УДК 515.16

КРИВЫЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Р. С. Адамова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.05.2013 г.

Аннотация: в работе доказывается, что неособые кривые четвертого порядка в комплексной проективной плоскости являются сферами с тремя ручками.

Ключевые слова: проективная плоскость, двумерное многообразие, кривая четвертого порядка.

Abstract: in this paper we obtain that nonsingular curves of the fourth order in complex projective plane are spheres with three handles.

Keywords: projective plane, two-dimensional manifold, curve of the fourth order.

Относительно неособых кривых третьего порядка в комплексной проективной плоскости известно [1], что они представляют собой тор, то есть сферу с одной ручкой. Такие кривые четвертого порядка являются вещественными двумерными поверхностями, ориентируемыми, связными и компактными. Поэтому они должны быть сферами с несколькими ручками, и, казалось бы, что ручек должно быть на одну больше, чем у кривых третьего порядка. Исследования показали, что это не так: их количество возросло на две единицы.

Теорема 1. *Всякая неособая кривая четвертого порядка в комплексной проективной плоскости имеет, по крайней мере, одну точку перегиба.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и для кривых третьего порядка в [1].

Теорема 2. *Всякая неособая кривая четвертого порядка в комплексной проективной плоскости в некоторой системе проективных координат описывается уравнением, которое в плоскости C^2 имеет вид*

$$y^3 + y \cdot p(x) + q(x) = 0, \tag{1}$$

где $\deg p(x)$ *равна* 3 *или* $\deg q(x)$ *равна* 4.

Если интересоваться точками этой кривой, не принадлежащими C^2, их мы называем бесконечными, то окажется, что таких точек всего одна, если степень многочлена $p(x)$ меньше 3 или он нулевой, в другом случае их две. Эти два случая различаются степенью дискриминанта $D(x)$ многочлена от переменной y в уравнении (1): она равна 8 в первом случае и равна 9 во втором.

Теорема 3. *Если x_0 — простой корень дискриминанта, то при таком значении переменной x уравнение* (1) *имеет корень кратности* 2*, если же x_0 — кратный корень дискриминанта, то его кратность в $D(x)$ равна* 2*, а уравнение* (1) *при этом значении обладает корнем кратности* 3.

Строим развертку поверхности, описываемой уравнением (1) и дополняем ее бесконечными точками. Отдельно рассмотрим случаи с разным количеством двукратных корней дискриминанта $D(x)$. Поскольку его степень 8 или 9, то наибольшее количество таких корней равно 4.

1. Многочлен $D(x)$ имеет **четыре двукратных** корня: x_1, x_2, x_3, x_4. При каждом из них уравнение (1) имеет трехкратный корень $y_0 = 0$ и потому коэффициент $p(x) \equiv 0$. В этом случае многочлен $D(x)$ имеет степень, равную 8, и потому других корней, кроме x_1, x_2, x_3, x_4 у него нет.

Построим три непрерывные ветви корней этого уравнения в комплексной плоскости, удалив из нее четыре не пересекающихся луча, исходящих соответственно из точек x_1, x_2, x_3, x_4. Полученные три непрерывные комплексные функции φ_1, φ_2, φ_3 определят отображения $x \to (x, \varphi_i(x))$, которые устанавливают гомеоморфизмы между плоскостью без четырех лучей и её образами на поверхности решений уравнения (1).

Для построения развертки исследуемой поверхности склеим квадраты без границ и с надрезами, гомеоморфные плоскостям без лучей, по схеме: нечетную сторону разреза с четной стороной аналогичного разреза следующего экземпляра плоскости, нечетную сторону последнего экземпляра с четной стороной первого.

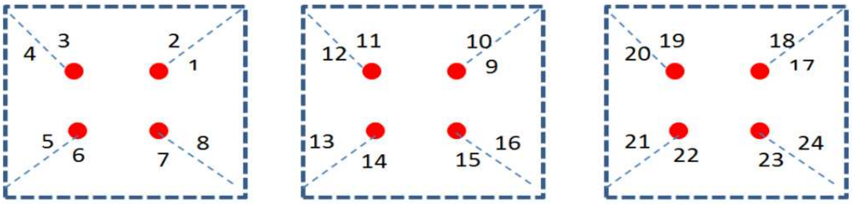

Рис. 1. *Области определения непрерывных ветвей решений уравнения (1)*

Деформируем квадраты так, чтобы стороны разрезов расположились на сторонах новых квадратов, у которых на серединах сторон выколота точка:

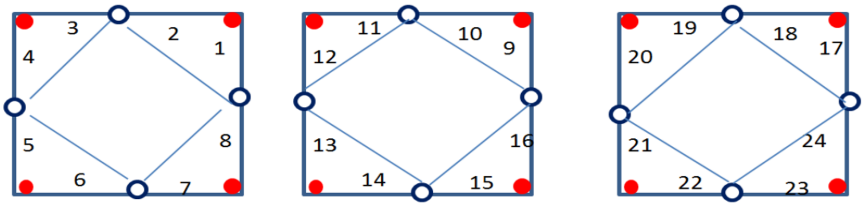

Рис. 2. *Области определения непрерывных ветвей решений уравнения (1) с продолжениями на стороны разрезов*

Треугольники по углам этих квадратов вдавим так, чтобы их катеты расположились на гипотенузах. Далее делая склейку полученных новых квадратов по приведенному выше правилу, получим развертку поверхности в виде 12-угольника без вершин. Все вершины этого многоугольника соответствуют одной и той же точке исследуемой поверхности, именно ее бесконечной точке.

Слово, которое задает способ склейки сторон, может быть приведено к каноническому виду, представляющему собой последовательность трех слов вида $aba^{-1}b^{-1}$. Это говорит о том ([2], [3]), что результат склейки гомеоморфен сфере с тремя ручками.

2. Многочлен $D(x)$ имеет **три двукратных** корня: x_1, x_2, x_3. В таком случае степень многочлена $p(x)$ равна 3, а дискриминанта равна 9. Поэтому у дискриминанта будут еще три простых корня z_1, z_2, z_3. На комплексной плоскости сделаем 6 разрезов и построим три непрерывных ветви решений уравнения (1). Поскольку корни z_1, z_2, z_3 — простые, то на трех лучах разрывы окажутся устранимыми. Обратим внимание на лучи с неустранимыми разрывами по их сторонам. Возможны два варианта распределения их по трем построенным ветвям: 3, 2, 1 и 2, 2, 2 (по количеству).

В первом случае изменим две первые непрерывные ветви, сделав разрезы между парой точек, из которых на второй ветви выходят лучи с неустранимыми разрывами. У этих разрезов должны склеиваться их противоположные стороны, при этом получится ручка. Остались разрезы на первой и третьей ветви, уходящие в бесконечность. Склейка их по противоположным сторонам даст еще ручку без одной точки. Этот прокол заклеивается одной из двух бесконечных точек, которыми обладает кривая в этом случае.

Во втором случае также получаются две ручки, но две окружности, по которым они приклеиваются к плоскости, касаются в выколотой точке. Она заклеивается аналогично предыдущему случаю.

Осталось посмотреть, что даёт склейка трех плоскостей с тремя разрезами, исходящими из 3-кратных корней x_1, x_2, x_3. Склейка около первого корня дает в результате 12-угольник.

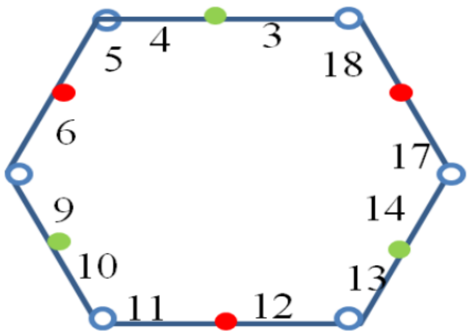

Рис. 3. *Результат склейки около одного корня без изображения двух ручек*

Для склейки его сторон возможны четыре варианта. Лишь один из них дает неподходящий результат: сферу с тремя выколотыми точками. Такого у данной поверхности быть не может. Переклеивая так, чтобы получился многоугольник, вершины которого изображают одну и ту же бесконечную точку, мы получим шестиугольник, стороны которого склеиваются по слову $a\,b\,c\,d\,a^{-1}\,b^{-1}\,d^{-1}\,c^{-1}$. Результатом будет сфера с одной ручкой, но еще две ручки, как помним, дадут простые корни дискриминанта.

Применяя аналогичную методику ко всем остальным случаям, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Неособая кривая четвертого порядка в проективной комплексной плоскости с топологической точки зрения представляет собой сферу с тремя ручками.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Прасолов В. В., Соловьев Ю. П. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. — М.: Изд-во “Факториал”, 1997. — 288 с.

[2] Фоменко А. Т., Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 432 с.

[3] Введение в топологию / Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко: учеб. пособие. — 2-изд., доп. М: Наука. — 1995. — 416 с.

Адамова Р. С., Воронежский государственный университет, доцент кафедры алгебры и топологических методов анализа
E-mail: adamova_rs@ mail.ru

Adamova R. S., Voronezh State University, associate professor, department of algebra and topological methods of analysis
E-mail: adamova_rs@ mail.ru