УДК 517.432+517.515+515.958

О НЕВЫРОЖДЕННОСТИ СУММЫ ДЕФИНИТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ*

Т. Я. Азизов, В. А. Сендеров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.02.2013 г.

Аннотация: в этой статье рассмотрены следующие вопросы геометрии гильбертовых пространств с индефинитной метрикой: Всегда ли замыкание суммы $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-}$ положительного $\mathcal{L}_+$ и отрицательного $\mathcal{L}_-$ подпространств является невырожденным? Если нет, то при каких естественных условиях это все же справедливо? При каких условиях пространство $\mathfrak{L}$ является пространством Крейна? Ответ на первый вопрос отрицателен и получены ответы на два других.

Ключевые слова: индефинитная метрика, дефинитное подпространство, вырожденное подпространство, изотропная часть подпространства.

Abstract: in this paper the following geometrical questions for Hilbert spaces with an indefinite metric are considered: Is the sum $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+ + \mathfrak{L}_-$ of a positive $\mathfrak{L}_+$ and a negative $\mathfrak{L}_-$ subspaces always non-degenerate? If not by which natural assumptions is it true? By which assumptions such the sum $\mathfrak{L}$ is a Krein space?

Keywords: indefinite metric, definite subspace, degenerate subspace, isotropic part of a subspace.

Пусть $\mathfrak{H}$ — линейное пространство, снабженное полуторалинейной формой $[\cdot,\cdot]$. Объект $\mathcal{K} := \{\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]\}$ называется *пространством с индефинитной метрикой*, или коротко, *индефинитным пространством*. Говорят, что $\mathcal{K}$ — *пространство Крейна*, если его можно представить как сумму двух $[\cdot,\cdot]$-ортогональных друг другу подпространств $\mathcal{K}^{\pm}$: $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\dot{+}]\mathcal{K}^-$ таких, что $\{\mathcal{K}^{\pm}, \pm[\cdot,\cdot]\}$ — гильбертовы пространства. В этом случае в пространстве $\mathcal{K}$ можно ввести скалярное произведение $(x,y) = [Jx,y]$, где $J = P^+ - P^-$, $P^{\pm}$ — взаимно-дополнительные проекторы на $\mathcal{K}^{\pm}$, соответственно. Пространство $\mathfrak{H} = \{\mathcal{K}, (\cdot,\cdot)\}$ является гильбертовым и так как $[x,y] = (Jx,y)$, то коротко называется J-*пространством*. Не ограничивая общности, в подавляющем большинстве вопросов понятия пространств Крейна и J-пространств отождествляют. Так как любое пространство с индефинитной метрикой можно представить подпространством некоторого пространства Крейна, то всюду ниже мы будем это предполагать и вести речь о J-пространствах и их подпространствах.

Мы надеемся, что читатель знаком с основами теории индефинитных пространств хотя бы в пределах первой главы книги [1].

Напомним, что одним из отличительных геометрических свойств индефинитного пространства (и, в частности, пространства Крейна) является то, что сумма подпространства ($\equiv$ замкнутого линеала) и его $[\cdot,\cdot]$-ортогонального дополнения не всегда равна всему пространству и, более того, даже не всегда замкнута. Поскольку объектом исследования является

* Исследования Т.Я. Азизова поддержаны грантом РФФИ 12-01-00102-а

индефинитное пространство, то естественно ставится вопрос о вырожденности или невырожденности подпространств, т.е., существует или нет в подпространстве ненулевой вектор, J-ортогональный этому подпространству.

Предлагаемая читателю статья посвящена геометрии гильбертовых пространств с индефинитной метрикой и в ней будут решаться следующие основные вопросы:

1. *Всегда ли замыкание суммы $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-}$ положительного $\mathcal{L}_+$ и отрицательного $\mathcal{L}_-$ подпространств является невырожденным?*

2. *Если нет, то при каких естественных условиях это все же справедливо?*

3. *При каких условиях пространство $\mathfrak{L}$ является пространством Крейна?*

1. Покажем, что даже в случае J-ортогональных подпространств $\mathfrak{L}_+$ и $\mathfrak{L}_-$ ответ на первый вопрос в общем случае отрицателен.

