент
E-mail: dmkornienko@mail.ru
Тел.: 8(47467)60898

Kornienko D. V., Eletskii the state university it. I. A. Bunina, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Informatics,Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor
E-mail: dmkornienko@mail.ru
Tel.: 8(47467)60898

Алексеева О. В., Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, соискатель
E-mail: o.v.alexeeva@gmail.com

Alexeev O. V., Eletskii the state university it. I. A. Bunina, applicant
E-mail: o.v.alexeeva@gmail.com