Существование соответствующего примера может быть доказано на основе достаточно общего результата [2, Теорема 1.1] для нормированных пространств, однако мы предпочли привести прямую конструкцию.

Пример 1. Пусть

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+ \oplus \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^- \tag{1}$$

— ортогональное разложение гильбертова пространства с сепарабельными бесконечномерными составляющими $\mathfrak{H}^\pm$. Пусть $G : \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^- \to \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^-$ — самосопряженный оператор, являющийся строгим, но не равномерным сжатием, т.е. $\|Gx\| < \|x\|$, $0 \neq x \in \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^-$, и $\|G\| = 1$. Выберем оператор G таким, что $e \notin \operatorname{ran}(I - G)$, где через $\operatorname{ran}(I - G)$ обозначена область значений оператора $I - G$. Пусть

$$U : \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^- \to \mathfrak{H}^+$$

— унитарный оператор. Введем в рассмотрение операторы

$$K = G^{1/2}U^* : \mathfrak{H}^+ \to \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^-$$

и

$$K^* = UG^{1/2} : \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^- \to \mathfrak{H}^+.$$

Эти операторы являются строгими сжатиями.

Введем в $\mathfrak{H}$ индефинитную метрику: $[x, y] = (J_0x, y)$, где $J_0x = x_+ - x_-$ для любого $x = x_+ + \alpha e + x_-$, $x_\pm \in \mathfrak{H}^\pm$. Относительно этой индефинитной метрики подпространство $\mathfrak{L}_+ = \{x = x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathfrak{H}^+\}$ является положительным, а $\mathfrak{L}_- = \{y = y_- + K^*y_- \mid y_- \in \mathfrak{H}^-\}$ — отрицательным. Кроме того, $[x, y] = 0$ при $x \in \mathfrak{L}_+,\ y \in \mathfrak{L}_-$. Проверим, что

$$\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{L}_+ \dot{+} \mathfrak{L}_-}. \tag{2}$$

Предположим, что вектор $z \in \mathfrak{H}$ ортогонален $\mathfrak{L}_+ \dot{+} \mathfrak{L}_-$. Тогда он должен быть ортогонален $\mathfrak{L}_+$ и потому имеет представление $z = z_- - K^*z_-$ с некоторым $z_- \in \text{л.о.}\{e\} \oplus \mathfrak{H}^-$. Из условия $(z_- - K^*z_-, y_- + K^*y_-) = 0$, $y_- \in \mathfrak{H}^-$, следует, что $0 = ((I - KK^*)z_-, y_-) = ((I - G)z_-, y_-)$, что влечет $(I - G)z_- = \lambda e$. Так как по условию $e \notin \operatorname{ran}(I - G)$, то $\lambda = 0$. Осталось заметить, что $\|Gx\| < \|x\|$, $x \neq 0$, обеспечивает равенство $z_- = 0$, а потому справедливо (2).

Таким образом, хотя подпространства $\mathfrak{L}_\pm$ дефинитны и ортогональны друг другу относительно индефинитной метрики, замыкание их суммы — вырожденное подпространство.

2. Однако ситуация меняется, если хотя бы одно из подпространств $\mathfrak{L}_+$ или $\mathfrak{L}_-$ равномерно дефинитно, т.е. существует такое $\alpha > 0$, что $|[x,x]| \geqslant \alpha(x,x)$ при всех $x \in \mathfrak{L}_\pm$, соответственно. Прежде докажем некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{L}_\pm$ — неотрицательный/неположительный линеал, соответственно, $x_\pm \in \mathfrak{L}_\pm$ и $x_+ + x_-$ — изотропный вектор в $\mathfrak{L}_+ + \mathfrak{L}_-$. Тогда $x_\pm$ — изотропный вектор в $\mathfrak{L}_+ + \mathfrak{L}_-$.*

Доказательство. В силу изотропности вектора $x_+ + x_-$ в сумме $\mathfrak{L}_+ + \mathfrak{L}_-$ имеем

$$0 = [x_+ + x_-, x_+ - x_-] = \mathrm{Re}[x_+ + x_-, x_+ - x_-] = [x_+, x_+] - [x_-, x_-].$$

Из неотрицательности/неположительности $\mathfrak{L}_\pm$ следует $[x_+, x_+] = [x_-, x_-] = 0$, т.е. векторы $x_\pm$ нейтральны, а потому они изотропны в неотрицательном/неположительном подпространстве $\mathfrak{L}_\pm$, соответственно. С учетом этого и того, что сумма $x_+ + x_-$ изотропна в $\mathfrak{L}_+ + \mathfrak{L}_-$, получаем изотропность $x_\pm$ в $\mathfrak{L}_+ + \mathfrak{L}_-$. □

Из Леммы 2 сразу следует

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{L}_\pm$ — положительный и отрицательный линеал, соответственно. Тогда $\mathfrak{L}_+ \dot{+} \mathfrak{L}_-$ — невырожденный линеал.*

Лемма 4. *Пусть:*

1) *на линеале*
$$\mathfrak{L}_+ \dot{+} \mathfrak{L}_- \tag{3}$$
заданы норма $\|\cdot\|$ и полуторалинейная эрмитова форма $[\cdot, \cdot]$;

2) *функция $[x,x]$ равномерно непрерывна на шаре $\{x : \|x\| \leqslant 1\}$;*

3) *$[x_+, x_+] \geqslant \alpha \|x_+\|^2$ при всех $x_+ \in \mathfrak{L}_+$ и некотором $\alpha > 0$;*

4) *$[x_-, x_-] \leqslant 0$ при всех $x_- \in \mathfrak{L}_-$.*

Тогда сумма (3) топологическая.

Доказательство. Предположив противное, без ограничения общности можно считать $x_{+,n} - x_{-,n} \to 0$ при $(\mathbb{N} \ni) n \to \infty$, где $x_{+,n} \in \mathfrak{L}_+$, $x_{-,n} \in \mathfrak{L}_-$, $1 \geqslant \|x_{+,n}\| \geqslant c > 0$, $1 \geqslant \|x_{-,n}\|$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и некотором числе c. Отсюда для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\varepsilon > |[x_{+,n}, x_{+,n}] - [x_{-,n}, x_{-,n}]| \geqslant [x_{+,n}, x_{+,n}] \geqslant \alpha c^2 > 0.$$

Противоречие. □

Применяя Лемму 3 и Лемму 4, получим

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{L}_\pm$ — положительное/отрицательное подпространство, соответственно. Если хотя бы одно из них равномерно дефинитно, то их сумма — невырожденное подпространство.*

Пример 6. Рассмотрим разложение (1) и введем индефинитную метрику с помощью самосопряженного оператора $G : G(x_+ + \lambda e + x_-) = G_+x_+ - G_-x_-$, где $G_\pm > 0$, причем $0 \notin \rho(G_+)$. Обозначим $\widetilde{G_-}$ расширение G_- на л.о.$\{e\} \oplus \mathfrak{H}^-$, положив $\widetilde{G_-}e = 0$. Линеал $\mathfrak{L}_- = \{x = x_- + G_+^{-1/2} S\widetilde{G_-}^{1/2} x_-\}$ отрицателен, если $S :$ л.о.$\{e\} \oplus \mathfrak{H}^- \to \mathfrak{H}^+$— строгое сжатие на области значений $\operatorname{ran} G_-^{1/2} (= \operatorname{ran} \widetilde{G_-}^{1/2})$ оператора $G_-^{1/2}$ и $e \notin \operatorname{dom}(G_+^{-1/2} S\widetilde{G_-}^{1/2})$.

Построим пример оператора $G_+^{-1/2} S\widetilde{G_-}^{1/2}$ такого, что он плотно задан, замкнут и подпространство $\mathfrak{L}_-$ отрицательно. Будем считать, что гильбертовы подпространства $\mathfrak{H}^+$ и $\mathfrak{H}^-$ совпадают, т.е. $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^- =: \mathcal{G}$. Пусть A_0 — равномерно положительный плотно заданный симметрический оператор в пространстве $\mathcal{G}$ с индексами дефекта $(1, 1)$. Пусть A — равномерно положительное самосопряженное расширение оператора A_0 и его область определения $\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} A_0 +$ л.о.$\{f\}$ с некоторым $f \in \operatorname{dom} A_0^* \setminus \operatorname{dom} A_0$. Пусть $G_+ = A^{-6}$ и $G_- = A^{-2}$. Положим $S(\lambda e + x) = A^{-1}/(2\|A^{-1}\|)x$ при всех комплексных λ и $x \in \mathfrak{H}_-$. Множество л.о.$\{e+f\}+\operatorname{dom} A_0$ плотно в л.о.$\{e\}\oplus\mathfrak{H}^-$ и оператор $K : K(\lambda(e+f)+x) = G_+^{-1/2} SG_-^{1/2}(x+\lambda f) = A/(2\|A^{-1}\|)(x + \lambda f)$ с $\operatorname{dom} K =$ л.о.$\{e + f\} + \operatorname{dom} A_0$, $x \in \operatorname{dom} A_0$, плотно задан в л.о.$\{e\} \oplus \mathfrak{H}^-$, $e \notin \operatorname{dom} K$ и K — замкнутый оператор, поскольку он является одномерным расширением замкнутого оператора A_0. Следовательно, $\mathfrak{L}_- = \{x = x_- + Kx_- \mid x_- \in$ л.о.$\{e + f\} + \operatorname{dom} A_0\}$ — искомое отрицательное подпространство.

По построению, $\mathfrak{H}_+ + \mathfrak{L} = \mathfrak{H}_+ +$л.о.$\{e+f\}+\operatorname{dom} A_0$ плотно в $\mathfrak{H}$, а потому замыкание суммы регулярного подпространства $\mathfrak{H}_+$ и отрицательного $\mathfrak{L}$ вырождено.

3. Перейдем теперь к ответу на основной — третий — вопрос.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{L}$ — G-пространство, $\mathfrak{L}_+$ — равномерно положительное (полное) подпространство в $\mathfrak{L}$. Тогда $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+[\dot{+}]\mathfrak{L}_+^{[\perp]}$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать $\mathfrak{L}$ полным пространством. Согласно [1, с. 58–59] пространство $\mathfrak{L}$ может быть расширено до пространства Крейна $\mathfrak{H}$. Как известно [1, Теорема 1.7.16], равномерно положительное подпространство $\mathfrak{L}_+$ порождает разложение:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_+[\dot{+}]\mathfrak{L}_+^{[\perp]_\mathfrak{H}}.$$

Остается заметить, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+[\dot{+}](\mathfrak{L}_+^{[\perp]_\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{L})$ и $(\mathfrak{L}_+^{[\perp]_\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{L}) = \mathfrak{L}_+^{[\perp]_\mathfrak{L}}$ $\square$

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство с индефинитной метрикой $[\cdot, \cdot]$, допускающее следующие разложения:*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_+\dot{+}\mathfrak{L}_-, \tag{4}$$

где $\mathfrak{L}_+$ – равномерно положительное подпространство и $\mathfrak{L}_-$ — неположительное подпространство, и

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1^+[\dot{+}]\mathfrak{H}_1^-, \tag{5}$$

где $\mathfrak{H}_1^+$ — положительное подпространство, $\mathfrak{H}_1^-$ — неположительное подпространство, $[\cdot, \cdot]$-ортогональное $\mathfrak{H}_1^+$.

Тогда $\mathfrak{H}_1^+$ — равномерно положительное подпространство.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{L}_+$ — равномерно положительное подпространство, согласно Лемме 7 имеем

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+[\oplus]\mathfrak{L}_+^{[\perp]}. \tag{6}$$

Без ограничения общности будем считать, что разложение (6) является каноническим, т.е. подпространства $\mathfrak{L}_+$ и $\mathfrak{L}_+^{[\perp]}$ взаимно ортогональны не только относительно индефинитной метрики, но и относительно скалярного произведения. Поэтому в разложении (6) оператор Грама G имеет следующее матричное представление:

$$G = \begin{bmatrix} G_+ & 0 \\ 0 & -G_- \end{bmatrix}, \qquad G_\pm \geqslant 0, \tag{7}$$

где, поскольку $\mathfrak{L}_+$ равномерно дефинитно, $0 \in \rho(G_+)$, т.е. $G_+ >> 0$.

Разложение (5) также является каноническим относительно скалярного произведения

$$(x, y)_1 = (x^+, y^+) + (x^-, y^-), \quad x = x^+ + x^-,\ y = y^+ + y^-, \quad x^\pm, y^\pm \in \mathfrak{H}_1^\pm$$

Поскольку исходное скалярное произведение и $(\cdot,\cdot)_1$ эквивалентны, то существует такой непрерывный равномерно положительный оператор W, что $(x, y)_1 = (Wx, y)$. Поскольку индефинитная метрика непрерывна относительно W-скалярного произведения, то существует ограниченный W-самосопряженный оператор G_1, такой что $[x, y] = (G_1x, y)_1 = (WG_1x, y)$, т.е. $G_1 = W^{-1}G$. Теперь заметим, что $0 \in \rho(G_{1,+})$ тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$, что все $\lambda : 0 < \lambda < \varepsilon$ регулярны для оператора $G_1 = W^{-1}G$. Докажем последнее. Пусть

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ W_{12}^* & W_2 \end{bmatrix}$$

— матричное представление оператора W относительно разложения (6). Так как $W^{-1}G - \lambda = W^{-1}(G - \lambda W)$, то достаточно проверить, что при

$$0 < \lambda < \inf_{\|x_+\|=1} (W_1^{-1/2} G_+ W_1^{-1/2} x_+, x_+)$$

имеем $0 \in \rho(G - \lambda W)$. Последнее следует из того, что существует и непрерывен следующий оператор:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= (G_+ - \lambda W_1 + \lambda^2 W_{12}(G_- + \lambda W_2)^{-1} W_{12}^*)^{-1} \\
A_2 &= -(G_- + \lambda W_2 + \lambda^2 W_{12}^*(G_+ - \lambda W_1)^{-1} W_{12})^{-1} \\
A_{12} &= \lambda(G_+ - \lambda W_1)^{-1} W_{12}(G_- + \lambda W_2 + \lambda^2 W_{12}^*(G_+ - \lambda W_1)^{-1} W_{12})^{-1} \\
&= \lambda(G_+ - \lambda W_1)^{-1} W_{12} A_2 \\
A_{21} &= -\lambda(G_- + \lambda W_2)^{-1} W_{12}^*(G_+ - \lambda W_1 + \lambda^2 W_{12}(G_- + \lambda W_2)^{-1} W_{12}^*)^{-1} \\
&= -\lambda(G_- + \lambda W_2)^{-1} W_{12}^* A_1
\end{aligned}$$

В силу выбора λ все операторы, для которых написан обратный, являются равномерно положительными и потому оператор A корректно задан и является обратным к оператору

$$G - \lambda W = \begin{bmatrix} G_+ - \lambda W_1 & -\lambda W_{12} \\ -\lambda W_{12}^* & -G_- - \lambda W_2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает приведенное ниже следствие.

Следствие 9. *Пусть* $\mathfrak{L}_\pm$ *— равномерно положительное/отрицательное подпространство, соответственно. Тогда* $\mathfrak{L}_+ \dot{+} \mathfrak{L}_-$ *— пространство Крейна.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, М.: Наука, 1986, 352 с.

[2] V.A. Khatskevich, V.A. Senderov, *On properties of linear operators of certain classes in rigged spaces with indefinite metric*, Integral Equations and Operator Theory, **15** (1992), 301–324

Азизов Т. Я., доктор физико-математических наук, профессор, ВГУ
E-mail: azizov@math.vsu.ru

Azizov Tomas Yakovlevich, Department of Mathematics, Voronezh State University
E-mail: azizov@math.vsu.ru

Сендеров В. А., Пятницкое шоссе, 23-2-156, Москва, 125430
E-mail: senderov.valery@gmail.com

Senderov Valerii Anatol'evich, Pyatnitskoe highway, 23-2-156, Moscow, 125430, Russia
E-mail: senderov.valery@gmail.com